

**UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE**

**FACULTAD DE CIENCIA**

**Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación**

**CÁLCULO**  
**Segunda Versión**

**Gladys Bobadilla A. y Rafael Labarca B.**

**Santiago de Chile**  
**2004**



# Prefacio

El cero es el silencio antes del número  
El número es el verbo matemático  
Lo matemático es el cálculo de la realidad  
La realidad es lo único increíble  
Lo increíble es lo que no podemos  
Y lo que no podemos es lo que queremos.  
*Patricio Manns.*

Este texto es producto - en elaboración aún - del proyecto de desarrollo de la docencia **Texto de cálculo anual para ingeniería civil**, financiado por la Vicerrectoría de Docencia y Extensión de la Universidad de Santiago de Chile.

Gran parte de los contenidos de los capítulos 1 y 2 están sacados del antiguo texto de Cálculo I escrito por Gladys Bobadilla y Jorge Billeke (Q.E.P.D.).

La idea motriz de los autores para emprender esta tarea es el profundo convencimiento que ésta es una forma de contribuir a una cultura nacional independiente.

Aunque los temas tratados - generados en Europa entre los siglos 17 y 19 - forman parte del patrimonio universal y existe una amplia y variada literatura, no es una razón suficiente para que la universidad renuncie a crear su propio material docente. Esta labor es tan importante como la creación de nuevos conocimientos y necesita, como esta última, de una tradición para la cual se debe recorrer un largo camino de errores y rectificaciones.

Además, queremos compartir con los jóvenes estudiantes que usarán este libro, la reflexión del filósofo Gastón Bachelard (1884 - 1962) sobre lo que significa enfrentarse al conocimiento científico: "Frente al misterio de lo real el alma no puede, por decreto, tornarse ingenua. Es entonces imposible hacer, de golpe, tabla rasa de los conocimientos usuales. Frente a lo real, lo que cree saberse claramente ofusca lo que debiera saberse. Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy

viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecerse espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado.”<sup>1</sup>

Agradecemos los valiosos comentarios de la Dra. Cecilia Yarur, la profesora Graciela Escalona y el señor Luis Riquelme que nos ayudaron a mejorar la presentación de este texto. Agradecemos además, el apoyo técnico en la escritura digital, de la señorita Evelyn Aguilar y el señor Leonelo Iturriaga.

Finalmente, siendo ésta una versión preliminar, agradeceremos a quienes detecten errores nos lo hagan saber.

Gladys Bobadilla A y Rafael Labarca B.  
Santiago, marzo de 2002.

---

<sup>1</sup>Gastón Bachelard: La formación del espíritu científico. Ed. Siglo XXI, 1997.

# Índice general

<b>1. Límites y continuidad</b>	<b>1</b>
1.1. Los números reales	1
1.1.1. La aritmética de los números reales: axiomas de cuerpo	1
1.1.2. Comparación de los números reales: axiomas de orden	11
1.1.3. Resolución de desigualdades o inecuaciones	16
1.1.4. Una distancia en $\mathbb{R}$ : el valor absoluto	29
1.1.5. La continuidad de $\mathbb{R}$ : el axioma del supremo	39
1.2. Límites de funciones numéricas de variable discreta.	56
1.2.1. Las variables discretas y el conjunto $\mathbb{N}$	56
1.2.2. Convergencia de sucesiones	58
1.2.3. Divergencia de sucesiones hacia $\pm\infty$	69
1.2.4. Ejercicios resueltos	77
1.2.5. Ejercicios propuestos	95
1.3. Las funciones numéricas de variable continua	99
1.3.1. Definiciones básicas	99
1.3.2. Representación gráfica de funciones	105
1.3.3. Ejercicios resueltos	108
1.3.4. Ejercicios propuestos	123
1.4. Límites de funciones numéricas de variable continua	127
1.4.1. Límites finitos:	127
1.4.2. Límites laterales	134
1.4.3. Límites finitos cuando la variable independiente crece o decrece indefinidamente	135
1.4.4. Las funciones circulares o trigonométricas	142
1.4.5. Definición de las funciones circulares o trigonométricas	144
1.4.6. Ejercicios resueltos	171
1.4.7. Ejercicios propuestos	189
1.5. Funciones continuas	192
1.5.1. Definiciones básicas	192

1.5.2.	Continuidad de funciones elementales . . . . .	195
1.5.3.	Discontinuidades removibles . . . . .	196
1.5.4.	Propiedades de las funciones continuas . . . . .	197
1.5.5.	Ejercicios resueltos . . . . .	202
1.5.6.	Ejercicios propuestos . . . . .	215
<b>2.</b>	<b>La derivada y sus aplicaciones</b>	<b>219</b>
2.1.	Introducción . . . . .	219
2.2.	Definición y fórmulas básicas de la derivada . . . . .	222
2.2.1.	Definiciones básicas . . . . .	222
2.2.2.	Fórmulas elementales . . . . .	228
2.2.3.	Las derivadas de las funciones trigonométricas . . . . .	233
2.2.4.	Las derivadas de orden superior . . . . .	234
2.2.5.	Ejercicios resueltos . . . . .	235
2.2.6.	Ejercicios propuestos . . . . .	242
2.3.	Propiedades de las funciones derivables . . . . .	245
2.3.1.	Teoremas principales . . . . .	245
2.3.2.	Derivadas de las inversas de las funciones trigonométricas . . . . .	257
2.3.3.	Ejercicios resueltos . . . . .	262
2.3.4.	Ejercicios propuestos . . . . .	267
2.4.	Aplicaciones I: La regla de L'Hôpital . . . . .	269
2.5.	Aplicaciones II: Gráficos de funciones . . . . .	276
2.6.	Aplicaciones III: Análisis de curvas en el plano . . . . .	294
2.6.1.	Elementos de Geometría Analítica . . . . .	294
2.6.2.	Análisis de curvas en coordenadas rectangulares . . . . .	342
2.6.3.	Análisis de curvas dadas por ecuaciones paramétricas . . . . .	352
2.6.4.	Curvas expresadas en coordenadas polares . . . . .	364
2.7.	Aplicaciones IV: problemas de máximo y mínimo . . . . .	382
2.8.	Aplicaciones V: Razón de cambio y diferenciales . . . . .	400
2.8.1.	Razones de cambio . . . . .	400
2.8.2.	Diferenciales . . . . .	402
2.9.	Aplicaciones VI: Física del movimiento . . . . .	407
2.10.	Bibliografía . . . . .	416
<b>3.</b>	<b>La integral de Riemann</b>	<b>417</b>
3.1.	Sumas de Riemann y el concepto de integral . . . . .	417
3.1.1.	Cálculo de integrales mediante sumas de Riemann particulares . . . . .	427
3.2.	Propiedades de la Integral de Riemann . . . . .	452
3.3.	Teorema Fundamental de Cálculo . . . . .	468
3.4.	Las funciones logaritmo natural y exponencial . . . . .	477

3.4.1.	Definición y propiedades de la función logaritmo natural . . . . .	477
3.4.2.	La función exponencial . . . . .	484
3.4.3.	Aplicaciones de la función exponencial: . . . . .	493
3.4.4.	Las funciones hiperbólicas . . . . .	496
3.4.5.	La regla de L'Hôpital y cálculo de límites de formas indeterminadas de tipo exponencial . . . . .	504
3.4.6.	Derivación logarítmica . . . . .	508
<b>4.</b>	<b>La integral indefinida: cálculo de primitivas</b>	<b>525</b>
4.1.	La integral indefinida y sus propiedades . . . . .	525
4.1.1.	La integral indefinida . . . . .	525
4.1.2.	Fórmulas básicas de integración . . . . .	528
4.1.3.	Propiedades elementales de la integral indefinida . . . . .	530
4.1.4.	Ejercicios propuestos . . . . .	536
4.2.	Fórmulas de reducción . . . . .	538
4.2.1.	Ejercicios propuestos . . . . .	543
4.3.	Integración de funciones racionales . . . . .	544
4.3.1.	Descomposición de un polinomio en factores . . . . .	544
4.3.2.	Descomposición de una función racional en fracciones simples o par- ciales . . . . .	544
4.3.3.	Integración de funciones racionales . . . . .	548
4.4.	Integración de algunas funciones algebraicas . . . . .	555
4.4.1.	Integración de funciones irracionales simples . . . . .	555
4.4.2.	Integración de $f(x) = x^p(ax^n + b)^q$ $p, q, n \in \mathbb{Q}$ . . . . .	557
4.4.3.	Integración de funciones racionales que involucran polinomios en $x$ y raíces cuadradas de $ax^2 + bx + c$ . . . . .	559
4.4.4.	Ejercicios propuestos . . . . .	563
4.5.	Integración de ciertas funciones trascendentes. . . . .	564
4.5.1.	Integración de funciones trigonométricas. . . . .	564
4.5.2.	Integración de funciones trigonométricas inversas. . . . .	574
4.5.3.	Integración de funciones hiperbólicas, exponenciales y logarítmicas. . . . .	575
4.5.4.	Ejercicios propuestos . . . . .	580
<b>5.</b>	<b>Aplicaciones de la integral</b>	<b>585</b>
5.1.	Cálculo de áreas . . . . .	585
5.1.1.	Cálculo de áreas en coordenadas rectangulares . . . . .	585
5.1.2.	Cálculo de áreas usando ecuaciones paramétricas . . . . .	588
5.1.3.	Cálculo de áreas en coordenadas polares . . . . .	590
5.2.	Cálculo de longitudes de curvas . . . . .	611
5.2.1.	Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares . . . . .	611

5.2.2.	Cálculo de longitudes de curvas dadas por ecuaciones paramétricas .	613
5.2.3.	Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas polares . . . . .	615
5.3.	Volúmenes y áreas de superficies de sólidos de revolución . . . . .	623
5.3.1.	Método de los discos . . . . .	623
5.3.2.	Método de las cortezas o cilindros . . . . .	624
5.3.3.	Áreas de superficies de revolución . . . . .	628
5.4.	Integrales elípticas e integración numérica . . . . .	638
5.4.1.	Integrales elípticas . . . . .	638
5.4.2.	Dos métodos numéricos de integración . . . . .	641
<b>6.</b>	<b>Integrales impropias y series</b>	<b>651</b>
6.1.	Integrales impropias . . . . .	651
6.1.1.	Integrales impropias sobre intervalos no acotados o de primera clase	651
6.1.2.	Propiedades de las integrales impropias de primera clase . . . . .	654
6.1.3.	Integrales impropias cuando la función no es acotada en el intervalo de integración o de segunda clase . . . . .	658
6.1.4.	Otros criterios . . . . .	664
6.1.5.	La función Gama . . . . .	666
6.1.6.	La función Beta . . . . .	667
6.2.	Series Numéricas . . . . .	691
6.2.1.	Conceptos generales . . . . .	691
6.2.2.	Criterios básicos de convergencia de series . . . . .	693
6.2.3.	Series de términos alternados: criterio de Leibniz . . . . .	699
6.2.4.	Convergencia absoluta y condicional de series . . . . .	701
6.2.5.	Multiplicación de series de términos no-negativos . . . . .	704
6.2.6.	Multiplicación de series en general . . . . .	705
6.2.7.	Criterios más específicos . . . . .	709
6.2.8.	Series de Números Complejos . . . . .	711
6.3.	Series de potencias . . . . .	726
6.3.1.	Series de Funciones . . . . .	726
6.3.2.	Propiedades de las series uniformemente convergentes . . . . .	730
6.3.3.	Series de potencias . . . . .	732
6.4.	Teorema de Taylor . . . . .	751
6.4.1.	Cálculo de polinomios y series de Taylor para funciones elementales	754

# Capítulo 1

## Límites y continuidad

### 1.1. Los números reales

En esta sección se dará de manera muy sucinta las propiedades de los números reales que constituyen la base sobre la cual se construye el cálculo diferencial e integral. Las propiedades aritméticas de estos números han formado parte de la enseñanza básica y media. Algo menos, posiblemente, se ha visto del orden y nada de su propiedad más trascendente - su continuidad - la que está reflejada en el axioma del supremo. La actual presentación de los números reales fue formalizada durante el siglo 19, dos siglos más tarde de la creación del cálculo. Como afirma el filósofo L. Geymonat:

*”El desarrollo de la teoría de los números reales contribuyó a que el análisis infinitesimal dejara de ser la técnica imprecisa e intuitiva que habían forjado sus descubridores del siglo 17, para erigirse en auténtica ciencia y, lo que es más, en una de la más rigurosas y perfectas construcciones del espíritu científico moderno”.*

#### 1.1.1. La aritmética de los números reales: axiomas de cuerpo

Aceptaremos la existencia de un conjunto no vacío  $\mathbb{R}$ , que llamaremos conjunto de los **números reales**. Sobre él se ha definido una relación de igualdad y dos operaciones algebraicas.

La relación de igualdad “=” satisface las propiedades de:

- (I<sub>1</sub>) **Reflexividad:**  $a = a$
- (I<sub>2</sub>) **Simetría:** si  $a = b$ , entonces  $b = a$
- (I<sub>3</sub>) **Transitividad:** si  $a = b$  y  $b = c$ , entonces  $a = c$ .

Las dos operaciones definidas sobre  $\mathbb{R}$  son la **suma** (+) y la **multiplicación** ( $\cdot$ ).

$$\begin{aligned}
 + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (a, b) &\mapsto a + b \\
 \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (a, b) &\mapsto a \cdot b
 \end{aligned}$$

Estas operaciones satisfacen las reglas siguientes, llamadas .

- (C<sub>1</sub>) Ley **asociativa** para la suma:  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .
- (C<sub>2</sub>) Existencia de un **elemento identidad** para la suma:  $a + 0 = 0 + a = a$
- (C<sub>3</sub>) Existencia de **inversos** para la suma:  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .
- (C<sub>4</sub>) Ley **conmutativa** para la suma:  $a + b = b + a$ .
- (C<sub>5</sub>) Ley **asociativa** para la multiplicación:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .
- (C<sub>6</sub>) Existencia de un **elemento identidad** para la multiplicación:  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ;  $1 \neq 0$ .
- (C<sub>7</sub>) Existencia de **inversos** para la multiplicación:  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ , para  $a \neq 0$ .
- (C<sub>8</sub>) Ley **conmutativa** para la multiplicación:  $a \cdot b = b \cdot a$
- (C<sub>9</sub>) Ley **distributiva**:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

Estas operaciones son **compatibles con la relación de igualdad**, es decir, si  $a = b$  entonces  $a + c = b + c$  y  $a \cdot c = b \cdot c$ .

A partir de estos axiomas y las reglas de la lógica formal se pueden obtener todas las otras propiedades de la aritmética usual que Ud. ha aprendido durante la enseñanza básica y media. Los siguientes teoremas, que no se demostrarán, serán enunciados con el propósito de recordar las propiedades más importantes que se derivan de los axiomas de cuerpo.

**Teorema 1.1.1** Dado  $a \in \mathbb{R}$  se cumple :  $0 \cdot a = 0$

**Teorema 1.1.2** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  , se tienen las siguientes propiedades:

- (i)  $-(-a) = a$ .
- (ii)  $(-a) \cdot b = -(ab)$ .
- (iii)  $a \cdot (-b) = -(ab)$ .
- (iv)  $(-a)(-b) = ab$ .

**Teorema 1.1.3** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0, b \neq 0$ , se tienen las siguientes propiedades:

- (i)  $(a^{-1})^{-1} = a$ .
- (ii)  $a^{-1} \cdot b = (a \cdot b^{-1})^{-1}$ .
- (iii)  $a \cdot b^{-1} = (a^{-1} \cdot b)^{-1}$ .
- (iv)  $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$ .

**Teorema 1.1.4 Leyes de cancelación.** Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$  se cumple :

- (i)  $a + b = a + c \iff b = c$ .
- (ii)  $ab = ac, a \neq 0 \iff b = c$ .

**Teorema 1.1.5** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  se cumple:  $ab = 0 \iff (a = 0) \vee (b = 0)$ .

**Definición 1.1.6** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , escribiremos  $a - b$  para simbolizar el número  $a + (-b)$ ; a tal número lo llamaremos la **diferencia** de  $a$  y  $b$ .

**Teorema 1.1.7** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  se tienen las siguientes propiedades:

- (i)  $a - (-b) = a + b$
- (ii)  $a - b = 0 \iff a = b$
- (iii)  $a - (b + a) = a - b - a$ .

**Demostración:**

- (i) Por definición 1.1.6

$$\begin{aligned} a - (-b) &= a + (-(-b)) \\ &= a + b \text{ por Teorema 1.1.2 (i).} \end{aligned}$$

Las afirmaciones (ii) y (iii) se dejan de ejercicio. ■

**Definición 1.1.8** Dados  $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ , escribiremos  $\frac{a}{b}$ , ó,  $a : b$  para simbolizar el número  $a \cdot b^{-1}$  y lo llamaremos **el cociente entre  $a$  y  $b$** , ó,  $a$  **dividido por  $b$** .

**Teorema 1.1.9** Dados  $a, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ , se tienen las siguientes propiedades:

- (i)  $\frac{a}{1} = a$ .
- (ii) Si  $a \neq 0$ , entonces  $\frac{1}{a} = a^{-1}$ .
- (iii) Si  $a \neq 0$ , entonces  $\frac{a}{a} = 1$ .
- (iv) Si  $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ , entonces  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \iff a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2$ .
- (v) Si  $a_2 \neq 0, b \neq 0$ , entonces  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b}{a_2 \cdot b}$
- (vi) Si  $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ , entonces  $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2}$
- (vii) Si  $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ , entonces  $\frac{a_1}{a_2} \pm \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 \pm b_1 \cdot a_2}{a_2 \cdot b_2}$
- (viii) Si  $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ , entonces  $\frac{a_1}{a_2} : \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1}$ .

### Resolución de ecuaciones algebraicas de primer grado.

Dada la ecuación de primer grado

$$ax + b = c \quad ; a \neq 0 \tag{1.1}$$

Se tiene que la ecuación (2.46) tiene una única solución dada por:

$$\boxed{x = \frac{c - b}{a}}$$

### Resolución de una ecuación algebraica de segundo grado.

Dada la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0 \tag{1.2}$$

se tiene que

1. Si  $b^2 - 4ac > 0$ , la ecuación (2.47) tiene dos raíces o soluciones reales distintas, dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Si  $b^2 - 4ac = 0$ , la ecuación (2.47) tiene una única raíz real dada por:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3. Si  $b^2 - 4ac < 0$ , la ecuación (2.47) tiene raíces complejas conjugadas. En este caso diremos que el polinomio cuadrático no es factorizable en  $\mathbb{R}$ .

### Resolución de ecuaciones algebraicas de grado mayor o igual a 3

La solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado pueden ser resueltas con reglas análogas, aunque mucho más complicadas que las de segundo grado. Estas fórmulas fueron encontradas por los algebristas italianos del siglo 16. Para la ecuación de tercer grado existen las llamadas fórmula de Cardano-Tartaglia. Cardano (1501-1576), Tartaglia (1500 - 1557).

Ferrari (1522 - 1565) resolvió la ecuación general de cuarto grado.

En el año 1824 el matemático Noruego Abel (1802 - 1829), demostró que para el caso general de una ecuación algebraica completa de grado mayor o igual a 5,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

no existe ninguna expresión en términos de radicales en estos coeficientes que sea raíz de la ecuación.

El lector interesado en conocer más detalles matemáticos - históricos de este tema puede consultar el libro de A.D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev y otros: *La matemática su contenido, métodos y significado*, tomo I, pág.315.

**Ejemplo 1.1.10** 1. Resuelva en  $\mathbb{R}$  la ecuación.

$$x^2 + x = 1$$

**Solución:** Se debe llevar a la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  entonces queda.

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Su discriminante  $b^2 - 4ac$  vale:

$$1 - 4(1)(-1) = 5$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos raíces reales distintas

$$x = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2. Resuelva en  $\mathbb{R}$ , la ecuación:

$$x^2 + x = -1$$

**Solución:**  $x^2 + x + 1 = 0$

Su discriminante  $b^2 - 4ac$  vale

$$1 - 4(1)(1) = -3 < 0.$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución en  $\mathbb{R}$ .

3.  $x^2 - 2x + 1 = 0$

Su discriminante  $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$ .

Entonces, tiene una única raíz real :  $x = 1$ .

4. Resolver en  $\mathbb{R}$  la ecuación:

$$x^3 - 8 = 0$$

Factorizando el polinomio  $x^3 - 8$ .

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \\ x^3 - 8 &= 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \text{ó} \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ó} \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \end{cases}$$

La ecuación  $x^2 + 2x + 4$  tiene discriminante:

$$b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 4 = 4 - 16 < 0.$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene raíces reales. Así, la ecuación  $x^3 - 8 = 0$  tiene sólo una raíz real  $x = 2$ .

### Fórmulas básicas de factorización

1.  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
2.  $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$
3.  $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$
4.  $(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \dots + y^{n-1})$
5. Si  $n$  es par:  $(x^n - y^n) = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \dots - y^{n-1})$
6. Si  $n$  es impar:  $(x^n + y^n) = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \dots + y^{n-1})$
7.  $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
8.  $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$
9.  $(x + y + z + \dots)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \dots + 2(xy + xz + yz + \dots)$
10. **Fórmula del binomio:**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

donde  $n, k$  son números naturales y  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

### Ejercicios de repaso

1. Usando la notación  $x^2 = x \cdot x$ , demuestre que:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= (a + b)a + (a + b)b \\ &= aa + ba + ab + bb \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

2. Dados los números reales  $a, b, c$ ; demuestre que:  $ax^2 + bx + c = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  si y sólo si  $a = b = c = 0$ .

**Solución:**

Supongamos  $a = b = c = 0$ . Entonces usando la propiedad de la multiplicación por cero, tenemos:

$$ax^2 + bx + c = 0x^2 + 0b + c = 0,$$

Cualquiera sea  $x \in \mathbb{R}$ .

Recíprocamente, supongamos que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1.3}$$

Haciendo  $x = 0$  en (1.3), tenemos:

$$a0 + b0 + c = 0,$$

de lo que podemos deducir:  $c = 0$ .

Si  $x \neq 0$ , entonces

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0 \text{ ; por lo tanto } ax + b = 0.$$

Haciendo sucesivamente  $x = 1$  y  $x = -1$  en  $ax + b = 0$ , obtenemos las igualdades:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -a + b &= 0. \end{aligned}$$

Lo que implica  $a = b = 0$ .

3. Dados los números reales  $a, b, c, a', b', c'$ ; demuestre que:  $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  si y sólo si  $a = a', b = b', c = c'$ .

**Solución:**  $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$  es equivalente a  $(a-a')x^2 + (b-b')x + (c+c') = 0$ , lo que a su vez por el ejercicio (2), es equivalente a  $a = a', b = b', c = c'$ .

4. Encuentre  $a, b$  de modo que para todo  $x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq 2$ :

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}.$$

**Solución:**

Seguindo las reglas de la sumas de cuocientes dadas por el teorema 1.1.9, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{(x-1)(x-2)} &= \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(a+b)x+(-2a-b)}{(x-1)(x-2)}.\end{aligned}$$

Por tanto, usando la ley de cancelación, obtenemos la igualdad de los numeradores:

$$(a+b)x+(-2a-b) = 3x+1.$$

En virtud del ejercicio (3), se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned}a+b &= 3 \\ -2a-b &= 1,\end{aligned}$$

que nos dan los valores buscados de  $a, b$ :  $a = -4, b = 7$ . Se deja al lector el trabajo de comprobar que verdaderamente estos valores satisfacen la condición pedida.

5. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que la expresión:

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'},$$

sea independiente de cualquier  $x \in \mathbb{R}$ .

**Solución:** Supongamos que, cualquiera sea  $x$ , la expresión sea igual a una constante  $k$ , diferente de cero. Es decir,

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = k,$$

Por definición de cuociente tenemos:

$$ax^2+bx+c = ka'x^2+kb'x+kc'.$$

Como esta igualdad se cumple cualquiera sea  $x$ , según ejercicio (3) concluimos:

$$a = ka', \quad b = kb', \quad c = kc'.$$

Esto nos dice que la condición buscada es : **los coeficientes de las mismas potencias de  $x$  deben ser proporcionales.**

Para completar el ejercicio debemos demostrar que la condición es suficiente.

En efecto, si:  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$ , entonces también se cumple:  $\frac{ax^2}{a'x^2} = \frac{bx}{b'x} = \frac{c}{c'} = k$ , por teorema 1.1.9. De estas tres igualdades se obtiene :

$$ax^2 + bx + c = ka'x^2 + kb'x + kc' = k(a'x^2 + b'x + c').$$

Por tanto, la expresión

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

es independiente de  $x$ .

### Ejercicios propuestos

1. Demuestre que  $\frac{a-x}{b-y} = \frac{x-a}{y-b}$  y exprese esta regla en palabras.
2. Demuestre que  $\frac{a-x}{b-y} = -\frac{x-a}{b-y}$  y exprese esta regla en palabras.
3. Demuestre que

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} = 1.$$

4. Demuestre que

$$\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right) \left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1\right) \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x-y}.$$

5. Demuestre que la siguiente expresión se anula cuando  $x = \frac{a+b}{2}$ :

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3 - \frac{x-2a+b}{x+a-2b}.$$

6. Simplifique la expresión

$$\frac{x^2}{1 - \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}} + \frac{x^2 - 2}{1 - \frac{1}{x^2 - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}}$$

7. Encuentre  $a, b$  de modo que para todo  $x \in \mathbb{R}, x \neq -4, x \neq 3$ :

$$\frac{6x-2}{x^2+x-12} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-3}.$$

**1.1.2. Comparación de los números reales: axiomas de orden**

Siguiendo la presentación axiomática, aceptaremos la existencia de un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , llamado conjunto de los **números reales positivos**, denotado por  $\mathbb{R}^+$ , que satisface las propiedades siguientes:

( $O_1$ )  $\mathbb{R}^+$  **es cerrado para la suma**, es decir, si  $a, b$  pertenecen a  $\mathbb{R}^+$ , entonces  $a + b$  pertenecen a  $\mathbb{R}^+$ .

( $O_2$ )  $\mathbb{R}^+$  **es cerrado para la multiplicación**, es decir, si  $a, b$  pertenecen a  $\mathbb{R}^+$ , entonces  $a \cdot b$  pertenece a  $\mathbb{R}^+$ .

( $O_3$ ) : Para todo número real  $a$  se cumple una y sólo una de las afirmaciones:

(i)  $a = 0$

(ii)  $a$  pertenece al conjunto  $\mathbb{R}^+$

(iii)  $-a$  pertenece al conjunto  $\mathbb{R}^+$ .

**Observación 1.1.11** El axioma  $O_3$  se llama **propiedad de tricotomía de los números reales**

**Definición 1.1.12** (i)  $a < b$  si y sólo si  $b - a \in \mathbb{R}^+$

(ii)  $a > b$  si y sólo si  $a - b \in \mathbb{R}^+$

**Teorema 1.1.13** Dados los números reales  $a, b$  se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(i)  $a = b$

(ii)  $a < b$

(iii)  $a > b$

**Demostración:** Aplicando el axioma ( $O_3$ ) o propiedad de Tricotomía al número  $a - b$ , se tiene una y sólo una de las afirmaciones.

(i)  $a - b = 0$

(ii)  $a - b \in \mathbb{R}^+$

(iii)  $-(a - b) \in \mathbb{R}^+$

Las cuales se traducen en  $a = b$ ,  $a > b$ ,  $a < b$  respectivamente usando las propiedades de la subsección 1.1.1 y la definición 1.1.12. ■

**Teorema 1.1.14** Dado un número real  $a$  se cumple una y sólo una de las siguiente afirmaciones:

- (i)  $a = 0$
- (ii)  $a > 0$
- (iii)  $a < 0$

**Demostración:** Es consecuencia directa del teorema 1.1.13 tomando  $b = 0$ . ■

**Teorema 1.1.15** La relación " $<$ " tiene las propiedades siguientes:

- (i) No es reflexiva. Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , no es verdad que  $a < a$
- (ii) Es asimétrica. Si  $a < b$ , entonces no puede tenerse  $b < a$
- (iii) Es transitiva. Si  $a < b$  y  $b < c$ , entonces  $a < c$ .

**Demostración:**

- (i) Si para algún  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a < a$ , entonces  $a - a \in \mathbb{R}^+$ , lo cual implicaría que  $0 \in \mathbb{R}^+$ , que contradice  $(O_3)$ .
- (ii) Si  $a < b$ , entonces  $b - a \in \mathbb{R}^+$ , lo que por tricotomía excluye que  $a - b \in \mathbb{R}^+$ , por tanto es imposible que  $b < a$ .
- (iii) Si  $a < b$ , entonces  $b - a \in \mathbb{R}^+$ . Si  $b < c$ , entonces  $c - b \in \mathbb{R}^+$  por  $(O_1)$ ,  $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$ , o lo que es lo mismo  $c - a \in \mathbb{R}^+$ , por tanto  $a < c$ . ■

**Definición 1.1.16** Llamaremos conjunto de los **números reales negativos** al conjunto  $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}$ .

Observemos que  $0 \notin \mathbb{R}^-$ , lo que pone de manifiesto que el cero no es ni positivo ni negativo. Además  $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$ , pero por el axioma  $(O_3)$  todo número real pertenece a uno y sólo a uno de los conjuntos:  $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \{0\}$ . Así los números reales quedan particionados como  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ .

Por teorema 1.1.13 y teorema 1.1.14 (iii), se tiene que todo número negativo es menor que cualquier número positivo y el cero es la frontera entre los dos tipos de números.

**Definición 1.1.17** (i)  $a \leq b$  si y sólo si  $(a < b) \vee (a = b)$

(ii)  $a \geq b$  si y sólo si  $(a > b) \vee (a = b)$

**Teorema 1.1.18** La relación " $\leq$ " es:

- (i) Reflexiva:  $a \leq a$
- (ii) Antisimétrica: Si  $a \leq b$  y  $b \leq a$ , entonces  $a = b$
- (iii) Transitiva: Si  $a \leq b$  y  $b \leq c$ , entonces  $a \leq c$

**Demostración:**

- (i) Como  $a = a$ , entonces  $a \leq a$
- (ii) Si  $a \leq b$ , entonces  $(a < b)$  ó  $(a = b)$  y si  $b \leq a$ , entonces  $(b < a)$  o  $(a = b)$ . Por tanto, por teorema 1.1.14(ii) sólo es posible  $a = b$ .
- (iii) Si  $a \leq b$  y  $b \leq c$  tenemos cuatro posibilidades:
  - $a < b$  y  $b < c$ . En este caso la transitividad se obtiene del teorema 1.1.14(ii).
  - $a < b$  y  $b = c$ . En este caso  $b - a \in \mathbb{R}^+$  y  $c - b = 0$ , por tanto  $(b - a) + (c - b) = c - a \in \mathbb{R}^+$  y tenemos  $a < c$ .
  - $a = b$  y  $b < c$ . Para este caso la demostración es semejante a la anterior.
  - $a = b$  y  $b = c$ . La conclusión se sigue de la transitividad de la igualdad y la definición de la relación " $\leq$ ". ■

**Teorema 1.1.19**  $a \leq b$  si y sólo si  $a + c \leq b + c$

**Demostración:** Si  $a \leq b$  entonces  $a < b$  ó  $a = b$ .  
Si  $a < b$ , entonces  $b - a \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (b - a) + 0 \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (b - a) + (c - c) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow a + c < b + c \\ &\Rightarrow a + c \leq b + c \end{aligned}$$

Si  $a = b$ , entonces  $a + c = b + c$ , por la compatibilidad de la igualdad con la suma. ■

**Teorema 1.1.20** (i) Si  $a \leq b$  y  $c$  es un número positivo, entonces  $a \cdot c \leq b \cdot c$

(ii) Si  $a \leq b$  y  $c$  es un número negativo, entonces  $a \cdot c \geq b \cdot c$ .

**Demostración:**

(i) Si  $a \leq b$  entonces  $a < b$  ó  $a = b$ . Si  $a < b$ , se tiene  $b - a \in \mathbb{R}^+$  y como  $c \in \mathbb{R}^+$  entonces por  $(O_2)$   $(b - a) \cdot c \in \mathbb{R}^+$ , lo cual implica  $a \cdot c < b \cdot c$ . Si  $a = b$ , entonces por la compatibilidad de la igualdad con el producto  $a \cdot c = b \cdot c$ . En consecuencia,  $a \cdot c \leq b \cdot c$ .

(ii) Se deja como ejercicio.

**Teorema 1.1.21** (i) Si  $a > 0$ , entonces  $-a < 0$

(ii) Si  $a < 0$ , entonces  $-a > 0$

(iii) Si  $a > 0$ , entonces  $a^{-1} > 0$

(iv) Si  $a < 0$ , entonces  $a^{-1} < 0$

**Demostración:**

(i) Si  $a > 0 \implies a \in \mathbb{R}^+ \implies -a \in \mathbb{R}^-$

(ii) Si  $a < 0 \implies -a \in \mathbb{R}^+ \implies -a > 0$

(iii) Sea  $a > 0$ , supongamos  $a^{-1} < 0$ , entonces por teorema 1.1.20 (i)  $a \cdot a > 0$ . Por teorema 1.1.20(ii)

$$\begin{aligned} (a^{-1} \cdot a) \cdot a &< 0 \\ 1 \cdot a &< 0 \\ a &< 0 \end{aligned}$$

Lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto  $a^{-1} > 0$ .

(iv) Se usan los mismos argumentos que en (iii). ■

**Teorema 1.1.22**  $a \cdot b > 0$  si y sólo si  $(a > 0$  y  $b > 0)$  ó  $(a < 0$  y  $b < 0)$ .

**Demostración:**  $(\implies)$  Si  $a \cdot b > 0$ , sabemos por teorema 1.1.5 que  $a \neq 0, b \neq 0$ . Si  $a > 0$ , entonces usando teorema 1.1.20,  $a^{-1} \cdot (a \cdot b) > 0$ . Lo que implica  $(a^{-1} \cdot a) \cdot b > 0$  y por tanto  $b > 0$ .

De manera similar si  $a < 0$ , se concluye que  $b < 0$  con lo cual tenemos nuestra implicancia.

$(\impliedby)$  Si  $a > 0$  y  $b > 0$ , por axioma  $(O_2)$   $a \cdot b > 0$ . Si  $a < 0$  y  $b < 0$ , entonces  $-a > 0$  y  $-b > 0$ , por axioma  $(O_2)$   $(-a) \cdot (-b) > 0$ ; por teorema 1.1.2 (iv)  $a \cdot b > 0$ . ■

**Teorema 1.1.23**  $a \cdot b < 0$  si y sólo si  $(a < 0 \text{ y } b > 0)$  o  $(a > 0 \text{ y } b < 0)$

**Demostración:** Se deja como ejercicio.

**Teorema 1.1.24** El cuadrado de un número real no nulo es positivo: Si  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , entonces  $a^2 \in \mathbb{R}^+$ .

**Demostración:** Si  $a \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $a > 0$ . Por axioma  $(O_2)$ ,  $a \cdot a > 0$ , es decir,  $a^2 > 0$ .

Si  $a \in \mathbb{R}^-$ , entonces  $a < 0$ . Por teorema 1.1.22,  $a \cdot a > 0$ , así nuevamente  $a^2 > 0$ . ■

**Teorema 1.1.25**  $1 \in \mathbb{R}^+$ .

**Demostración:** Por axioma  $(C_6)$ ,  $1 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1 \\ 1 &= 1^2 \end{aligned}$$

El teorema anterior implica que  $1 > 0$ . ■

**Teorema 1.1.26** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si  $a < b$ , entonces  $a < \frac{a+b}{2} < b$

**Demostración:** Si  $a < b$ , entonces sumando  $a$  en ambos miembros de la desigualdad se tiene  $a + a < b + a$ , por tanto:

$$\begin{aligned} a(1+1) &< b+a \Rightarrow \\ 2a &< b+a \end{aligned}$$

Aplicando el mismo razonamiento, pero ahora sumando  $b$  en ambos miembros de la desigualdad  $a < b$ , obtenemos que  $b+a < 2b$ .

En virtud de la transitividad de la relación " $<$ " se obtiene que

$$2a < b+a < 2b$$

dividiendo todo por  $2 > 0$ , se tiene lo que queríamos demostrar,  $a < \frac{a+b}{2} < b$ . ■

El teorema 1.1.26 puede leerse diciendo que *entre dos números reales  $a, b$  distintos siempre existe un tercer número  $c$* . Como  $a, c$  son distintos, puede aplicarse la conclusión a ellos y obtener un cuarto número real  $d$ , y así sucesivamente. Como este proceso puede extenderse indefinidamente, lo que obtenemos es que *entre dos números reales distintos existen infinitos números reales*. Esta importante propiedad se llama *densidad* de los números reales.

**Definición 1.1.27** Decimos que un conjunto  $A$  de números reales es **denso** si y sólo si entre dos elementos distintos  $x, y$  de  $A$  existe un elemento  $z \in A$  tal que  $x < z < y$ .

### 1.1.3. Resolución de desigualdades o inecuaciones

Para resolver cualquier desigualdad los pasos previos obligatorios son:

1. Reducir términos semejantes.
2. Factorizar el respectivo polinomio cuando el grado es mayor o igual a dos.

En principio para resolver desigualdades de grado igual o superior a dos se debe aplicar los teoremas 1.1.22 y 1.1.23 analizando las distintas posibilidades de signo de los factores a este método le llamaremos **axiomático**. Pero, en general este método resulta largo si se aplica al pie de la letra. A continuación expondremos la forma más rápida de resolver dichas desigualdades, llamado **método reducido**.

#### 1. Resolución de una desigualdad de primer grado

Después de reducir los términos semejantes, una desigualdad de primer grado puede escribirse como:

$$0 \leq ax + b \quad (1.4)$$

Usando el teorema (1.1.19), se tiene que

$$-b \leq ax \quad (1.5)$$

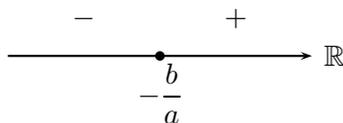
Para despejar completamente la variable  $x$ , se debe multiplicar la desigualdad (1.5) por el inverso multiplicativo de  $a$ .

Por lo tanto, en virtud del teorema (1.1.20) se tiene que:

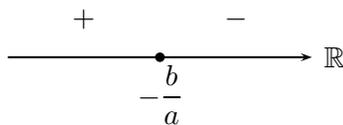
$$0 \leq ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{b}{a} & \text{si } a > 0 \\ x \leq -\frac{b}{a} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Signo de  $ax + b$

Si  $a > 0$ :



Si  $a < 0$ :



## 2. Resolución de una desigualdad de segundo grado general.

Dados los números  $a, b, c$ , encuentre todos los números reales  $x$  que satisfacen la desigualdad:

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

**Solución:**

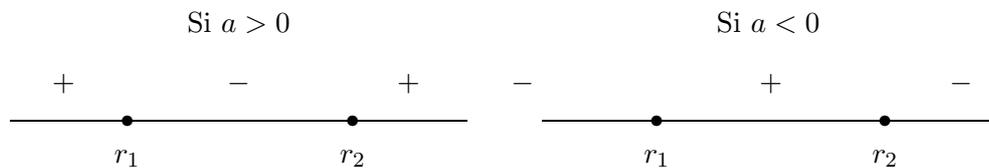
**Primer caso:** Supongamos que el trinomio puede escribirse en la forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2),$$

Donde  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  y  $r_1 < r_2$ . (Raíces reales y distintas). Si  $a > 0$ , entonces el trinomio es positivo si los dos factores en  $x$  tienen el mismo signo, por lo tanto, la desigualdad se cumple cuando  $x$  es menor que ambas raíces o cuando  $x$  es mayor que ambas raíces. Es decir, la solución al problema es:

$$x < r_1 \text{ ó } x > r_2.$$

Si  $a < 0$ , el trinomio es positivo cuando los dos factores en  $x$  tienen distintos signos. Por tanto, la desigualdad se cumple para  $x$  comprendido entre  $r_1$  y  $r_2$ .



**Segundo caso:** Si  $r_1 = r_2 = r$ , raíces reales e iguales, entonces

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)^2.$$

Como todo cuadrado es positivo o nulo, tenemos que la desigualdad se cumple para todo  $x \neq r$  si  $a > 0$  y no se cumple nunca cuando  $a < 0$ .

**Tercer caso:** Si el trinomio no es factorizable en factores de primer grado con coeficientes reales, es decir, sus raíces son complejas conjugadas. Lo primero que debemos observar es que la expresión no se anula nunca y tampoco cambia de signo. Por tanto el trinomio es siempre positivo o siempre es negativo. Como el cuadrado de un número grande crece mucho más que el número, es el coeficiente  $a$  que determina el signo. Si  $a > 0$ , la desigualdad se cumple para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; si  $a < 0$  no existen números reales que satisfagan la desigualdad.

**Ejemplo 1.1.28** a) Resolver la desigualdad  $x^2 + x - 6 > 0$ .

**Solución:**

Como  $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ , los números que satisfacen la desigualdad son los  $x$  tales que  $x < -3$  ó  $x > 2$ .



b) Resolver la desigualdad  $x^2 + 3x - 4 < 0$ .

**Solución:**

$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$ , el método reducido implica que la desigualdad se cumple para  $-4 < x < 1$ .



c) Resolver la desigualdad  $x^2 + 2x + 2 < 0$ .

**Solución:**

$x^2 + 2x + 2 = 0$  no tiene soluciones reales y su coeficiente  $a = 1$  es positivo, por tanto el trinomio sólo toma valores positivos y el problema propuesto no tiene solución.

### 3. Resolución de una desigualdad de tercer grado factorizada.

Dados los números  $a, b, c$ , encuentre todos los números reales  $x$  que satisfacen la desigualdad:

$$(x - a)(x - b)(x - c) > 0.$$

**Solución:**

Supongamos que  $a < b < c$ .

Si  $x < a$ , los tres factores son negativos y, por tanto, su producto es negativo.

Si  $x = a$ , entonces el producto es nulo.

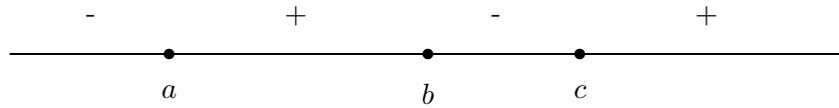
Si  $a < x < b$ , entonces el producto es positivo.

Si  $x = b$ , entonces el producto es nulo. Si  $b < x < c$ , entonces el producto es negativo.

Si  $x = c$ , entonces el producto es nulo. Si  $x < c$ , entonces el producto es positivo.

Del análisis anterior podemos concluir que la desigualdad se cumple cuando  $a < x < b$  ó  $c < x$ .

Observe que es importante ordenar las raíces  $a, b$  y  $c$  de menor a mayor, pues así es más rápido analizar los signos de los factores.



4. **Resolución de desigualdades en forma de cuocientes de términos de primer grado**

Resolver la desigualdad

$$\frac{ax + b}{a'x + b'} > 0.$$

**Solución:**

El cuociente es positivo si y sólo si ambos factores tienen el mismo signo, por lo que la desigualdad del enunciado es equivalente a

$$(ax + b)(a'x + b') > 0.$$

Otra manera de transformar la desigualdad fraccionaria en un producto, es multiplicar la desigualdad por  $(a'x + b')^2$ , que por ser un cuadrado es siempre positivo salvo para  $x = -\frac{b'}{a'}$ .

Así, debemos resolver la desigualdad:

$$(ax + b)(a'x + b') > 0$$

usando el método del ejercicio resuelto 2.

$$(ax + b)(a'x + b') = aa' \left(x + \frac{b}{a}\right) \left(x + \frac{b'}{a'}\right) > 0.$$

Si  $aa' < 0$ , entonces los valores de  $x$  buscados están comprendidos entre  $-\frac{b}{a}$  y

$-\frac{b'}{a'}$ . Si  $aa' > 0$ , entonces los valores de  $x$  que satisfacen la desigualdad están en el

complemento del conjunto comprendido entre  $-\frac{b}{a}$  y  $-\frac{b'}{a'}$ .

5. **Desigualdades que contienen la variable en el denominador de una expresión**

Si una desigualdad contiene a la variable en algún denominador de un cuociente, conviene reducir todos los términos en un único cuociente de modo que en uno de los lados se tenga un cero y, posteriormente multiplicar la desigualdad por el cuadrado del denominador.

**Ejemplo 1.1.29** Resolver la desigualdad

$$\frac{7}{x-2} - \frac{4}{x-1} \leq 0.$$

**Solución:**

$$\frac{7}{x-2} - \frac{4}{x-1} = \frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}.$$

Entonces, la desigualdad puede escribirse como:

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)} \leq 0; \quad x \neq 2, x \neq 1.$$

multiplicandola por el cuadrado del denominador, se tiene una forma equivalente:

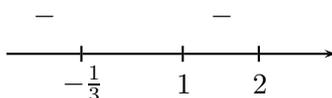
$$(3x+1)(x-2)(x-1) \leq 0.$$

Ordenando las raíces:

$$3 \left( x + \frac{1}{3} \right) (x-1)(x-2) \leq 0.$$

Según el método reducido, la desigualdad tiene como conjunto solución:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{3} \text{ ó } 1 < x < 2 \right\}.$$



### Ejercicios resueltos

1. Demuestre que si  $x \leq y$ ,  $a \leq b$  entonces  $x + a \leq b + y$ .

**Solución:** Como  $x \leq y$  y  $a \in \mathbb{R}$  por teorema 1.1.19  $x + a \leq y + a$ .

Por otro lado, como  $a \leq b$  e  $y \in \mathbb{R}$  por teorema 1.1.19  $a + y \leq b + y$ .

Por teorema 1.1.18 (iii), (transitividad de  $\leq$ ), concluimos que  $x + a \leq b + y$ .

2. Demuestre que si  $0 \leq x \leq y$  y  $0 \leq a \leq b$ , entonces  $ax \leq by$ .

**Solución:** Procediendo análogamente al ejercicio resuelto 1, por teorema 1.1.20 (i)  $ax \leq ay$  y  $ay \leq by$ . Por transitividad (teorema 1.1.18 (iii)) concluimos que  $ax \leq by$ .

3. Demuestre que, si  $0 < a < b$ , entonces  $b^{-1} < a^{-1}$ .

**Solución:** Primero observemos que  $a^{-1} - b^{-1} = (ab)^{-1}(b - a)$  (ver ejercicio 1.2.??). Luego, como

$$\begin{aligned} a > 0, b > 0 &\implies ab > 0 \text{ por teorema 1.1.22} \\ &\implies (ab)^{-1} > 0 \text{ por teorema 1.1.21} \end{aligned}$$

Como  $a < b \implies b - a > 0$  (por definición 1.1.12), luego  $(ab)^{-1}(b - a) > 0$  por teorema 1.1.22. Por lo tanto,  $a^{-1} - b^{-1} > 0 \implies b^{-1} < a^{-1}$ .

4. Demuestre que, si  $0 < a < b$ , entonces  $a^2 < b^2$ .

**Solución:** Como  $b - a$  y  $b + a$  son positivos por hipótesis, entonces  $(b - a)(b + a) = b^2 - a^2 > 0$  por teorema 1.1.22, luego  $a^2 < b^2$ .

5. Demuestre que si  $a \in \mathbb{R}$  es tal que  $0 \leq a < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , entonces  $a = 0$ .

**Solución:** Supongamos por contradicción que  $a \neq 0$ . Luego como  $a \geq 0$  y  $a \neq 0$ , entonces  $a > 0$  por definición 1.1.17. Usando el teorema 1.1.26 con  $a = 0$  y  $b = a$  tenemos que existe

$c = \frac{a+b}{2} = \frac{0+a}{2} = \frac{a}{2}$  tal que  $0 < \frac{a}{2} < a$ . Ahora si tomamos  $\varepsilon = \frac{a}{2}$  concluimos que  $\varepsilon < a$ , lo que contradice la hipótesis. Luego, la suposición inicial es falsa y  $a = 0$ .

6. Demuestre que, si  $x > 0$ , entonces  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

**Solución:** Previamente observemos que:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geq 2 &\iff x^2 + 1 \geq 2x \\ &\iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\iff (x - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, por teorema (1.1.24) sabemos que  $(x - 1)^2 \geq 0$  y por el ejercicio de repaso 1,  $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$ . Por teorema 1.1.19,  $x^2 + 1 \geq 2x$ , como  $x > 0 \implies x^{-1} > 0$  y multiplicando por  $x^{-1}$  obtenemos  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

7. Demuestre que, si  $a, b, c$  son no negativos y no todos iguales, entonces

$$(a + b + c)(bc + ca + ab) > 9abc.$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}(a + b + c)(bc + ca + ab) - 9abc &= a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc \\ &= a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2.\end{aligned}$$

Como  $a, b, c$  no son todos iguales, al menos uno de los términos  $b - c$ ,  $c - a$ ,  $a - b$  es distinto de cero y como todo cuadrado es no negativo y  $a, b, c \geq 0$ , entonces resulta la desigualdad buscada.

8. Determine el conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 2\}$ .

**Solución:**

■ **Método axiomático**

$$\begin{aligned}x^2 + x > 2 &\iff x^2 + x - 2 > 0 \text{ por teorema 1.1.19} \\ &\iff (x + 2)(x - 1) > 0 \\ &\iff [(x + 2) > 0 \text{ y } (x - 1) > 0] \text{ o } [(x + 2) < 0 \text{ y } (x - 1) < 0]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si } x + 2 > 0 \text{ y } x - 1 > 0 &\iff x > -2 \text{ y } x > 1 \text{ por teorema 1.1.19} \\ &\iff x > 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si } x + 2 < 0 \text{ y } x - 1 < 0 &\iff x < -2 \text{ y } x < 1 \\ &\iff x < -2\end{aligned}$$

Por tanto  $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \text{ o } x < -2\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$ .

- **Método reducido.** Una vez factorizado el polinomio y ubicadas sus raíces en la recta real, se recorre  $\mathbb{R}$  en el sentido de su orden obteniéndose rápidamente el signo del polinomio en los distintos subintervalos de  $\mathbb{R}$  determinados por sus raíces.



9. Determine el conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R} : (2x + 1)/(x + 2) < 1\}$ .

**Solución:** Claramente la expresión  $(2x + 1)/(x + 2)$  no está definida para  $x = -2$  luego  $-2 \notin A$ .

■ **Método axiomático**

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+2} < 1 &\iff \frac{2x+1}{x+2} - 1 < 0, \text{ por teorema 1.1.19} \\ &\iff \frac{x-1}{x+2} < 0 \\ &\iff (x-1)(x+2) < 0 \\ &\iff [x-1 > 0 \text{ y } x+2 < 0] \\ &\quad \text{o } [x-1 < 0 \text{ y } x+2 > 0] \text{ por teorema 1.1.23} \end{aligned}$$

Si  $x-1 > 0$  y  $x+2 < 0 \iff x > 1$  y  $x < -2$  (por teorema 1.1.19), sin embargo no existe  $x \in \mathbb{R}$  que satisfaga ambas condiciones.

Si  $x-1 < 0$  y  $x+2 > 0 \iff x < 1$  y  $x > -2$  (por teorema 1.1.19). Por tanto  $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 1\}$ .

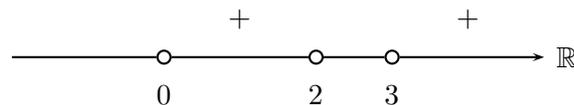
■ **Método reducido**



10. Resolver la desigualdad:  $x(x^2 - 5x + 6) > 0$ .

**Solución:**

$x(x^2 - 5x + 6) = x(x-2)(x-3)$ , aplicando el método reducido, tenemos que la desigualdad se satisface para los  $x$  tales que:  $0 < x < 2$  ó  $x > 3$ .

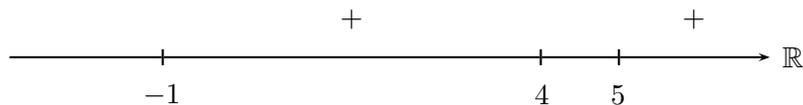


11. Resolver la desigualdad:  $(x-2)(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4x - 5) > 0$ .

**Solución:**

Como  $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$  y  $x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} (x-2)(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4x - 5) &= (x-2)(x-2)(x-4)(x+1)(x-5) \\ &= (x-2)^2(x-4)(x+1)(x-5). \end{aligned}$$



El factor que aparece elevado al cuadrado no influye en el signo del producto, por tanto, nuevamente se puede aplicar el método reducido y obtenemos que la desigualdad se satisface para los  $x$  tales que:  $-1 < x < 4$  ó  $x > 5$  y  $x \neq 2$ .

12. Resolver  $\frac{x-1}{x+2} > 0$ .

**Solución:** Como  $a = a' = 1$  tenemos  $aa' > 0$ , por ejercicio resuelto 4, los valores buscados son  $x < -2$  ó  $x > 1$ .

Compare con el ejercicio resuelto 9.

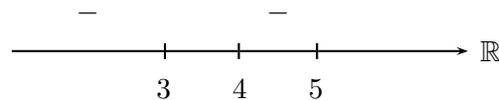
13. Resolver  $\frac{x^2 - 8x + 15}{x - 4} < 0$ .

**Solución:**

Suponiendo  $x \neq 4$ , multiplicamos la desigualdad por  $(x-4)^2$  y la transformamos en:

$$(x^2 - 8x + 15)(x - 4) < 0.$$

$$(x^2 - 8x + 15)(x - 4) = (x - 3)(x - 4)(x - 5) < 0.$$



Según el método reducido se obtiene que la desigualdad se satisface para  $x < 3$  ó  $4 < x < 5$ .

14. Resolver  $3 + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{2x+1}$ .

**Solución:** Efectuando la suma del primer miembro  $3 + \frac{1}{x-1} = \frac{3x-2}{x-1}$ , la desigualdad queda como

$$\frac{3x-2}{x-1} > \frac{1}{2x+1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{x-1} - \frac{1}{2x+1} &= \frac{(3x-2)(2x+1) - (x-1)}{(x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{6x^2 - x - 2 - x + 1}{(x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{6x^2 - x + 1}{(x-1)(2x+1)} > 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la desigualdad por  $(x-1)^2(2x+1)^2$  tenemos:

$$(6x^2 - x + 1)(x - 1)(2x + 1) > 0.$$

El polinomio  $6x^2 - x + 1$  tiene discriminante negativo y por lo tanto, es positivo para cualquier valor de  $x$ . Así, la desigualdad se reduce a:  $(x - 1)(2x + 1) > 0$ . Usando el método reducido tenemos que el conjunto solución es:

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1/2\}.$$

15. Resolver el sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\leq \frac{2}{3 - x} & y \\ 6x - 5 &< 9x + 1. \end{aligned}$$

**Solución:**

$2x - 1 \leq \frac{2}{3 - x}$  implica  $2x - 1 - \frac{2}{3 - x} \leq 0$ .  $\frac{(2x - 1)(3 - x) - 2}{3 - x} \leq 0$ . Efectuando el producto y reduciendo términos semejantes, nos queda:

$$\frac{-2x^2 + 7x - 5}{3 - x} \leq 0.$$

$$\frac{-(2x^2 - 7x + 5)}{-(-3 + x)} \leq 0.$$

$$\frac{(2x^2 - 7x + 5)}{(x - 3)} \leq 0.$$

Multiplicando la desigualdad por  $(x - 3)^2$ , con  $x \neq 3$ ,

$$(2x^2 - 7x + 5)(x - 3) \leq 0.$$

$$2 \left( x^2 - \frac{7}{2} + \frac{5}{2} \right) (x - 3) \leq 0,$$

Factorizando el factor de segundo grado podemos obtener una expresión a la cual aplicar el método del ejercicio 3.

$$2 \left( (x - 1) \left( x - \frac{5}{2} \right) \right) (x - 3) \leq 0.$$

Utilizando el método reducido con tres factores tenemos que la solución de la primera desigualdad es:

$$x \leq 1 \quad \text{ó} \quad \frac{5}{2} \leq x < 3.$$

Para completar el ejercicio debemos encontrar la solución a la segunda desigualdad e intersectar los conjuntos solución .

$$\begin{aligned} 6x - 5 &< 9x + 1 \\ 6x - 9x &< 1 + 5 \\ -3x &< 6 \\ x &> -2. \end{aligned}$$

La solución al sistema es :

$$-2 < x \leq 1 \quad \text{ó} \quad \frac{5}{2} \leq x < 3.$$

16. Si  $x \in \mathbb{R}^-$ , resuelva la desigualdad  $(x - 4)^2 \leq (2x + 1)^2$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} (x - 4)^2 &\leq (2x + 1)^2 \\ (x - 4)^2 - (2x + 1)^2 &\leq 0 \\ [(x - 4) + (2x + 1)][(x - 4) - (2x + 1)] &\leq 0 \\ (3x - 3)(-x - 5) &\leq 0 \\ (3x - 3)(x + 5) &\geq 0 \\ 3(x - 1)(x + 5) &\geq 0. \end{aligned}$$

Así tenemos:

$$[x - 1 \geq 0 \text{ y } x + 5 \geq 0] \quad \text{ó} \quad [x - 1 \leq 0 \text{ y } x + 5 \leq 0]$$

Esto es:

$$[x \geq 1 \text{ y } x \geq -5] \quad \text{ó} \quad [x \leq 1 \text{ y } x \leq -5].$$

finalmente,

$$x \geq 1 \quad \text{ó} \quad x \leq -5.$$

Teniendo en cuenta que sólo debemos encontrar soluciones negativas, tenemos que  $x \leq -5$  satisface el enunciado.

**Ejercicios propuestos**

1. Demuestre el teorema 1.1.20 (ii).
2. Demuestre el teorema 1.1.21 (iv).
3. Demuestre el teorema 1.1.23.
4. Demuestre que, si  $a > 1$ , entonces  $a^2 > a$ .
5. Demuestre que si  $a < b$  y  $c < d$ , entonces  $ad + bc < ac + bd$ .
6. Demuestre que si  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $a^2 + b^2 = 0$  si y sólo si  $a = 0$  y  $b = 0$ .
7. Demuestre que si  $0 \leq a < b$ , entonces  $a^2 \leq ab < b^2$ .
8. Demuestre que si  $a, b, c, d$  son números positivos tales que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , entonces

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

9. Demuestre que si  $0 < a < b$  y  $0 < c < d$ , entonces

$$\frac{a+b}{2} \frac{c+d}{2} < \frac{ac+bd}{2}.$$

**Indicación:** Para comenzar observe que  $\left(\frac{b-a}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{d-c}{2}\right)$  y su producto son números positivos.

10. Si  $a, b, c$  son números positivos, demuestre que  $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$  y que  $(a+b)(b+c)(a+c) > 8abc$ .
11. Demuestre que si  $a, b > 0$ , entonces

$$2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

12. Use el ejercicio anterior para demostrar que si  $a, b, c > 0$ , entonces

$$4 \leq (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

y

$$9 \leq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Además, demuestre que  $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) > 6abc$ .

13. Demuestre que

$$x^3 + \frac{1}{x^3} \geq x^2 + \frac{1}{x^2}$$

para todo  $x > 0$ . ¿Cuándo se cumple la igualdad ?

14. Demuestre que si  $a, b, c$  son números reales fijos con  $a > 0$ , el menor valor del polinomio cuadrático  $Q(x) = ax^2 + 2bx + c$  es  $(ac - b^2)/a$ . De saberse que  $Q(x) \geq 0$  para todo número real  $x$ , ¿qué podría concluirse de los coeficientes  $a, b, c$  ?

15. Demuestre que si  $x < 0$ , entonces  $x + \frac{1}{x} \leq -2$ .

16. Determine el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : (x + 1)(x - 2) > 0\}$ .

17. Determine el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : (x + 1)(2 - x) > 0\}$ .

18. Determine el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : (4x - 7)(x + 2) < 0\}$ .

19. Determine el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : (3x - 8)(3x + 8) < 0\}$ .

20. Determine el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - x - 15 < 0\}$ .

21. Resuelva la desigualdad  $-6 + 7x - 2x^2 > 0$ .

22. Resuelva la desigualdad  $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 2} > 0$ .

23. Resuelva la desigualdad  $\frac{2 - x}{x^2 + 3x + 2} \geq 0$ .

24. Si  $a > 0$  resuelva  $\frac{x - a}{x + a} \geq 0$ .

25. Resuelva la desigualdad  $2x^3 - 3x^2 \geq 0$ .

26. Resuelva la desigualdad  $\frac{x^2 - 4}{x} \leq 0$ .

27. Determine el conjunto  $\{m \in \mathbb{R} : mx^2 + (m - 1)x + (m - 1) < 0 ; \forall x \in \mathbb{R}\}$ .

28. Resuelva la desigualdad  $4x^4 - 12x^2 + 9 < 0$ .

29. Resuelva la desigualdad  $\frac{x}{x + 2} \geq 0$ .

30. Resuelva la desigualdad  $\frac{2}{x} - \frac{2 - x}{x - 1} \leq 1$ .

31. Resuelva la desigualdad  $\frac{1-2x}{x+3} \leq -1$ .

32. Resuelva la desigualdad  $\frac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8} \leq -1$ .

33. Resuelva la desigualdad  $\frac{x^3-9}{x-2} \geq 0$ .

34. Resuelva la desigualdad  $\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2} \leq 0$ .

35. Resuelva el sistema de desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{1-2x}{x+3} &\leq -1 \\ \frac{x}{3} - 4 &\leq \frac{x}{4} - 3. \end{aligned}$$

36. Resuelva el sistema de desigualdades

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 &\leq 0 \\ x^2 - x &\leq 0. \end{aligned}$$

37. Resuelva el sistema de desigualdades

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &\geq 0 \\ x^3 - x^2 + 2x &\geq 0. \end{aligned}$$

#### 1.1.4. Una distancia en $\mathbb{R}$ : el valor absoluto

Los axiomas de orden nos permiten comparar números reales y gracias a la densidad de  $\mathbb{R}$  sabemos que si  $a < b$ , entre ellos podemos insertar una infinidad de números reales distintos. Esto puede hacer perder la perspectiva de cuán lejos o cercanos están estos números. Aun cuando el estar cerca o lejos es una cuestión relativa al problema concreto en que estamos involucrados, es útil tener un método para poder discernir en cada caso. Para ello se define una distancia en  $\mathbb{R}$  eligiendo como punto de referencia, en principio, el cero. Esta idea la realiza el llamado *valor absoluto* de un número.

**Definición 1.1.30** Llamaremos **valor absoluto** del número  $a \in \mathbb{R}$ , denotado por  $|a|$  al número:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Existen formas equivalentes de definir el valor absoluto.

Por ejemplo  $|a| = \max\{a, -a\}$  o  $|a| = \sqrt{a^2}$ .

La definición 1.4.1 nos dice en particular que  $|0| = 0$ ,  $|4| = 4$ ,  $|-4| = 4$ . En general, podemos apreciar que

el número  $a$  y su inverso aditivo  $-a$  están a igual distancia del cero. Usando algunas consecuencias del orden de  $\mathbb{R}$ , sabemos que todo número negativo es menor que uno positivo. Así, podemos hacer el siguiente gráfico:



Figura 1.4.1: Valor absoluto

Todavía no hay ninguna razón, que pueda deducirse de los axiomas, para pensar a  $\mathbb{R}$  como el continuo geométrico de una línea recta.

**Teorema 1.1.31** (i)  $|a| \geq 0$ .

(ii)  $|a| = |-a|$ .

(iii)  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

(iv)  $|a| = 0 \iff a = 0$ .

(v)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ .

(vi) Si  $b \geq 0$ ,  $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$ .

(vii) Si  $b \geq 0$ ,  $|a| \geq b \iff a \geq b$  ó  $a \leq -b$ .

(viii)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (desigualdad triangular).

**Demostración:**

(i) Si  $a \in \mathbb{R}$ , por tricotomía tenemos las posibilidades:  $a > 0$  o  $a = 0$  o  $a < 0$ . Analicemos cada una de ellas.

- Si  $a > 0$  entonces  $|a| = a > 0$
- Si  $a = 0$  entonces  $|0| = 0$
- Si  $a < 0$  entonces  $-a = |a| > 0$

Así en todos los casos  $|a| \geq 0$

(ii) Nuevamente, y así se recomienda en toda demostración relativa al valor absoluto, separaremos los casos usando el axioma de tricotomía.

- Si  $a > 0$  entonces  $-a < 0$ , por tanto:  $|a| = a$  y  $|-a| = -(-a) = a$ , por teorema 1.1.2. Así, en este caso se cumple  $|a| = |-a|$
- Si  $a = 0$  entonces  $|0| = |-0| = 0$
- Si  $a < 0$  entonces  $-a > 0$ , por tanto:  $|a| = -a$ ,  $|-a| = -a$  y así vemos que también se tiene en este caso,  $|a| = |-a|$ .

(iii) Si  $a \geq 0$  entonces  $|a| = a$ . Además, siendo  $a$  positivo ( $-a$ ) es negativo o cero, por tanto  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

Si  $a < 0$  entonces  $|a| = -a$  y  $-a > 0$ . Por tanto  $a < -a$  y tenemos que  $-|a| = a < -a = |a|$ , cumpliéndose también en este caso la propiedad.

(iv) ( $\Leftarrow$ ) Si  $a = 0$ , por definición  $|a| = |0| = 0$

( $\Rightarrow$ )  $a \in \mathbb{R}$ , por tricotomía  $a > 0$  ó  $a < 0$  o  $a = 0$ . Para tener la conclusión debemos descartar las posibilidades  $a > 0$  y  $a < 0$ .

- Si  $a > 0$  entonces  $|a| = a > 0$ , lo que contradice la hipótesis, por tanto no puede darse  $a > 0$ .
- Si  $a < 0$  entonces  $|a| = -a > 0$ , también contradice la hipótesis.

Así, lo único posible es que  $a = 0$ .

(v) Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , por tricotomía se tiene que  $(a \cdot b > 0)$  ó  $(a \cdot b = 0)$  ó  $(a \cdot b < 0)$ .

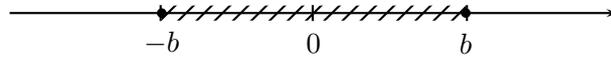
- Si  $a \cdot b > 0$  entonces por teorema 1.1.22,  $(a > 0$  y  $b > 0)$  ó  $(a < 0$  y  $b < 0)$ . Por definición de valor absoluto se tiene:  $|a \cdot b| = a \cdot b$  y para la primera posibilidad  $|a| = |a|$  y  $|b| = b$ , por lo que  $|a| \cdot |b| = a \cdot b$ , cumpliéndose el teorema. Si se da la segunda posibilidad, entonces  $|a| = -a$  y  $|b| = -b$  así  $|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ . Nuevamente obtenemos la conclusión.
- Si  $a \cdot b = 0$  entonces por teorema 1.1.5,  $a = 0$  o  $b = 0$ , entonces  $|a \cdot b| = 0 = |a| \cdot |b|$ .
- Si  $a \cdot b < 0$  se deja como ejercicio, pues es análoga al caso  $a \cdot b > 0$ .

(vi) ( $\Rightarrow$ ) ◦ Si  $a \geq 0$  entonces  $|a| = a$  y por hipótesis  $|a| \leq b$  lo que implica que  $a \leq b$ . Como  $b \geq 0$  entonces  $-b \leq 0$  y por tanto  $-b \leq a \leq b$ .

◦ Si  $a < 0$  entonces  $|a| = -a$  y por hipótesis  $-a \leq b$  y como  $-a \geq 0$  y  $-b \leq 0$  se tiene  $-b \leq a \leq -a \leq b$ , es decir,  $-b \leq a \leq b$ .

( $\Leftarrow$ ) ◦ Si  $a \geq 0$  entonces  $|a| = a$ . Por hipótesis  $|a| \leq b$ .

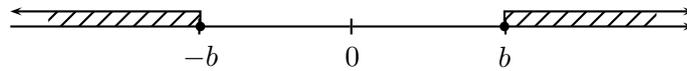
- o Si  $a < 0$  entonces  $|a| = -a$ . Por hipótesis  $-a \leq b$  y por tanto  $|a| \leq b$ .



Distancia al cero menor o igual a  $b$ .

- (vii) ( $\Rightarrow$ ) Supongamos  $|a| \geq b$ . Si  $a \geq 0$  entonces  $|a| = a$  y por tanto  $a \geq b$ . Si en cambio  $a < 0$ , entonces  $|a| = -a$  y en este caso  $-a \geq b$ , por teorema 1.1.20,  $a \leq -b$ .

( $\Leftarrow$ ) Es análoga a la correspondiente implicación de (vi).



Distancia al cero mayor o igual a  $b$ .

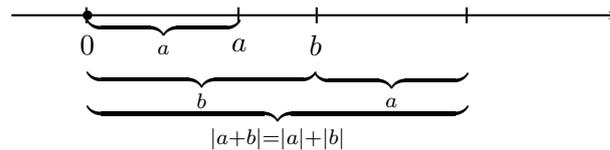
- (viii) En virtud de (vi), demostrar (viii) es equivalente a demostrar:  $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ , que es lo que haremos.

Por (iii)

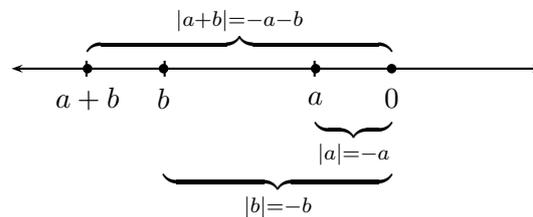
$$\begin{aligned} -|a| &\leq a \leq |a| \\ -|b| &\leq b \leq |b| \end{aligned}$$

sumando miembro a miembro ambas desigualdades se obtiene (viii).

- Si  $a$  y  $b$  son positivos.



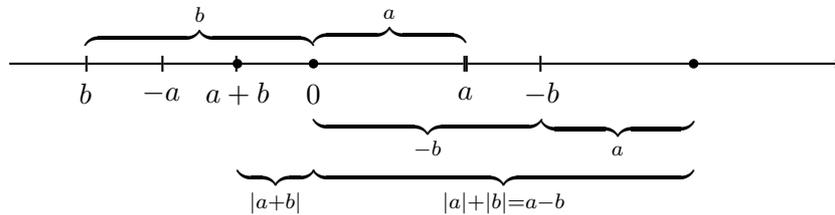
- Si  $a$  y  $b$  son negativos.



$|a + b| =$  distancia al cero de  $a + b = -a - b$ .

- Si  $a$  y  $b$  tienen distintos signos.

$$a > 0, b < 0$$



$$|a + b| < |a| + |b|.$$



### Ejercicios resueltos

1. Analice en qué casos la desigualdad triangular se transforma en una igualdad.

**Solución:** (i) Si  $a$  y  $b$  son números positivos,  $a + b$  es positivo, entonces tenemos:

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

(ii) Si  $a$  y  $b$  son números negativos,  $a + b$  es negativo, entonces tenemos:

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$$

(iii) Si  $a$  y  $b$  tienen signos diferentes, la desigualdad es una desigualdad estricta. Por ejemplo, si  $a = -4$  y  $b = 2$ , entonces  $|a + b| = |(-4) + 2| = |-2| = 2$ , en cambio,  $|a| + |b| = 4 + 2 = 6$

2. Demuestre que  $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$ .

**Solución:** Aplicando la desigualdad triangular tenemos,  $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ . Luego  $|a| - |b| \leq |a - b|$ . Análogamente  $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$  por desigualdad triangular y teorema 1.1.31 (ii). Entonces  $-|a - b| \leq |a| - |b|$ . Por tanto, de estas dos desigualdades y el teorema 1.1.31 (vi) concluimos que  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .

Finalmente,  $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$  por desigualdad triangular y teorema 1.1.31 (ii).

3. Resuelva la ecuación  $|x - 1| = 3$ .

**Solución:** Por definición de valor absoluto  $|x - 1| = 3$  implica  $x - 1 = \pm 3$ . Si  $x - 1 = 3$ , tenemos  $x = 4$ .

Si  $x - 1 = -3$ , tenemos  $x = -2$ .

4. Resuelva la ecuación  $|3x - 5| + 3 = 0$ .

**Solución:** Como el valor absoluto no toma valores negativos, la ecuación propuesta no tiene solución.

5. Resuelva la ecuación  $|x + 2| = |x - 4|$ .

**Solución:** Debemos analizar dos casos: **Primer caso.** Las cantidades entre barras tienen el mismo signo, entonces  $x + 2 = x - 4$ , por tanto,  $2 = -4$ . Como esto es imposible, en este caso no hay solución. **Segundo caso.** Las cantidades entre barras tienen distinto signo, entonces  $x + 2 = -(x - 4) = -x + 4$ , por tanto,  $x = 1$ .

6. Resuelva la ecuación  $|x^2 - 4x| = 4|x - 4|$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} |x^2 - 4x| &= 4|x - 4| \\ |x(x - 4)| &= 4|x - 4| \\ |x|(x - 4) &= 4|x - 4| \\ \text{Así, } |x| &= 4, \text{ si } x \neq 4. \end{aligned}$$

Luego,  $x = -4$  es una solución y la otra es  $|x - 4| = 0$ . esto es  $x = 4$ .

7. Determine el conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 3| \leq 6\}$ .

**Solución:** Si  $|2x + 3| \leq 6$  por teorema 1.1.31 (vi) tenemos que  $-6 \leq 2x + 3 \leq 6 \iff -9 \leq 2x \leq 3 \iff -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ .

Por lo tanto,  $A = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$ .

8. Resuelva la inecuación  $|5x - 8| > 4$ .

**Solución:** Por teorema ref1.4.2 (vii), tenemos que:

$$\begin{aligned} 5x - 8 > 4 &\text{ o } 5x - 8 < -4 \\ 5x > 12 &\text{ o } 5x < 4 \\ x > \frac{12}{5} &\text{ o } x < \frac{4}{5} \end{aligned}$$

9. Resuelva la inecuación  $|x - 4| \geq |2x - 1|$ .

**Solución:** Como las expresiones entre barras cambian de signo cuando  $x = 4$  y cuando  $x = \frac{1}{2}$ , analizaremos las distintas posibilidades que esto implica.

Si  $x \leq \frac{1}{2}$ , ambas expresiones son negativas, entonces la desigualdad queda como

$$-(x - 4) \geq -(2x - 1),$$

que da los valores  $x \geq -3$ . Por tanto, tenemos que  $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

Si  $\frac{1}{2} < x < 4$ , las expresiones entre barras tienen distintos signos y nos queda la desigualdad:

$$2x - 1 \leq 4 - x,$$

que tiene solución  $x \leq \frac{5}{3}$ . Junto a la suposición bajo la cual estamos trabajando, da la solución  $\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{3}$ .

Si  $x > 4$ , ambas expresiones son positivas y la desigualdad toma la forma:

$$x - 4 \geq 2x - 1.$$

Lo que implica  $-3 \geq x$  que es incompatible con  $x > 4$ , por tanto, en este caso no hay solución.

En síntesis, la desigualdad dada tiene por solución  $-3 \leq x \leq \frac{5}{3}$ .

10. Determine el conjunto  $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq |x|\}$ .

**Solución:**

Si  $|x - 1| \leq |x|$  por teorema 1.1.31 (vi), entonces  $-|x| \leq x - 1 \leq |x|$ . Luego,  $B = B_1 \cap B_2$  donde  $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x - 1\}$  y  $B_2 = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \leq |x|\}$ .

Si  $-|x| \leq x - 1$ , entonces  $|x| \geq 1 - x$ . Luego, por teorema 1.1.31 (vii)  $x \geq 1 - x$  o  $x \leq -(1 - x) = x - 1$ , es decir,  $2x \geq 1$  o  $1 \leq 0$ . Por tanto, sólo tenemos que  $2x \geq 1 \iff x \geq \frac{1}{2}$ . (¿ Por qué ?). Luego,  $B_1 = \{x \in \mathbb{R} ; x \geq \frac{1}{2}\}$ . Si  $x - 1 \leq |x|$  por teorema 1.1.31 (vii),  $x - 1 \leq x$  ó  $x \leq -(1 - x)$  lo que es equivalente a  $0 \leq 1$  o  $1 \leq 0$ .

La primera proposición es verdadera y esto implica que  $x - 1 \leq x$  se cumple para todo  $x \in \mathbb{R}$ . La segunda es falsa, es decir no existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq -1 + x$ . La unión de ambos conjuntos solución dice que esta proposición es verdadera para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Luego  $B = \mathbb{R}$ .

11. Resuelva la desigualdad  $|x + \frac{1}{x}| \geq 4$ .

**Solución:** Si  $x \neq 0$ ,  $|x + \frac{1}{x}| = \frac{|x^2 + 1|}{|x|} = \frac{x^2 + 1}{|x|}$ , pues  $x^2 + 1$  es positivo para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por tanto, la desigualdad enunciada se puede escribir como  $\frac{x^2 + 1}{|x|} \geq 4$ . Multiplicando la desigualdad por  $|x|$ , obtenemos:

$$x^2 + 1 \geq 4|x|,$$

lo que da origen a dos desigualdades:

a)  $x^2 - 4x + 1 \geq 0$ , si  $x > 0$ .

b)  $x^2 + 4x + 1 \geq 0$ , si  $x < 0$ .

Ambas deben ser resueltas con el método del ejercicio 2 de la sección 1.3.

12. Si  $a, b, c$  son números dados tales que  $a < b < c$ . Encuentre los distintos valores que puede tomar  $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ .

**Solución:**

- Si  $x \leq a$ , todas las expresiones entre barras son negativas o nulas, por tanto,

$$f(x) = -(x - a) - (x - b) - (x - c) = -3x + a + b + c.$$

- Si  $a < x \leq b$ ,

$$f(x) = x - a - (x - b) - (x - c) = -x - a + b + c.$$

- Si  $b < x \leq c$ ,

$$f(x) = x - a + x - b - (x - c) = x - a - b + c.$$

- Si  $x > c$ ,

$$f(x) = x - a + x - b + x - c = 3x - a - b - c.$$

13. Escriba  $f(x) = |x + 1| + |x - 1| - 2|x|$  sin que aparezcan los signos del valor absoluto.

**Solución:** Siguiendo un procedimiento similar al del ejercicio 12, obtenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2 - 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

14. Sea  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{2x - 1}$  para  $2 \leq x \leq 3$ .

Encuentre una constante  $M$  de modo que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x$  tal que  $2 \leq x \leq 3$ .

**Solución:** Como  $|f(x)| = \frac{|2x^2 - 3x - 1|}{|2x - 1|}$ . Por la desigualdad triangular

$$|2x^2 - 3x - 1| \leq 2|x^2| + 3|x| + 1 \leq 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 28$$

ya que  $|x| \leq 3$ . Por otro lado,

$|2x - 1| \geq 2|x| - 1 \geq 2 \cdot 2 - 1 = 3$ , ya que  $|x| \geq 2$ . Luego  $\frac{1}{|2x - 1|} \leq \frac{1}{3}$  para  $x \geq 2$ .

Por lo tanto,  $|f(x)| \leq \frac{28}{3}$ .

Luego, podemos escoger  $M = \frac{28}{3}$ . Observemos que cualquier  $M > \frac{28}{3}$  resuelve el problema, y es probable que  $\frac{28}{3}$  no sea la elección mínima posible para  $M$ .

15. Resuelva  $\left| \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1} \right| \leq 1$ .

**Solución:**  $\left| \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1} \right| = \left| \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x-1)} \right| = \left| \frac{x-3}{x-1} \right|$ , cuando  $x \neq 1$ . Por tanto la desigualdad se reduce a:

$$|x - 3| \leq |x - 1|, \text{ la que es equivalente a } |x - 3| \leq |x - 1|.$$

Analizaremos los distintos casos: Si  $x \leq 1$ , ambas expresiones entre barras son negativas, por lo cual tenemos:

$$-(x - 3) \leq -(x - 1).$$

Esto implica  $3 \leq 1$ , como esto es imposible, no hay solución en este caso.

Si  $1 < x \leq 3$ , las expresiones entre barras tienen signos distintos, por tanto:

$$-x + 3 \leq x - 1.$$

Lo que nos da  $2 \leq x$  que junto a la suposición  $1 < x \leq 3$  nos da  $2 \leq x \leq 3$ . El último caso por analizar es  $x > 3$ , que conduce a  $-3 \leq -1$ , que se cumple siempre. Así, la solución es  $x \geq 2$ .

**Ejercicios propuestos**

1. Demuestre que  $|a| = \max\{a, -a\} = \sqrt{a^2}$ .
2. Demuestre que si  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces:
  - a)  $|a^2| = a^2$
  - b)  $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$
  - c)  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$  si  $b \neq 0$
  - d)  $|a + b| = |a| + |b|$  si y solo si  $ab \geq 0$
  - e)  $a|b| \leq |ab|$ .
3. Demuestre que,  $y$  está entre  $x$  y  $z$  si y sólo si  $|x - y| + |y - z| = |x - z|$ .
4. Demuestre que si  $a < x < b$  y  $a < y < b$ , entonces  $|x - y| < b - a$ .

En los siguientes ejercicios encuentre los  $x \in \mathbb{R}$  que satisfacen las siguientes desigualdades:

5.  $|4x - 5| = 13$
6.  $|4x - 5| \leq 13$
7.  $|x^2 - 1| = 3$
8.  $|x^2 - 1| \leq 3$
9.  $|x - 1| = |x + 1|$
10.  $|x - 1| > |x + 1|$
11.  $2|x| + |x - 1| = 2$
12.  $|x| + |x + 1| < 2$
13.  $\left|\frac{x^2 - 1}{x + 1}\right| \leq 3$ .
14.  $\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right| \leq 3$ .
15.  $\left|\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}\right| \leq 5$ .

$$16. \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} \right| < 2.$$

$$17. \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} \right| = 2.$$

$$18. \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} \right| > 2.$$

19. Si  $f(x) = |x - 2| + |1 - 2x|$ . Encuentre una expresión para  $f(x)$  que no contenga valores absolutos.

20. Si  $x = 8a + 4b - 3$  ,  $y = 5a + 13b + 4$

$20,84 < a < 20,85$  y  $-5,64 < b < -5,63$ . Encuentre números  $K$ ;  $M$  tales que:

$$|x + y| < K \text{ y } |x - y| < M.$$

21. Encuentre el valor máximo de  $y$  de modo que para todo  $x$  se cumpla:

$$|x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n| \geq y,$$

con  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . ¿Cuándo se cumple la igualdad ?

22. Demuestre que si  $|x| < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , entonces  $x = 0$ .

23. Si  $d(x, y) = |x - y|$  representa la "distancia entre  $x$  e  $y$ ". Demuestre que

$$a) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$c) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$$d) \quad \text{Encuentre el conjunto } A = \{y \in \mathbb{R} : d(y, \frac{1}{2}) \leq 3\}.$$

$$e) \quad \text{Encuentre el conjunto } B = \{y \in \mathbb{R} : d(y, -4) < 5\}.$$

$$f) \quad \text{Dados } x_0, r \in \mathbb{R}, \text{ encuentre el conjunto } C = \{y \in \mathbb{R} : d(y, x_0) < r\}.$$

### 1.1.5. La continuidad de $\mathbb{R}$ : el axioma del supremo

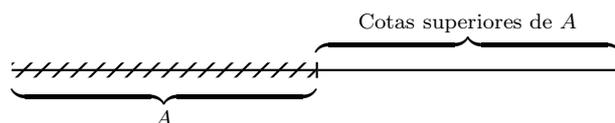
Con el Axioma del Supremo se completa el conjunto de axiomas que caracterizan totalmente a  $\mathbb{R}$ , es decir,  $\mathbb{R}$  es el único conjunto que verifica los axiomas de Cuerpo, de Orden y el Axioma del supremo.

Las consecuencias de mayor trascendencia del Axioma del Supremo son la existencia de números irracionales y la propiedad arquimediana de los números reales.

De los axiomas de cuerpo solamente puede deducirse, en primera instancia, la existencia de al menos dos números distintos el **0** y el **1**. La suma de **unos** da origen a los números naturales. La resta de números naturales da origen a los números enteros y finalmente la división de enteros genera la aparición de los números racionales. En síntesis, para tener el conjunto de los números racionales bastan los axiomas de cuerpo y orden. Pero, estos números no son suficientes para la construcción del cálculo diferencial e integral cuyos conceptos básicos necesitan la continuidad de los números reales. Esta propiedad de  $\mathbb{R}$  la proporciona el **Axioma del supremo**. En particular, para tener una idea intuitiva de esto, solamente podemos pensar  $\mathbb{R}$  como un continuo geométrico: la recta numérica, lo que se obtiene una vez que al conjunto de los números racionales se le agregan los números irracionales que pueden ser concebidos como supremos de ciertos conjuntos de números racionales.

**Definición 1.1.32** Si  $A$  es un conjunto de números reales, entonces  $y$  es una **cota superior** de  $A$  si y sólo si  $y$  es un número real y para cada  $x \in A, x \leq y$ .

- Ejemplo 1.1.33**
1. El conjunto  $\{2, 4, 6, 8, 10\}$  es acotado superiormente por cualquier número mayor o igual a 10.
  2. El conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$  es acotado superiormente por cualquier número mayor o igual a 3.
  3. El conjunto  $\{x^2 + 1, -1 \leq x \leq 1\}$  es acotado superiormente por cualquier número mayor o igual a 2.



Una observación importante es que si un conjunto tiene una cota superior entonces existen infinitas cotas superiores del conjunto. Por lo tanto, tiene sentido la siguiente definición.

**Definición 1.1.34** Si  $A$  es un conjunto de números reales, el número  $y$  es el **supremo** de  $A$  si y sólo si  $y$  es una cota superior de  $A$  y para cada  $z$  que es cota superior de  $A$  se tiene  $y \leq z$ . Es decir el supremo es la menor de las cotas superiores.

La definición de supremo, salvo en casos elementales, no es fácil de usar, para fines más prácticos suele usarse la siguiente caracterización del supremo.

**Teorema 1.1.35 Caracterización del supremo**

Si  $A$  es un conjunto de números reales entonces  $y$  es el supremo de  $A$  si y sólo si  $y$  es una cota superior de  $A$  y para cada número real positivo  $\varepsilon$  existe un  $x$  en  $A$  tal que  $y - \varepsilon < x$ .

**Demostración:**

( $\Rightarrow$ ) Sea  $y$  el supremo de  $A$ . Entonces por definición  $y$  es una cota superior.

Sea  $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ . Supongamos por contradicción que no existe  $x \in A$  tal que  $y - \varepsilon < x$ , en tal caso, esto es equivalente a afirmar

que  $x \leq y - \varepsilon$ , para todo  $x$  en  $A$ , por tanto  $y - \varepsilon$  es una cota superior de  $A$  pero  $y - \varepsilon < y$ , lo que contradice la hipótesis que  $y$  es el supremo de  $A$ . Así debe existir al menos un  $x \in A$  mayor que  $y - \varepsilon$ .

( $\Leftarrow$ ) Por hipótesis  $y$  es una cota superior. Para que  $y$  sea el supremo de  $A$ , debe ser la menor de las cotas superiores.

Supongamos que existe una cota superior de  $A$ ,  $z$  menor que  $y$ . Entonces  $z < y$  y  $x < z$  para todo  $x \in A$ . Como  $z < y$  entonces  $y - z > 0$ . Aplicando la hipótesis con  $\varepsilon = y - z$ , tenemos que existe  $x \in A, x > y - (y - z)$ . Es decir, existe  $x \in A$  tal que  $x > z$ . Pero esto contradice que  $z$  es cota superior de  $A$ . La contradicción proviene de suponer la existencia de una cota superior de  $A$  menor que  $y$ . Así,  $y$  es la menor cota superior de  $A$  y, por tanto, su supremo. ■



**Teorema 1.1.36** Un conjunto de números reales puede tener a lo más un supremo.

**Demostración:** Supongamos que un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  tenga dos supremos:  $y, z; y \neq z$ . Más precisamente supongamos  $z < y$ . Como en la demostración del teorema 1.1.35 se tiene  $y - z > 0$ . Tomando este número positivo como un  $\varepsilon$  particular, por definición de supremo podemos concluir que existe  $x \in A$  tal que  $x > y - (y - z)$ , lo que implica que  $x > z$ , que contradice que  $z$  sea supremo de  $A$ . Por tanto, existe a lo más un supremo de un conjunto de números reales. ■

Es interesante observar que el conjunto vacío es acotado superiormente por cualquier número real. Esto se obtiene usando reducción al absurdo. Luego, no existe un número real que sea el supremo del vacío.

**Axioma del Supremo** : Si un conjunto no vacío de números reales tiene una cota superior, entonces tiene supremo en  $\mathbb{R}$ .

Cada una de las definiciones y conclusiones relativas a cotas superiores y supremos tiene un paralelo en la definición de cota inferior e ínfimo. Las demostraciones de los teoremas son totalmente similares a las ya demostradas, por lo que se deja como ejercicio.

**Definición 1.1.37** Si  $A$  es un conjunto de números reales, entonces  $y$  es una **cota inferior** de  $A$  si y sólo si  $y$  es un número real y para cada  $x$  en  $A$ ,  $x \geq y$ .

**Definición 1.1.38** Si  $A$  es un conjunto de números reales, entonces  $y$  es el **ínfimo** de  $A$  si sólo si  $y$  es una cota inferior de  $A$  y para cada  $z$  que es una cota inferior de  $A$ ,  $y \geq z$ . Es decir, el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores.

**Teorema 1.1.39** Si  $A$  es un conjunto de números reales, entonces  $y$  es el ínfimo de  $A$  si y sólo si  $y$  es una cota inferior de  $A$  y para cada número real positivo  $\varepsilon$  existe un  $x$  en  $A$  tal que  $x < y + \varepsilon$ .

**Demostración:** Ejercicio.

**Teorema 1.1.40** Un conjunto de números reales puede tener a lo más un ínfimo .

**Demostración:** Ejercicio.

Observemos que el conjunto vacío es acotado inferiormente por cualquier número real. Luego, no existe un número real que sea el ínfimo del conjunto vacío.

**Teorema 1.1.41** Si un conjunto no vacío de números reales tiene una cota inferior, entonces tiene ínfimo en  $\mathbb{R}$ .

**Demostración:** Ejercicio.

**Definición 1.1.42** Si  $A$  es un conjunto de números reales, entonces  $p$  es el **primer elemento** (respectivamente  $u$  es el **último elemento** ) de  $A$  si y sólo si  $p$  es un elemento de  $A$  y para cada  $x$  en  $A$ ,  $p \leq x$  (respectivamente  $u \in A$ ,  $x \leq u$ ).

**Teorema 1.1.43** Un conjunto de números reales tiene a lo más un único primer elemento (respectivamente último ).

**Teorema 1.1.44** Todo conjunto de números reales que tiene primer (respectivamente último) elemento tiene ínfimo (respectivamente supremo).

**Supremo e ínfimo de conjuntos finitos**

Si  $A$  es un conjunto finito de  $\mathbb{R}$ , entonces podemos contar sus elementos y escribirlo como

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, \dots, a_n\}.$$

Además, podemos ordenarlos y conocer el mayor o último elemento del conjunto que podemos simbolizar como  $\text{máx } A = \text{máx}\{a_i : i = 1, \dots, n\}$ . Análogamente su menor o primer elemento es  $\text{mín } A = \text{mín}\{a_i : i = 1, \dots, n\}$ . En virtud del teorema 1.1.44, el conjunto  $A$  tiene supremo e ínfimo. Es decir, **todo conjunto finito tiene supremo e ínfimo**. Además,

$$\begin{aligned}\sup A &= \text{máx } A \\ \inf A &= \text{mín } A\end{aligned}$$

Así, los conjuntos finitos no son muy interesantes desde el punto de vista de sus supremo e ínfimo.

**Corolario 1.1.45** Si un conjunto contiene una cota superior (respectivamente inferior) entonces ésta es su supremo (respectivamente ínfimo). ■

El recíproco del teorema 1.1.44 es falso. Pues, existen conjuntos de números reales que poseen ínfimo y supremo sin tener primer y/o último elemento. Por ejemplo, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

tiene supremo, pero no último elemento y también tiene ínfimo, sin tener primer elemento. Ver ejercicio. Este ejemplo, además, nos muestra claramente que supremos o ínfimos no son necesariamente elementos del conjunto. Pero si pertenecen al conjunto, son a la vez último o primer elemento según el caso. Esto puede visualizarse en el conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Los casos más importantes de aplicación del Axioma del Supremo son aquellos para los cuales el supremo ( ínfimo) no pertenece al conjunto. Este es el caso en que surgen los números irracionales como supremos o ínfimos de ciertos conjuntos de números racionales.

**Definición 1.1.46** Llamaremos **intervalos acotados** a cualquiera de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} &= ]a, b[ \\ \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} &= ]a, b] \\ \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} &= [a, b[ \\ \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} &= [a, b],\end{aligned}$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  son números fijos tales que  $a < b$ .

**Teorema 1.1.47 Principio de Arquímedes**  $\mathbb{N}$  no es acotado superiormente.

**Demostración:** Supongamos por contradicción que  $\mathbb{N}$  es acotado superiormente.

Por Axioma del Supremo, existe  $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ . Por tanto  $n \leq s$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Usando teorema 1.1.35 con  $\varepsilon = 1$ , tenemos la existencia de  $n^* \in \mathbb{N}$  tal que  $s - 1 < n^*$ , o lo que es lo mismo  $s < n^* + 1$ . Pero  $n^* \in \mathbb{N}$ , así  $n^* + 1 \in \mathbb{N}$  y es mayor que el supremo de  $\mathbb{N}$ . Lo cual no puede ser, luego  $\mathbb{N}$  no puede ser acotado superiormente. ■

**Observación 1.1.48** Una forma equivalente de enunciar el Principio de Arquímedes es:

Dado un número real  $a$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a < n$ . Puesto que si no existiera tal  $n$ , tendríamos que para todo  $n \in \mathbb{N}$   $n \leq a$ , y  $a$  sería una cota superior de  $\mathbb{N}$ .

**Teorema 1.1.49** Dado un número real pequeño, positivo,  $\varepsilon < 1$ , siempre existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

**Demostración:** Como  $0 < \varepsilon < 1$  tenemos que  $0 < \frac{1}{\varepsilon}$ , luego por el Principio de Arquímedes existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{\varepsilon} < n$ . Es decir,  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . ■

La propiedad arquimediana de los números reales, refleja algo así como el sentido común llevado al mundo de las magnitudes. Cuando se quiere medir el largo de un segmento llevando sobre él un segmento unidad, siempre es posible dejar un resto (si es que lo hay) inferior a la unidad. O lo que es lo mismo, es posible llevar el segmento unidad una cantidad suficiente de veces sobre el segmento a medir, de modo que se termina por sobrepasarlo. Esta situación con los símbolos que hemos introducido puede escribirse como: dado  $b$  (segmento a medir) y  $a$  (segmento unidad), siempre existe un número natural  $n$  tal que  $n \cdot a > b$ . Si en particular tenemos  $a = 1$ , entonces dado  $b$  siempre existe  $n$  tal que  $n > b$ . Son diferentes maneras de expresar una misma propiedad.

Con este principio, estamos excluyendo magnitudes infinitamente pequeñas (o grandes) en comparación con otras. Como veremos más adelante, esta propiedad juega un rol fundamental en nuestra aritmética y en la geometría euclidiana.

Por cierto existen situaciones no arquimedianas, la más simple de todas es tratar de medir un segmento con longitud positiva mediante puntos. Otras más complejas pueden verse en el libro de Fraenkel, página 123.

El siguiente párrafo puede ser omitido.

## Potencias de exponente racional

El objetivo de este párrafo es mostrar que la existencia de raíces es una consecuencia del Axioma del Supremo y con ello aparecen los números irracionales más elementales.

Todas las raíces de números naturales que no son cuadrado de otro número natural son irracionales. En la época de Platón se conocía la naturaleza irracional de  $\sqrt{2}$  hasta  $\sqrt{17}$ .

Para extender las potencias a exponente racional debemos, en primer lugar, considerar los números racionales no enteros, de la forma  $\frac{1}{q}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

**Definición 1.1.50** (i) Si  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $a^{\frac{1}{q}}$  ó  $\sqrt[q]{a}$  al único  $y \in \mathbb{R}^+$  tal que  $y^q = a$

(ii) Si  $a \in \mathbb{R}^-$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q$  impar, denotaremos por  $a^{\frac{1}{q}}$  ó  $\sqrt[q]{a}$  al único  $y \in \mathbb{R}^-$  tal que  $y^q = a$

(iii) Si  $a = 0$  se define  $0^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{0} = 0$ .

El número  $\sqrt[q]{a}$  se lee *raíz  $q$ -ésima de  $a$  o la potencia  $\frac{1}{q}$  de  $a$ .*

**Teorema 1.1.51** 1. Si  $x > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$  entonces

$$(x + \varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K \quad \text{y} \quad (x - \varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K,$$

donde  $K$  es una constante positiva que sólo depende de  $n$  y  $x$ .

2. Si  $x < 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  impar,  $0 < \varepsilon \leq 1$ , entonces

$$(x + \varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K \quad \text{y} \quad (x - \varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K,$$

donde  $K$  es una constante positiva que sólo depende de  $n$  y  $x$ .

El siguiente teorema justifica la definición 1.1.50.

**Teorema 1.1.52** Existencia de raíces.

(i) Si  $a > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces existe un único  $x \in \mathbb{R}^+$  tal que  $x^n = a$ .

(ii) Si  $a < 0$  y  $n \in \mathbb{N}$  es impar, entonces existe un único  $x \in \mathbb{R}^-$  tal que  $x^n = a$ .

**Demostración:**

(i) Sea

$$A = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0, y^n \leq a\}.$$

$A$  es no vacío, pues  $0 \in A$ . Demostremos ahora que  $A$  es acotado superiormente. Si  $a \geq 1$ , entonces si  $A$  no es acotado superiormente, debe existir  $y \in A$  tal que  $a < y$  lo que implica en este caso que  $a < y^n$ . Pero esto contradice el hecho que  $y \in A$ . Por tanto, para  $a \geq 1$ ,  $A$  debe ser acotado superiormente. Ahora, si  $0 < a < 1$ , como  $y^n \leq a$ , se tiene que  $y^n \leq 1$ , lo que implica que  $y \leq 1$  usando ejercicio resuelto 1. Como lo anterior vale para cualquier  $y \in A$ , 1 es una cota superior para  $A$  cuando  $0 < a < 1$ . Por lo tanto, si  $a > 0$ ,  $A$  es acotado superiormente.

Luego el axioma del Supremo nos asegura la existencia en  $\mathbb{R}$  de  $\sup A$ . Sea  $x = \sup A$ . Nótese que por la definición de  $x$ , él es único. Demostremos a continuación que  $x^n = a$ . Si nuestra afirmación anterior fuera falsa tendríamos por tricotomía

que  $x^n > a$  o  $x^n < a$ . Analicemos ambos casos.

**Caso**  $x^n < a$ :

Por teorema 1.1.51, para  $0 < \varepsilon \leq 1$  se tiene que  $(x + \varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K$ , donde  $K$  es una constante positiva que sólo depende de  $n$  y  $x$ . Como  $a - x^n > 0$  por hipótesis, por la propiedad arquimediana de  $\mathbb{R}$  existe de  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon < \min\{1, \frac{a - x^n}{K}\}$ . Luego:

$$x^n + \varepsilon K \leq \frac{a - x^n}{K} K = a - x^n.$$

Por tanto,  $(x + \varepsilon)^n \leq a$  y  $x + \varepsilon \in A$ . Lo que contradice que  $x$  es una cota superior de  $A$ .

**Caso**  $a < x^n$ :

Por teorema 1.1.51, para  $0 < \varepsilon \leq 1$  se tiene que  $(x - \varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K$ , donde  $K$  es una constante positiva que sólo depende de  $n$  y  $x$ . Como  $x^n - a > 0$  por hipótesis, la propiedad arquimediana de  $\mathbb{R}$  nos asegura la tal existencia de  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon < \min\{1, \frac{x^n - a}{K}\}$ . Como  $x = \sup A$ , para  $\varepsilon > 0$  debe existir  $y_0 \in A$  tal que  $x < y_0 + \varepsilon$ . La expresión anterior implica que  $x - \varepsilon < y_0$ . Luego:

$$y_0^n > (x - \varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K > x^n - \frac{(x^n - a)}{K} K = x^n - x^n + a = a.$$

Lo que contradice el hecho que  $y_0 \in A$ .

De analizar los dos casos y en ambos llegar a contradicciones, concluimos que  $x^n = a$ .

■

**Ejercicios resueltos**

Analice la existencia de cotas inferiores, superiores, mayor y menor elemento, supremos e ínfimo para los siguientes conjuntos, donde  $a, b$  son números fijos.

1.  $A_1 = \{ax + b; -2 \leq x \leq 3\}$

**Solución:** Si  $a > 0$ , entonces

$$-2 \leq x \leq 3$$

$$-2a \leq 3a$$

$$-2a + b \leq ax + b \leq 3a + b, \text{ para todo } -2 \leq x \leq 3.$$

Por tanto,  $-2a + b$  es una cota inferior y  $3a + b$  es una cota superior de  $A_1$ . Además, estas cotas pertenecen al conjunto, por lo que son el menor y mayor elemento, respectivamente y también el ínfimo y el supremo de  $A_1$ . Si  $a < 0$ , entonces

$$-2 \leq x \leq 3$$

$$3a \leq x \leq -2a.$$

Por tanto, los roles de  $-2a + b$  y  $3a + b$  se invierten y se tiene que:

$$\inf A_1 = 3a + b, \quad \sup A_1 = -2a + b.$$

2.  $A_2 = \{ax + b; -2 < x \leq 3\}$

**Solución:** Si  $a > 0$ , se tiene como en el caso anterior:

$$-2a + b < ax + b \leq 3a + b, \text{ para todo } -2 < x \leq 3.$$

La única diferencia con el respectivo caso anterior es que  $-2a + b$  no pertenece al conjunto, por lo cual

aunque sigue siendo cota inferior e ínfimo de  $A_2$ , no es el menor elemento. Más aún,  $A_2$ , no tiene el menor elemento. En efecto, supongamos que  $x^*$  es el menor elemento de  $A_2$ . Entonces,  $-2 < x^*$  y  $-2a + b < -2x^* + b < -2x + b$ , para todo  $-2 < x \leq 3$ . Pero, la propiedad de densidad de los números reales asegura la existencia de un  $z^*$  tal que

$$-2 < z^* < x^*,$$

lo que a su vez implica

$$-2z^* + b < -2x^* + b.$$

Pero, esto contradice el hecho que  $x^*$  es el menor elemento de  $A_2$ .

3.  $A_3 = \{ax + b; -2 \leq x < 3\}$

**Solución:** Usando los mismos argumentos se obtiene:

$$\sup A_3 = 3a + b, \inf A_3 = -2a + b, \text{ si } a > 0.$$

$$\inf A_3 = 3a + b, \sup A_3 = -2a + b, \text{ si } a < 0.$$

Si  $a > 0$ ,  $A_3$  no tiene mayor elemento; si  $a < 0$ ,  $A_3$  no tiene menor elemento.

4.  $A_4 = \{ax + b; -2 < x < 3\}$

**Solución:**

El ínfimo y el supremo son los mismos que en los casos anteriores, pero  $A_4$  no tiene menor ni mayor elemento.

5. Demuestre que el conjunto  $A_5 = \{ax + b, x \in \mathbb{R}\}$  no es acotado ni superior ni inferiormente.

**Solución:** Supongamos que  $A_5$  es acotado superiormente y que  $a > 0$ . Entonces, existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que:

$$ax + b \leq M, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

lo que implica,

$$x \leq \frac{M - b}{a}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Pero, esto nos dice que  $\frac{M - b}{a}$  es una cota superior de  $\mathbb{R}$ , lo cual es una contradicción. De la misma forma se demuestra que  $A_5$  no es acotado inferiormente.

6. Encuentre cotas superiores e inferiores para el conjunto  $\{x^2 + x - 2; -2 \leq x \leq 1\}$ .

**Solución:**  $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ , del método para analizar el signo de un trinomio de segundo grado, visto en el ejercicio 2 de la sección 1.3, sabemos que este trinomio es negativo para  $-2 < x < 1$ , se anula en  $x = -2$  y  $x = 1$  y para los restantes valores de  $x$  es positivo. Por tanto, 0 es una cota superior del conjunto. Para encontrar una cota inferior, que si existe, es negativa; Debemos encontrar un número  $k$  tal que para todo  $z < k$ , la ecuación

$$x^2 + x - 2 = z$$

no tenga solución en  $\mathbb{R}$ .  $x^2 + x - 2 - z = 0$  no tiene raíces reales si

$$1 + 4(2 + z) < 0,$$

es decir,  $z < -\frac{9}{4} = -2,25 = k$ , el número buscado.

En consecuencia, para todo  $z < -2,25$  no existe  $x$  tal que  $x^2 + x - 2 = z$ . Por tanto, cualquier número menor o igual que  $-2,25$  es una cota inferior de nuestro conjunto.

Ahora veamos si  $-2,25$  pertenece al conjunto. Para ello debemos resolver la ecuación  $x^2 + x - 2 = -2,25$ , que tiene por solución  $x = -0,5$ . Así,  $-2,25$  es el menor elemento del conjunto y por tanto, su ínfimo.

7. Dada la expresión  $f(x) = \frac{6(x^2 + 2x - 1)}{-2x^2 - 3}$ ,
- ¿ Para qué valores de  $x$  tiene sentido  $f(x)$  ?
  - Demuestre que  $f(x)$  está acotada superiormente por 3 e inferiormente por -4.
  - ¿ Cómo elegir  $x$  para que  $f(x) = 3$ ?
  - ¿ Cómo elegir  $x$  para que  $f(x) = -4$ ?
  - ¿Cuál es el supremo y el ínfimo del conjunto  $\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$ ?

**Solución:**

- Para que la expresión  $f(x)$  tenga sentido es necesario excluir los valores de  $x$  que anulan el denominador.  $-2x^2 - 3 = 0$  es equivalente a  $2x^2 + 3 = 0$ , pero como todo número al cuadrado es positivo o nulo,  $2x^2 + 3$  no se anula para ningún valor de  $x$ . Por tanto,  $f(x)$  vale para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- Para poder demostrar que  $f(x)$  es acotada superiormente por 3, supondremos que esto es verdad, así podremos encontrar una expresión para iniciar la demostración.

$$\frac{6(x^2 + 2x - 1)}{-2x^2 - 3} = \frac{6(1 - 2x - x^2)}{2x^2 + 3}$$

$$\frac{6(1 - 2x - x^2)}{2x^2 + 3} < 3$$

$$6 - 12x - 6x^2 < 6x^2 + 9$$

$$0 < 12x^2 + 12x + 3$$

$$0 < 3(4x^2 + 4x + 1)$$

$$0 < 3(2x + 1)^2$$

Como la última desigualdad es siempre válida, en rigor ésta debe ser el punto de partida de la verdadera demostración.

Para demostrar que  $f(x)$  es acotada inferiormente por  $-4$ , supondremos que en borrador hicimos el procedimiento ya mostrado y ahora haremos la demostración :

$$\begin{aligned} 0 &< 2(x-3)^2 \\ 0 &< 2(x^2 - 6x + 9) \\ 0 &< 2x^2 - 12x + 18 \\ -8x^2 - 12 &< 6 - 12x - 6x^2 \\ -4(2x^2 + 3) &< 6 - 12x - 6x^2 \\ -4 &< \frac{6(1 - 2x - x^2)}{2x^2 + 3} \end{aligned}$$

- c) La ecuación  $f(x) = 3$  es equivalente a  $2x + 1 = 0$ , lo que nos da  $x = -\frac{1}{2}$ . La ecuación  $f(x) = -4$ , tiene solución  $x = 3$ . Es decir,  $f(3) = -4$  y  $f(-\frac{1}{2}) = 3$ . Por lo tanto,  $-4$  y  $3$  pertenecen al conjunto  $\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$  y en virtud del corolario 1.1.45 estos números son , respectivamente, el ínfimo y el supremo.

8. Demuestre que en los conjuntos finitos último elemento y supremo coinciden.

**Solución:** Sea  $F$  un subconjunto finito de  $\mathbb{R}$ . Sea  $u \in F$  el mayor de todos los elementos de  $F$ . Como el conjunto es finito, basta comparar los elementos de  $F$  todos con todos y hallar tal  $u$ . Luego  $x \leq u$  para todo  $x \in F$ . Por tanto,  $u$  es el último elemento. Por otro lado,  $u$  es cota superior de  $F$  y si consideramos otra cota superior  $c$  de  $F$  ella satisface que  $x \leq c$  para todo  $x \in F$ . En particular  $u \in F$ , luego  $u \leq c$ . Por tanto,  $u$  es la menor cota superior. Luego  $u = \sup F$ .

9. Si  $A \subset \mathbb{R}$  es un conjunto no vacío, definimos por  $-A$  al conjunto  $\{-x : x \in A\}$ . Demuestre que si  $A$  es acotado inferiormente, entonces  $-A$  es acotado superiormente e  $\inf A = -\sup(-A)$ .

**Solución:** Si  $A$  es acotado inferiormente, sea  $c$  una cota inferior de  $A$ , entonces  $c \leq x$  para todo  $x \in A$ . Luego  $-x \leq -c$  para todo  $x \in A$ . Esto implica que  $-c$  es una cota superior de  $-A$ , y por axioma del supremo, existe el supremo de  $-A$ . Sea  $a = \sup(-A)$  y  $b = \inf A$ , como  $b$  es la mayor cota inferior de  $A$ ,  $b \leq x$  para todo  $x \in A$ . Luego  $-x \leq -b$  para todo  $x \in A$ , lo que implica que  $-b$  es cota superior de  $-A$ . Si  $c$  es una cota superior de  $-A$ ,  $-x \leq c$ , para todo  $x \in A$ , lo que implica que  $-c \leq x$  para todo  $x \in A$ . Por tanto,  $-c$  es una cota inferior de  $A$  y como

$b = \inf A$ , debemos tener que  $-c \leq b$ . Lo anterior implica que  $-b \leq c$ ; y siendo  $c$  una cota superior arbitraria de  $-A$ , concluimos que  $-b$  es el supremo de  $-A$ . Como

el supremo de un conjunto es único, por teorema 1.1.36,  $-b = a$ , como queríamos demostrar.

10. Demuestre que  $\sup \mathbb{R}^- = \inf \mathbb{R}^+ = 0$ .

**Solución:** Como  $\mathbb{R}^+ = -\mathbb{R}^-$ , por ejercicio resuelto 2, tenemos que  $\sup \mathbb{R}^- = \inf \mathbb{R}^+$ . Demostremos que  $\sup \mathbb{R}^- = 0$ . Supongamos que no es así, como 0 es una cota superior de  $\mathbb{R}^-$ , entonces  $\sup \mathbb{R}^- < 0$ . Del teorema 1.1.26 tenemos que  $x = \frac{\sup \mathbb{R}^-}{2}$  satisface que  $\sup \mathbb{R}^- < x < 0$ . Luego,  $x \in \mathbb{R}^-$  y  $\sup \mathbb{R}^- < x$ , lo que contradice la definición de  $\sup \mathbb{R}^-$ . Por tanto,  $\sup \mathbb{R}^- = 0$  como queríamos demostrar.

11. Demuestre que  $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$ .

**Solución:** 0 es cota inferior del conjunto pues,  $0 < \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $I > 0$ , entonces por el teorema 1.1.49 existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \frac{1}{n} < I$ . Lo cual es una contradicción con la definición de  $I$ . Por tanto,  $I = 0$ .

12. Sean  $a$  y  $b$  números reales. Demuestre que si para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $a < b + \varepsilon$ , entonces  $a \leq b$ .

**Solución:** Como  $a - b < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $a - b$  es cota inferior de  $\mathbb{R}^+$ . Por el ejercicio anterior,  $\inf \mathbb{R}^+ = 0$ . Por lo tanto,  $a - b \leq 0$  y luego  $a \leq b$ .

13. Demuestre que  $\mathbb{R}$  no es acotado superior ni inferiormente.

**Solución:** Supongamos que  $\mathbb{R}$  es acotado superiormente, entonces existe  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq M$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Luego, como  $M + 1 \in \mathbb{R}$  tendríamos que  $M + 1 \leq M$ , lo que implica que  $1 \leq 0$ ; pero esto es una contradicción con el teorema 1.1.25. Por tanto,  $\mathbb{R}$  no puede estar acotado superiormente.

Ahora si  $\mathbb{R}$  fuera acotado inferiormente, entonces por ejercicio resuelto 2  $-\mathbb{R}$  estaría acotado superiormente y como  $-\mathbb{R} = \mathbb{R}$ , tendríamos que  $\mathbb{R}$  es acotado superiormente. Por tanto,  $\mathbb{R}$  no puede estar acotado inferiormente.

14. Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $a < b$ , considere los siguientes conjuntos definidos en 1.1.46:

$$A_1 = ]a, b[$$

$$A_2 = [a, b[$$

$$A_3 = ]a, b]$$

$$A_4 = [a, b].$$

Demuestre que :  $\sup A_1 = \sup A_2 = \sup A_3 = \sup A_4 = b$  e  $\inf A_1 = \inf A_2 = \inf A_3 = \inf A_4 = a$ .

**Solución:** Es fácil ver que  $b$  es cota superior de  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_4$  por la definición de los conjuntos. Ahora, usando el teorema 1.1.35, veamos que  $b$  es el supremo de estos conjuntos. Consideremos  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Por teorema 1.1.26, tenemos que

$$b - \varepsilon < \frac{(b - \varepsilon) + b}{2} < b$$

luego, si  $x = \frac{(b - \varepsilon) + b}{2}$  tenemos que  $x \in A_i$  con  $i = 1, \dots, 4$ ; puesto que  $x < b$ . Además,  $b - \varepsilon < x$ . Luego,  $b = \sup A_i$  con  $i = 1, \dots, 4$ . Notemos que si  $\varepsilon \geq b - a$  cualquier  $x \in A_i$  con  $i = 1, \dots, 4$  satisface la propiedad del teorema 1.1.35 para  $b$  como candidato a supremo.

Como  $-A_1 = \{x \in \mathbb{R} : -b < x < -a\}$ , entonces por lo demostrado en el párrafo anterior  $\sup -A_1 = -a$ , luego por lo demostrado en ejercicio resuelto 2 concluimos que  $\inf A_1 = a$ . Análogamente  $\inf A_2 = \inf A_3 = \inf A_4 = a$ .

Veamos ahora que  $A_1$  a pesar de tener ínfimo no tiene primer elemento. Si este existiera y fuera  $p$ , entonces,  $p \in A_1$  y  $p \leq x$ ;  $x \in A_1$ . Sin embargo, sabemos que siendo  $a < p$  se tiene que  $a < \frac{a+p}{2} < p$ , y luego  $\frac{a+p}{2} \in A_1$  y  $\frac{a+p}{2} < p$ . Pero esto es una contradicción con el hecho que  $p$  es el primer elemento de  $A_1$ . Por tanto,  $A_1$  no tiene primer elemento.

De modo análogo,  $A_3$  no tiene primer elemento y  $A_1, A_2$  no tienen último elemento.

15. Dado  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío y  $a \in \mathbb{R}$ , definimos  $a + A = \{a + x : x \in A\}$ . Demuestre que si  $A$  es acotado superiormente, entonces  $a + A$  es acotado superiormente y  $\sup(a + A) = a + \sup A$ .

**Solución:** Sea  $u = \sup A$ , entonces,  $x \leq u$  para cualquier  $x \in A$ , y  $a + x \leq a + u$ . Por tanto,  $a + u$  es una cota superior de  $a + A$ ; por consiguiente, se tiene  $\sup(a + A) \leq a + u$ . Si  $v$  es cualquier cota superior del conjunto  $a + A$ , entonces  $a + x \leq v$  para todo  $x \in A$ . Entonces,  $x \leq v - a$  para todo  $x \in A$ , lo cual implica que  $u = \sup A \leq v - a$ . Así  $a + u \leq v$  y como  $a + u$  es una cota superior de  $a + A$ , se concluye que

$$\sup(a + A) = a + u = a + \sup A.$$

Usando ejercicio resuelto 2, puede probarse una proposición análoga para ínfimos. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \inf(a + A) &= -\sup[-(a + A)] \\
 &= -\sup[-a + (-A)] \\
 &= -[-a + \sup(-A)] \\
 &= a - \sup(-A) \\
 &= a + \inf A.
 \end{aligned}$$

Para que lo anterior tenga sentido,  $A$  debe ser un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$  acotado inferiormente. Además debe demostrarse que  $-(a + A) = -a + (-A)$ , lo cual es inmediato.

### Ejercicios propuestos

1. Demuestre teorema 1.1.39.
2. Demuestre teorema 1.1.40.
3. Demuestre teorema 1.1.41.
4. Demuestre teorema 1.1.43.
5. Demuestre teorema 1.1.44.
6. Demuestre 14 de los ejercicios resueltos sin usar teorema 1.1.35.
7. Demuestre sin usar ejercicio resuelto 14 que:
  - a)  $\sup[-5, 2[) = 2$  y  $\inf[-5, 2[ = -5$ .
  - b)  $\sup\{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 3x - 2 > 0\} = 2$  y  $\inf\{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 3x - 2 > 0\} = 1$ .
  - c)  $\sup\{-x^2 + 3x - 2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{4}$ .
8. Dado el conjunto  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 4\}$ 
  - a) Encuentre cotas superiores e inferiores para  $A$  y su complemento  $A^c$ .
  - b) Encuentre el  $\sup A$ ,  $\inf A$ ,  $\sup A^c$ ,  $\inf A^c$  si es que existen.

Encuentre cotas superiores e inferiores para los siguientes conjuntos:

9.  $\{x^2 + 1; -1 \leq x \leq 1\}$ .

10.  $\{x^2 + 1; x \in \mathbb{R}\}$ .
11.  $\left\{\frac{1}{x^2 + 1}; -1 \leq x \leq 1\right\}$ .
12.  $\left\{\frac{1}{x^2 + 1}; x \in \mathbb{R}\right\}$ .
13.  $\{1 - x - x^2; -2 \leq x \leq 1\}$ .
14.  $\{x^2 + x - 1; x \in \mathbb{R}\}$ .
15.  $\{1 - x - x^2; x \in \mathbb{R}\}$ .
16. Si  $x = 3b - a + 2$ ,  $y = 3a - b + 7$  y los números  $a$  y  $b$  están acotados como sigue:  
 $2, 20 < a < 2, 21$  ;  $3, 44 < b < 3, 45$ . Encuentre cotas superiores e inferiores para  
 $x$ ,  $y$ ,  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $xy$ ,  $\frac{x}{y}$ . Compare  $x$  e  $y$ .
17. Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces consideremos los conjuntos:  
 $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ .  
 $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$ .  
 $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ .
- a) Sea  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío y acotado. Muestre que si  $\lambda \geq 0$ , entonces  $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$  y  $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$ . Busque contraejemplos para mostrar que no se tienen tales igualdades cuando  $\lambda < 0$ .
- b) Sean  $A, B \subset \mathbb{R}$  no vacíos y acotados. Demuestre que:  
 $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  y  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ .  
 ¿Cuándo  $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$  e  $\inf(AB) = (\inf A)(\inf B)$ ? En tal caso demuestre que se satisfacen dichas igualdades.
- c) Sean  $A, B$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$  tal que  $A \subset B$  y  $B$  acotado. Muestre que  $A$  es acotado y que  $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$ .
- d) Sean  $A, B$  subconjuntos no vacíos y acotados de  $\mathbb{R}$ . Muestre que  

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \quad \text{y} \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$
- e) Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función con recorrido acotado. Demuestre que si  $A_0 \subset A$ , entonces:

$$\begin{aligned} \inf\{f(x) : x \in A\} &\leq \inf\{f(x) : x \in A_0\} \leq \sup\{f(x) : x \in A_0\} \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in A\}. \end{aligned}$$

f) Sean  $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones con recorrido acotado. Demuestre que:

$$\begin{aligned} \inf\{f(x) : x \in A\} + \inf\{g(x) : y \in A\} &\leq \inf\{f(x) + g(x) : x \in A\} \\ &\leq \inf\{f(x) : x \in A\} + \\ &\quad + \sup\{g(x) : y \in A\} \\ &\leq \sup\{f(x) + g(x) : x \in A\} \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \\ &\quad + \sup\{g(y) : y \in B\} \end{aligned}$$

18. Dados los números reales  $a, b$ , demuestre que:

$$a) \quad \sup\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

$$b) \quad \inf\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

## 1.2. Límites de funciones numéricas de variable discreta.

### 1.2.1. Las variables discretas y el conjunto $\mathbb{N}$

Si una magnitud varía mediante saltos, como por ejemplo el número de personas que llegan a la caja de un banco en intervalos de tiempos fijos, el número de nacimientos o muertes medidos día a día, se dice que es discreta. Otra forma de concebir algo discreto es algo que al ser fraccionado pierde su esencia. Por ejemplo: la mitad de una mesa no es una mesa y la tercera parte de 34 nacimientos no son 11,333...nacimientos. En cambio, existen otras magnitudes que permiten, al menos abstractamente, infinitas posibilidades de división. Las más típica de las magnitudes continuas son el tiempo y la temperatura. Las variables discretas, en general, aparecen al contar objetos, sucesos o fenómenos y, por tanto, el modelo matemático básico de una variable discreta es el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$ .

En una relación funcional de variable independiente y dependiente, cuando la variable independiente es discreta necesariamente la variable dependiente también lo es, este tipo de asignación se les llama **sucesiones**. Una sucesión es una abstracción de un proceso cuyas etapas se pueden contar y extender indefinidamente.

**Definición 1.2.1** Se llama **sucesión de números reales** a una función definida sobre  $\mathbb{N}$  con valores en  $\mathbb{R}$ , es decir, una regla que pone en correspondencia de manera única los elementos de  $\mathbb{N}$  con números reales. En otras palabras, una sucesión es una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a cada  $n$  le asigna  $f(n) = a_n$ . También suele denotarse como  $\{a_n\}$  y a  $a_n$  se le llama el término general de la sucesión.

Antes de entrar en el estudio de las sucesiones enunciaremos algunas de las propiedades más relevantes del conjunto de los números naturales.

**Teorema 1.2.2 Principio de Inducción** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $P(n)$  una propiedad satisfecha por  $n$ . Si se cumple lo siguiente:

- (i)  $P(1)$  es verdadera.
- (ii) El hecho que  $P(n)$  es verdadera implica que  $P(n + 1)$  es verdadera.

Entonces, la propiedad  $P(n)$  se satisface para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

### Teorema 1.2.3 Principio del Buen Orden

$\mathbb{N}$  es un conjunto bien ordenado, esto significa que todo subconjunto  $A$  no vacío de  $\mathbb{N}$  tiene primer elemento.

El Principio de Inducción es el método más seguro, a veces el único, para demostrar propiedades de los números naturales. Existe un teorema paralelo a éste, que nos da la posibilidad de garantizar que ciertas funciones sobre los números naturales están bien definidas, tal es el *Teorema de Recurrencia*, que vamos a enunciar para cultura de los lectores, pero que no demostraremos aquí.

#### Teorema 1.2.4 Teorema de Recurrencia

Si  $x$  es un número real y  $G$  una función sobre  $\mathbb{R}$  con valores reales, entonces existe una única  $F$  tal que:

- (i)  $F$  es una función sobre  $\mathbb{N}$ .
- (ii)  $F(1) = x$ .
- (iii) Para cada  $n$ ,  $F(n + 1) = G(F(n))$ .

**Ejemplo 1.2.5** Una forma de definir sucesiones es usando el Teorema de Recurrencia.

- a) Dados los números reales  $x, d$ , una progresión aritmética es la sucesión definida por recurrencia de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n + d \end{aligned}$$

En este caso, la función  $G$  es  $G(z) = z + d$  donde  $d$  es una constante real.

- b) Dados los números reales  $x, r$ , se define una **progresión geométrica** de la siguiente manera recursiva:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n \cdot r; \end{aligned}$$

En este caso, la función  $G$  es  $G(z) = rz$  donde  $r$  es una constante real.

- c) La definición por recurrencia puede involucrar explícitamente a más de un término ya conocido, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 3a_{n-1}. \end{aligned}$$

Esto se obtiene al considerar  $F(n + 1) = G(F(n - 1), F(n))$  y  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $G(x, y) = 3x + 2y$ .

El teorema de Recurrencia no sólo se usa para definir sucesiones, las siguientes dos definiciones son otros casos, muy conocidos, en que se usa este útil teorema.

**Definición 1.2.6** Dado  $x \in \mathbb{R}$ , se define  $x_1 = x$  y  $x_{n+1} = x^n x$ .

Tomando  $x$  fijo y  $G(y) = yx$ , el teorema nos asegura la existencia de una única función  $F$  sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $F(1) = x$  y  $F(n+1) = G(F(n)) = F(n)x$ . Por convención  $F(n)$  la escribimos como  $x^n$ .

**Definición 1.2.7** Se define el símbolo  $n!$  mediante el siguiente esquema recursivo:

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ (n+1)! &= n!(n+1) \end{aligned}$$

### 1.2.2. Convergencia de sucesiones

**Definición 1.2.8** Diremos que una sucesión es **acotada** si existe un número positivo  $M$  tal que  $|a_n| < M$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definición 1.2.9** Diremos que una sucesión es:

- (i) **estrictamente creciente** si  $a_n < a_{n+1}$ , para todo  $n$ .
- (ii) **creciente** si  $a_n \leq a_{n+1}$ , para todo  $n$ .
- (iii) **estrictamente decreciente** si  $a_n > a_{n+1}$ , para todo  $n$ .
- (iv) **decreciente** si  $a_n \geq a_{n+1}$ , para todo  $n$ .
- (v) **monótona** si satisface cualquiera de las condiciones anteriores.

**Ejemplo 1.2.10** 1. La sucesión cuyo término general está definido por  $a_n = n^2$ , es creciente. En efecto, usando las propiedades de las potencias:

$$n < n+1 \implies n^2 < (n+1)^2.$$

Esta sucesión no es acotada superiormente por la propiedad arquimediana de los números reales.

2. La sucesión  $a_n = \frac{1}{n}$ , es decreciente, y acotada inferiormente por 0. En efecto, cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que:

$$n < n+1 \implies \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \text{ y } \frac{1}{n} > 0.$$

3. La sucesión  $a_n = (-1)^n$  es acotada, pues  $|a_n| = 1$ , para todo  $n$ ; pero no es creciente ni decreciente.
4. Consideremos la sucesión definida por recurrencia

$$\begin{aligned} a_1 &= -4 \\ a_n &= \frac{1}{2}a_{n-1} + 4, \text{ si } n \geq 2 \end{aligned}$$

Esta sucesión es tal que:  $a_2 = \frac{1}{2}(-4) + 4 = 2$ ,  $a_3 = \frac{2}{2} + 4 = 5$ ,  $a_4 = \frac{5}{2} + 4 = \frac{13}{2}$ .

Podemos sospechar que esta sucesión es creciente, pero debemos demostrarlo. Lo haremos usando inducción. La propiedad  $P(1)$  toma la forma:  $a_1 \leq a_2$ . Calculando  $a_1$  y  $a_2$ , podemos verificar rápidamente que  $a_1 = -4 < a_2 = 2$ .

Ahora supongamos que se satisface la propiedad  $P(n)$  que en nuestro caso toma la forma:  $a_n < a_{n+1}$ ; entonces, debemos demostrar que  $a_{n+1} < a_{n+2}$ . En efecto:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 4 < \frac{1}{2}a_{n+1} + 4 = a_{n+2} \quad (\text{por hipótesis de inducción}).$$

Usando nuevamente el principio de inducción, demostraremos que esta sucesión es acotada por 8:

$a_1 = -4 < 8$ . Supongamos que  $a_n < 8$ , entonces  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 4 < \frac{1}{2}8 + 4 = 8$ . Por ser creciente, tenemos que  $|a_n| < 8$ .

Una forma de aproximar el número irracional  $\sqrt{2}$  es mediante la sucesión definida recursivamente:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right). \end{aligned}$$

Para que efectivamente este procedimiento numérico dé aproximaciones de  $\sqrt{2}$ , se necesita que en cada etapa se obtenga un valor más cercano al número  $\sqrt{2}$ , pero como el proceso se puede extender indefinidamente, debemos detenernos en algún instante según el grado de exactitud deseado. ¿Pero quién puede asegurarnos que lo que uno observa en las primeras etapas sea una propiedad intrínseca de la sucesión? Es decir, ¿se conserva siempre la propiedad que en cada etapa la aproximación es más exacta? ¿Cómo estar seguro de ello?

Podemos citar otro ejemplo: En los albores del pensamiento racional en el siglo V a.C, Zenón de Elea planteó sus famosas paradojas para dejar constancia de la imposibilidad -según él- de concebir abstractamente el movimiento. En particular, si el espacio fuera

continuo, entonces cuando alguien va desde un punto  $A$  a un punto  $B$ , en algún instante está en  $\frac{\overline{AB}}{2}$ ; al seguir avanzando, en otro instante está en la mitad de la mitad, es decir, en  $\frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{4}$ . En el instante  $n$ , se encuentra en

$$\frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{2^2} + \dots + \frac{\overline{AB}}{2^n}.$$

Este es un proceso que se extiende indefinidamente teniéndose una suma infinita de números positivos la cual, en la época de Zenón, se pensaba debía ser infinita. Por tanto, en teoría nunca se podía llegar al punto  $B$ , cosa que evidentemente contradice la realidad.

Si el proceso de avanzar por sucesivas mitades es una forma de reflejar el poder ir de  $A$  hasta  $B$ , entonces, ¿cómo sumar una cantidad infinita de números positivos de modo que nos dé  $\overline{AB}$ ? Evidentemente no debe ser una suma aritmética, pues por este camino llegamos a la misma conclusión de Zenón.

Para resolver este tipo de problemas, surgió el concepto de límite de una sucesión, que en algunos casos coincide con supremos e ínfimos.

**El conjunto  $\overline{\mathbb{R}}$**  Para dar una idea de una magnitud que crece o decrece indefinidamente necesitamos ampliar el conjunto  $\mathbb{R}$  introduciendo los símbolos  $-\infty$  y  $+\infty = \infty$  y sus relaciones aritméticas y de orden. En este caso  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

1. Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ . Se preservan las propiedades fundamentales de las desigualdades.
2.  $(+\infty) + a = +\infty$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ .
3.  $(-\infty) + a = -\infty$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ .
4.  $(+\infty) \cdot a = +\infty$ , si  $a > 0$ .
5.  $(+\infty) \cdot a = -\infty$ , si  $a < 0$ .
6.  $(-\infty) \cdot a = -\infty$ , si  $a > 0$ .
7.  $(-\infty) \cdot a = +\infty$ , si  $a < 0$ .
8.  $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
9.  $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
10.  $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

Es importante enfatizar que las operaciones con estos símbolos que no están explícitamente definidas no tienen sentido, es decir, cuando ellas aparecen no se puede concluir nada. Por esta razón suele llamárseles **formas indeterminadas**. Ejemplos de formas indeterminadas son:  $(+\infty) + (-\infty)$ ,  $(+\infty) \cdot 0$ ,  $(-\infty) \cdot 0$ .

**Definición 1.2.11** Diremos que un número  $L$ , es el **límite de una sucesión**  $\{a_n\}$  si dado un número positivo  $\varepsilon$  existe un número natural  $N$  tal que si  $n \geq N$ , se cumple que

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

es decir,  $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ , para todo  $n \geq N$ .

En este caso, escribimos:  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ó  $a_n \rightarrow L$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y también suele decirse que la sucesión  $\{a_n\}$  **converge** hacia  $L$ .

**Interpretación geométrica del límite.** Si  $\{a_n\}$  es una sucesión convergente a  $L$  entonces, graficando la sucesión, se debe observar que a partir de algún  $n$  los  $a_n$  comienzan a acercarse al punto  $L$ .

Dado un  $\varepsilon$  a partir de  $n$  suficientemente grande, todos los valores de la sucesión se encuentran en la franja  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

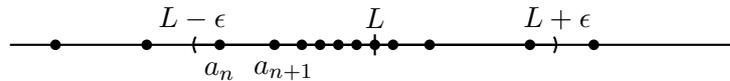


Figura 1.2.1: Interpretación geométrica del límite.

**Ejemplo 1.2.12** 1. Si  $a_n = 1 + \frac{5}{n+1}$ , la sucesión  $\{a_n\}$  converge a  $L = 1$ . En efecto, dado  $\varepsilon > 0$  debemos encontrar  $N$  tal que si  $n > N$ , entonces

$$|a_n - L| = \left| 1 + \frac{5}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{5}{n+1} \right| = \frac{5}{n+1}$$

debe ser menor que  $\varepsilon$ .

Imponiendo la condición, despejamos  $n$ .

Para que  $\frac{5}{n+1} < \varepsilon$  es necesario y suficiente que  $\frac{5}{\varepsilon} - 1 < n$ .

Así, usando la propiedad arquimediana, dado el número  $\frac{5}{\varepsilon} - 1$  existe un  $N$  tal que  $N > \frac{5}{\varepsilon} - 1$ , de modo que si  $n \geq N$ , entonces

$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$$

$$n + 1 > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$\frac{n + 1}{5} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\frac{5}{n + 1} < \varepsilon.$$

2. La sucesión constante con término general  $a_n = c$ , para todo  $n$ , tiene límite  $L = c$ . Pues, dado  $\varepsilon > 0$ , para todo  $n$  se tiene que  $|a_n - L| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ .
3. La sucesión  $a_n = \frac{1}{n}$ , tiene límite  $L = 0$  que es, a su vez, el ínfimo del conjunto  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ . La demostración es la misma.
4. La sucesión  $a_n = (-1)^n$ , aunque es acotada, no tiene límite. Cualquier número candidato a límite, en particular los valores 1, -1, no cumple con la condición, pues la distancia entre dos términos sucesivos  $|a_n - a_{n+1}| = 2$ ; por tanto, tomando cualquier  $0 < \varepsilon < 2$ , es imposible que se satisfaga la definición 1.2.11.
5. La sucesión  $a_n = n^2$ , por ser creciente y no acotada superiormente, los términos para  $n$  grandes no pueden acumularse en torno a un número fijo.

**Definición 1.2.13** Si una sucesión no converge, entonces diremos que **diverge**. Es decir, una sucesión  $\{a_n\}$  diverge si:

Dado  $L \in \mathbb{R}$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $n$  existe otro número natural  $m, m \geq n$  de modo que  $|a_m - L| \geq \varepsilon$ .

**Ejemplo 1.2.14** Las sucesiones de las partes 4 y 5 del ejemplo 1.2.12 divergen.

**Teorema 1.2.15** Si una sucesión  $\{a_n\}$  tiene límite,  $L$  entonces el límite es único.

**Demostración:** Supongamos que la sucesión  $\{a_n\}$  converge además hacia el número  $\bar{L}$ .

Usando definición 1.2.11, con  $L$  y  $\bar{L}$ , tenemos que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que si  $n \geq N$ ,  $|a_n - L| < \varepsilon$  existe  $\bar{N}$  tal que si  $n \geq \bar{N}$ ,  $|a_n - \bar{L}| < \varepsilon$ .

Por tanto, usando la desigualdad triangular del valor absoluto, tenemos:

$$|L - \bar{L}| = |L - \bar{L} + a_n - a_n| = |(L - a_n) - (\bar{L} - a_n)| \leq |L - a_n| + |\bar{L} - a_n| < 2\varepsilon.$$

Por ser  $|L - \bar{L}| < 2\varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , usando la propiedad demostrada en el ejercicio resuelto 5 de la subsección 1.1.1 tenemos que  $L = \bar{L}$ . Por tanto, si existe el límite, éste es único. ■

**Teorema 1.2.16** Toda sucesión convergente es acotada.

**Demostración:** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión convergente hacia  $L$ . Aplicando la definición 1.2.11 con  $\varepsilon = 1$ , podemos asegurar la existencia de un número  $N$  tal que, si  $n \geq N$ ,  $|a_n - L| < 1$ .

Por una propiedad del valor absoluto,

$$\begin{aligned} |a_n| - |L| &\leq |a_n - L| < 1 \\ |a_n| &\leq |L| + 1, \text{ si } n \geq N. \end{aligned}$$

Los términos no incluidos en la última afirmación son  $\{a_1, \dots, a_{N-1}\}$  que constituyen un conjunto finito y, por tanto, es acotado. Es decir,

$$|a_n| \leq M, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para  $M = \sup\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |L| + 1\}$ . Así tenemos que  $\{a_n\}$  es acotada. ■

Una consecuencia del teorema 1.2.16 es que una sucesión no acotada no es convergente.

Tal como en el caso de las funciones numéricas de variable continua, existe una aritmética de sucesiones; el siguiente teorema nos dice cómo se conserva la propiedad de convergencia a través de las operaciones aritméticas.

**Teorema 1.2.17** Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  sucesiones convergentes. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ ; cuando  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ .

**Demostración:**

- (i) Sean  $L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existen números naturales  $N_1, N_2$  tales que:

$$\begin{aligned} |a_n - L_1| &< \frac{\varepsilon}{2}; \text{ para todo } n \geq N_1 \\ |b_n - L_2| &< \frac{\varepsilon}{2}; \text{ para todo } n \geq N_2. \end{aligned}$$

Entonces, si  $N \geq \sup\{N_1, N_2\}$

$$|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| = |(a_n - L_1) + (b_n - L_2)| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon; \text{ para todo } n \geq N.$$

Por tanto, la sucesión  $\{a_n + b_n\}$  converge a  $L_1 + L_2$ .

- (ii) Debemos estudiar la distancia entre  $a_n b_n$  y  $L_1 L_2$ , es decir, estimar el número  $|a_n b_n - L_1 L_2|$ . Para ello, observemos que

$$\begin{aligned} a_n b_n - L_1 L_2 &= a_n b_n - a_n L_2 + a_n L_2 - L_1 L_2 \\ &= a_n (b_n - L_2) + L_2 (a_n - L_1) \end{aligned}$$

como la sucesión  $\{a_n\}$  es convergente, ella es acotada, así existe  $M > 0$  tal que  $|a_n| \leq M$ , para todo  $n$ .

$$\begin{aligned} |a_n b_n - L_1 L_2| &\leq |a_n| |b_n - L_2| + |L_2| |a_n - L_1| \\ &\leq M |b_n - L_2| + |L_2| |a_n - L_1| \end{aligned}$$

Con un argumento como el usado en (i), dado un número positivo  $\eta$ , existe  $N$  tal que si  $n \geq N$ , entonces

$$|b_n - L_2| < \eta$$

$$|a_n - L_1| < \eta.$$

Entonces  $|a_n b_n - L_1 L_2| \leq M\eta + |L_2|\eta = (M + |L_2|)\eta$  para  $n \geq N$ . Si en particular elegimos  $\eta = \frac{\varepsilon}{M + |L_2|}$ , entonces  $|a_n b_n - L_1 L_2| < \varepsilon$ ; para  $n \geq N$ .

- (iii) Como  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ ; y acabamos de demostrar la convergencia de un producto de sucesiones convergentes, basta que demostremos la convergencia de  $\{\frac{1}{b_n}\}$  hacia  $\frac{1}{L_2}$ , cuando  $L_2 \neq 0$ .

La condición  $L_2 \neq 0$  implica que cuando  $n$  crece, los  $b_n$  no pueden ser cero. En efecto, si  $L_2 \neq 0$  entonces  $\frac{1}{2}|L_2| > 0$ . Por lo cual podemos tomar en particular  $\varepsilon = \frac{1}{2}|L_2|$  y por definición 1.2.11, existe  $N$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $|b_n - L_2| < \frac{1}{2}|L_2|$ . De aquí, tenemos que  $|L_2| - |b_n| \leq |b_n - L_2| < \frac{1}{2}|L_2|$  y por tanto  $|b_n| > \frac{1}{2}|L_2|$ .

Ahora analicemos la diferencia

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2} \right| = \left| \frac{L_2 - b_n}{b_n \cdot L_2} \right| = \frac{|L_2 - b_n|}{|b_n| |L_2|}.$$

Pero para  $n$  grande,  $|L_2 - b_n| < \eta$  y  $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|L_2|}$ , así:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2} \right| < \frac{2\eta}{|L_2|} ; \text{ si hacemos } \eta = \frac{1}{2}\varepsilon |L_2|,$$

obtenemos que  $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{n}| < \varepsilon$ .

Con este resultado y (iii) tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Corolario 1.2.18** Como casos particulares del teorema 1.2.17 tenemos los siguientes resultados:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n; \quad c = \text{cte.}$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n + (-b_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Observación 1.2.19** En la aplicación del teorema 1.2.17 se debe verificar previamente el cumplimiento de la hipótesis que las sucesiones involucradas sean convergentes, pues en caso contrario las conclusiones pueden ser falsas.

Sean las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  tales que  $a_n = n$ ,  $b_n = n$ , entonces en este caso no puede usarse la fórmula (i) del teorema 1.2.17. Pues  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty - (+\infty)$  pero  $a_n - b_n = 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (0) = 0$ .

**Ejemplo 1.2.20** 1. Encontrar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$ . Hemos visto que las sucesiones  $\{n\}$  y  $\{n+1\}$  no son convergentes, por tanto no podemos aplicar la propiedad (iv) del teorema 1.2.17, pero sí podemos transformar la expresión del término general de modo que podamos aplicar algunas de las afirmaciones de dicho teorema. Dividiendo el numerador y el denominador por  $n$ , obtenemos:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Por (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ . Por (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$ .

2. Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 4}{n^4 + 2}$ . Nuevamente en este caso para aplicar el teorema 1.2.17 debemos transformar la expresión, dividiendo numerador y denominador por  $n$  elevado a la mayor potencia, en este caso,  $n^4$ .

$$a_n = \frac{n^3 + 2n^2 - 4}{n^4 + 2} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^4}}{1 + \frac{2}{n^4}}.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , por (ii) sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$ . Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 2n^2 - 4}{n^4 + 2} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^4} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n^4} \right)} = \frac{0}{1} = 0$$

Para usar el teorema 1.2.17 es necesario, como se puede observar en los dos ejemplos anteriores, tener un mínimo de sucesiones convergentes de referencia. Para ello es bueno tener, aparte de la definición, algunos recursos técnicos para obtener convergencia como los que dan los siguientes teoremas:

**Teorema 1.2.21** Si la sucesión  $\{a_n\}$  es convergente, entonces  $\{|a_n|\}$  es convergente y  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|$ .

**Demostración:** Sea  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ; entonces para  $n$  suficientemente grande,  $|a_n - L| < \varepsilon$ . Usando propiedades del valor absoluto tenemos:

$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| < \varepsilon$$

lo cual nos dice que  $\{|a_n|\}$  converge y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$ . ■

**Teorema 1.2.22** (i) Si  $\{a_n\}$  es una sucesión convergente tal que  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ . Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$ .

- (ii) Si  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son dos sucesiones convergentes tales que  $a_n \leq b_n$ , para todo  $n$ . Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Demostración:**

- (i) Sea  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  y supongamos por contradicción que  $L < 0$ . Entonces  $-L > 0$ . Usando la definición de límite con  $\varepsilon = -L$ , tenemos que para  $n$  suficientemente grande

$$|a_n - L| < -L$$

En particular  $a_n - L < -L$  y por tanto  $a_n < 0$ , para  $n$  grande lo que contradice la hipótesis.

- (ii) Es consecuencia inmediata de (i) tomemos la sucesión  $c_n = b_n - a_n$ . Como  $a_n \leq b_n$  entonces  $c_n \geq 0$  y por (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \geq 0$ . Pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  por teorema 1.2.17. Así:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \blacksquare$$

**Observación 1.2.23** Este teorema no puede ser enunciado solo con la relación  $>$ ; por ejemplo:  $a_n = \frac{1}{n} > 0$ , para todo  $n$ ; pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Es decir, la relación  $\leq$  o  $\geq$  pasa bien a través del límite, pero no ocurre lo mismo con  $>$  o  $<$ .

**Teorema 1.2.24 Cálculo de límites por acotamiento**

Si  $a_n \leq c_n \leq b_n$  y si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , entonces la sucesión  $\{c_n\}$  es convergente y  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**Demostración:** Sea  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Entonces, para  $n$  suficientemente grande:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{y}; \quad |b_n - L| < \varepsilon.$$

Como  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , tenemos que  $a_n - L \leq c_n - L \leq b_n - L$ . Además que,  $-\varepsilon < a_n - L$  y  $b_n - L < \varepsilon$ , por tanto,  $-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon$ , lo que implica que  $|c_n - L| < \varepsilon$ , para  $n$  suficientemente grande.

Así,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ .  $\blacksquare$

**Corolario 1.2.25** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , entonces la sucesión  $\{a_n\}$  es convergente y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

**Demostración:**

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-|a_n|) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$$

Por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  $\blacksquare$

**Ejemplo 1.2.26** Calcular  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ , donde  $a_n$  está dado por:

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n}.$$

**Solución:** Para calcular este límite no se puede usar el teorema de suma de límites debido a que el número de sumandos de  $a_n$  depende de  $n$ . Razón por la cual cuando  $n$  crece el número de sumando también crece. En casos como este el teorema 1.2.24 es de gran utilidad.

Acotando cada sumando inferiormente por el menor de todos ellos y acotando superiormente cada sumando por el mayor de todos nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n^2+n} + \frac{n+2}{n^2+n} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n} &< a_n < \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+1} + \dots + \frac{n+n}{n^2+1} \\ \frac{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+n)}{n^2+n} &< a_n < \frac{(n+1) + (n+2) + \dots + (n+n)}{n^2+1} \\ \frac{n^2 + (1+2+\dots+n)}{n^2+n} &< a_n < \frac{n^2 + (1+2+\dots+n)}{n^2+1} \\ \frac{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n} &< a_n < \frac{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1} \\ \frac{3n^2+n}{2n^2+2n} &< a_n < \frac{3n^2+n}{2n^2+2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+n}{2n^2+2n} &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+n}{2n^2+2} \\ \frac{3}{2} &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n} \right) = \frac{3}{2}.$$

El siguiente teorema es una importante consecuencia del axioma del supremo.

**Teorema 1.2.27 Teorema de las sucesiones monótonas**

Toda sucesión monótona acotada es convergente. Si  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ ; entonces,  $a_n \leq \sup \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ; si  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$  entonces,  $a_n \geq \inf \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Demostración:** Haremos sólo uno de los casos de monotonía, pues ambos ocupan las mismas ideas.

Si la sucesión  $\{a_n\}$  es monótona creciente y acotada, existe  $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = S$ .

Demostraremos que  $S$  es el límite de  $\{a_n\}$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , por teorema 1.1.35, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $S - \varepsilon < a_N$ . Pero la sucesión  $\{a_n\}$  es creciente. Entonces,

$$S - \varepsilon < a_N \leq a_n < S + \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq N$$

por lo cual  $|a_n - S| < \varepsilon$ , para todo  $n \geq N$ .

Así,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S$ . ■

**Ejemplo 1.2.28** La sucesión definida en el ejemplo 1.2.10, parte 4, es creciente y acotada superiormente. En virtud del teorema recién demostrado, ella converge a su supremo que debe ser menor o igual a 8. Como ya sabemos que el límite existe, podemos calcularlo usando la definición :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 4.$$

Tomamos límite en ambos miembros y nos queda:

$$L = \frac{1}{2}L + 4.$$

Despejando  $L$ , obtenemos que  $L = 8$ .

### 1.2.3. Divergencia de sucesiones hacia $\pm\infty$

**Definición 1.2.29** (i) Diremos que una sucesión diverge a  $+\infty$ , si para cada número  $M$  existe un número natural  $N$  tal que  $a_n > M$  para todo  $n \geq N$ . Esto lo denotaremos simbólicamente por  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

(ii) Diremos que una sucesión diverge a  $-\infty$ , si para cada número negativo  $M$  existe un número natural  $N$  tal que  $a_n < M$ , para todo  $n \geq N$ .

**Ejemplo 1.2.30** 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$

3. Toda sucesión creciente no acotada superiormente diverge a  $+\infty$ .

4. Toda sucesión decreciente no acotada inferiormente diverge a  $-\infty$ .

Ahora veremos algunas propiedades de las sucesiones divergentes:

**Teorema 1.2.31** (i) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , (o bien  $-\infty$ ), entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = 0$ .

(ii) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  y si la sucesión  $\{b_n\}$  es acotada inferiormente, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n + b_n\} = +\infty$ .

(iii) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  y si  $b_n \geq c > 0$ , para todo  $n$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$ .

(iv) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  y  $a_n \leq b_n$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ .

**Demostración:**

(i) Supongamos  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Aplicando la definición 1.2.29 a  $M = \frac{1}{\varepsilon}$ , tenemos que existe  $N$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $a_n > M > 0$ , o lo que es lo mismo,

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N.$$

Es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , tomando  $-M = \frac{1}{\varepsilon}$  y con argumentos análogos se obtiene la conclusión.

(ii)  $\{b_n\}$  acotada inferiormente implica que existe  $r < b_n$ , para todo  $n$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , dado  $M > 0$ , existe  $N$  tal que  $a_n > M - r$ , cuando  $n \geq N$ . Así  $a_n + b_n > M$ ; cuando  $n \geq N$  lo que nos dice que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$ .

(iii) Dado  $M > 0$ , tenemos que existe  $N$  tal que  $a_n > \frac{M}{c}$ , cuando  $n \geq N$ . Multiplicando esta desigualdad por  $b_n \geq c$ , obtenemos  $a_n b_n \geq M$ . Por tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty$ .

(iv) Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ . Dado  $M > 0$ , existe  $N$  tal que  $a_n > M$ , para todo  $n \geq N$ . Pero  $b_n \geq a_n$ , entonces  $b_n \geq M$ , para todo  $n \geq N$ . Así  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ . ■

**Observación 1.2.32** 1. El recíproco que (i) es falso:  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$  converge a 0, pero  $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$  no diverge a  $+\infty$  ni a  $-\infty$ .

2. Caso particular de (ii) es que si dos sucesiones divergen a  $+\infty$ , la suma de ellas diverge a  $+\infty$ . Caso particular de (iii) es que el producto de 2 sucesiones que divergen a  $+\infty$ , diverge a  $+\infty$ .

**Ejemplo 1.2.33** Si  $c > 0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} nc = +\infty$ , aplicando (iii) del teorema 1.2.31.

$$\text{Ejemplo 1.2.34 } \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1 \\ \text{no existe} & \text{si } r \leq -1 \end{cases}$$

**Demostración:**

- Si  $r > 1$ , entonces  $r$  puede escribirse

$$r = 1 + h \quad ; \quad h > 0.$$

$$r^n = (1 + h)^n \tag{1.6}$$

Usando el teorema del binomio se tiene que

$$(1 + h)^n = 1 + nh + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots + h^n}_{\text{suma de terminos positivos}}$$

Por lo tanto:

$$(1 + h)^n > 1 + nh. \tag{1.7}$$

De 1.6 y 1.7 se concluye.

$$r^n > 1 + nh; \quad h > 0$$

En virtud del teorema 1.2.31 parte (iv) tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n > \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + nh) = +\infty.$$

Por lo tanto,

Si  $r > 1$ ,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = +\infty}$$

- Si  $|r| < 1$ .

Por propiedad del valor absoluto tenemos que:

$$|r^n| = |r|^n < 1$$

Lo que implica que

$$\frac{1}{|r|^n} > 1$$

Así,

$$\frac{1}{|r^n|} = \left(\frac{1}{|r|}\right)^n > 1$$

Por lo anteriormente demostrado

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|r^n|} = +\infty$$

Usando el teorema 1.2.31 parte (a), podemos concluir que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |r^n| = 0 \quad ; \quad \text{si } |r| < 1$$

- Si  $r = 1$ , entonces  $r^n = 1$ , cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo cual en este caso, la sucesión  $\{r^n\}$  se reduce a la sucesión constante y su límite es 1.
- Si  $r = -1$  entonces

$$r^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & ; \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Esto nos dice que si  $r = -1$ , la sucesión  $\{r^n\} = \{(-1)^n\}$  oscila entre 1 y -1, razón por la cual la sucesión no tiene límite en  $\overline{\mathbb{R}}$ .

- Si  $r < -1$

$$\begin{aligned}r &= -1|r| \\ r^n &= (-1)^n|r|^n\end{aligned}$$

Como  $|r| > 1$  entonces  $|r|^n \rightarrow +\infty$  y  $(-1)^n$  oscila entre -1 y 1.

Entonces la sucesión oscila entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , por lo tanto no tiene límite en  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Observación 1.2.35** La desigualdad 1.7 en la demostración del ejemplo anterior se llama **desigualdad de Bernoulli**.

**Ejemplo 1.2.36 La serie geométrica:** Una importante aplicación del límite demostrado en el ejemplo 1.2.34 es el cálculo de la suma de una serie geométrica. Primero veremos un caso particular que corresponde a la suma de la paradoja de Zenón que citamos al comienzo de esta sección.

■ Si  $a_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

demostraremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . En efecto,

sea  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , entonces  $a_n = u_1 + \dots + u_n$ . La sucesión  $\{u_n\}$  corresponde a una progresión geométrica que no contiene el término  $u_0 = 1$ .

Consideremos la progresión geométrica de razón  $r = \frac{1}{2}$ , usando la fórmula de factorización:  $1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n)$  sabemos que

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= 2.\end{aligned}$$

Pero a nosotros nos interesa  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$ , que podemos calcularlo escribiendo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Con esto se tiene lo que la experiencia nos dice: es posible llegar de  $A$  hasta  $B$  por este proceso de recorrer sucesivas mitades.

- **Caso general:** Dada la progresión geométrica:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= r a_{n-1} ; n \geq 1, \end{aligned}$$

se llama **serie geométrica de razón  $r$**  a la sucesión definida por:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_n &= b_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

Analizaremos la existencia de  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

Observemos que

$$b_n = 1 + r + \dots + r^n.$$

generalizando el cálculo del caso particular, tenemos que

$$1 + r + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} ; \text{ si } r \neq 1,$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + r + \dots + r^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \right)$ , como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0 \iff |r| < 1,$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{1 - r}$  si y sólo si  $|r| < 1$ .

Si  $|r| = 1$ , entonces  $b_n = 1 + 1 + \dots + 1$ , sucesión que diverge a  $+\infty$  ó  $b_n = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$ , sucesión que oscila entre 0 y 1, por tanto, tampoco converge.

Si  $r > 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = +\infty$  y  $b_n$  diverge.

Si  $r < -1$ , entonces  $r^{n+1} = (-1)^{n+1} |r|^{n+1}$  oscila entre  $-\infty$  y  $+\infty$ .

**Ejemplo 1.2.37** Calcular el límite de

$$1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

Como  $|r| = \left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ ; su límite es:  $\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$ .

**Ejemplo 1.2.38 Definición del número e**

Este importante número irracional simboliza el límite de la sucesión  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

En este ejemplo demostraremos que la sucesión  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  es monótona creciente y acotada superiormente.

**Solución:**  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , en particular tenemos:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25, \quad a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2,\overline{370}.$$

Demostraremos que la sucesión es creciente y acotada para poder aplicar el teorema 1.2.27 y así obtener la existencia del límite.

Usando el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3!} + \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n})\dots (1 - \frac{n-1}{n})}{n!}, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2!} + \\ &+ \frac{(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1})}{3!} + \dots \\ &+ \frac{(1 - \frac{1}{n+1})\dots (1 - \frac{n-1}{n+1})}{n!} + \\ &+ \frac{(1 - \frac{1}{n+1})\dots (1 - \frac{n}{n+1})}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Puede verse fácilmente que los sumandos de  $a_{n+1}$  son mayores o iguales que los respectivos sumandos que forman  $a_n$ . Por tanto,  $a_n < a_{n+1}$ . Para demostrar que la sucesión es acotada basta observar que

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

en virtud del ejemplo 1.2.36, que está desarrollado más adelante. Como la sucesión  $\{a_n\}$  es acotada y creciente, existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Este importante número juega un papel muy importante en análisis y se puede demostrar que es irracional. Distintas aproximaciones de él se pueden obtener calculando  $a_n$  para valores grandes de  $n$ .

$$e = 2,71828182\dots\dots\dots$$

Este ejemplo es una muestra de como el axioma del supremo permite obtener los números irracionales a partir de sucesiones de números racionales.

### Límites de referencias

Los siguientes límites son los mínimos que Ud. debe conocer y reconocer. Con ellos y los teoremas de operatoria de límites, la mayoría de los límites que Ud. encontrará serán abordables.

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$  ;  $c$  constante
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
3. Si  $c$  es constante:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} cn = \begin{cases} 0 & \text{si } c = 0 \\ +\infty & \text{si } c > 0 \\ -\infty & \text{si } c < 0 \end{cases}$$

4.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ .
5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .
6.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , si  $a$  es una constante positiva.

$$7. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ +\infty & \text{si } r > 1 \\ \text{no existe} & \text{si } r \leq -1 \end{cases}$$

$$8. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + r + r^2 + \dots + r^n) = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & ; \text{ si } |r| < 1 \\ +\infty & : \text{ si } r \geq 1 \\ \text{no existe} & : \text{ si } r \leq -1 \end{cases}$$

$$9. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

#### 1.2.4. Ejercicios resueltos

1. Calcule los siguientes límites:

$$a) \quad a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}.$$

**Solución:**

Usando la fórmula  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , el término general de la sucesión puede escribirse como:

$$a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Aplicando los teoremas sobre aritmética de límites, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

$$b) \quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

**Solución:**

En este caso no se puede usar el teorema 1.2.17, pues nos quedará una forma del tipo  $+\infty - \infty$  de lo cual nada puede concluirse. En este caso conviene hacer la siguiente transformación del término general:

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \text{ luego}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

$$c) \quad a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

**Solución:**

Si calculamos en directo el límite de los factores, nos queda algo del tipo  $+\infty \cdot 0$ , que tampoco nos permite concluir nada. Así debemos transformar el término general:

$$\text{Como } \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

dividiendo numerador y denominador por  $\sqrt{n}$ , nos queda:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1}}.$$

$$\text{Por tanto, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

$$d) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

**Solución:**

Usaremos el teorema 1.2.24. Para ello acotaremos superior e inferiormente el término general:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ , obtenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

2. Si  $a_n \geq 0$  demuestre que la sucesión  $\{a_n\}$  converge a  $L$ . Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n}$ .

**Solución:**

En este caso el candidato a límite es  $\sqrt{L}$ . En primer lugar, observemos que  $\sqrt{a_n} - \sqrt{L} = \frac{a_n - L}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}$ . En segundo lugar, como  $\{a_n\}$  es convergente, ella es acotada inferiormente. Sea  $m$  una cota inferior positiva de  $\{a_n\}$ . Entonces,

$$0 \leq m \leq a_n \text{ implica } \sqrt{m} \leq \sqrt{a_n}.$$

Por otro lado,

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{L} = \sqrt{a_n} - \sqrt{L} \cdot \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} = \frac{a_n - L}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}.$$

Por tanto,

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| \leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}.$$

Así, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que si  $n > N$ . Entonces  $|a_n - L| < \varepsilon(\sqrt{a_n} + \sqrt{L})$ , lo que implica que  $(\sqrt{a_n} - \sqrt{L}) \leq \varepsilon$ . Lo que nos permite concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$ .

3. Demuestre que: Si  $a > 0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

**Solución:**

Supongamos que  $a > 1$  y sea  $u_n = \sqrt[n]{a}$ . Usando propiedades de las potencias de exponente fraccionario tenemos que:  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$  implica  $u_{n+1} < u_n$ . Lo que nos dice que la sucesión  $\{u_n\}$  es decreciente. Además, es acotada inferiormente por 1, pues para todo  $n \geq 2$ ,

$$u_1 = a > u_n > 1.$$

Por teorema 1.2.27, existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \inf \{u_n : n \in \mathbb{N}\} = L \geq 1$ .

Para probar que  $L = 1$ , supongamos que  $L > 1$ , es decir,  $L = 1 + h$ , donde  $h > 0$ . Como  $L = 1 + h < \sqrt[n]{a}$  implica que  $(1 + h)^n < a$  y usando la desigualdad de Bernoulli ( ver observación 1.2.35),

$(1 + h)^n > 1 + nh$  tenemos que  $1 + nh < a$ , para cada  $n$ . Pero,

$$+\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) < \lim_{n \rightarrow \infty} a = a.$$

Lo que es una contradicción. Por tanto,  $h = 0$  y  $L = 1$ . Si  $0 < a < 1$ , entonces  $\frac{1}{a} \geq 1$

y por lo recién probado  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}} = 1,$$

y de aquí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

4. Demuestre que la sucesión  $a_n = \sqrt[n]{n}$  converge a 1.

**Solución:**

Como cualquier raíz de un número mayor que uno es mayor que uno, podemos escribir:

$\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + k_n$ , donde  $k_n \geq 0$  y depende de  $n$ . Entonces, usando la desigualdad de Bernoulli ( ver observación 1.2.35) tenemos:

$$\sqrt{n} = (1 + k_n)^n > 1 + nk_n > nk_n,$$

y por tanto,  $k_n < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

$$1 < \sqrt[n]{n} = (1 + k_n)^2 = 1 + 2k_n + k_n^2 < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Por el teorema 1.2.24, podemos concluir que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

5. La siguiente sucesión definida por recurrencia es una manera de aproximar  $\sqrt{2}$ .

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right). \end{aligned}$$

Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ .

**Solución:**

Observemos que

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \left| \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2}{2a_n} \right| = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n}$$

pues  $a_n \geq 0$ , para todo  $n$ . A su vez  $(a_n - \sqrt{2})^2 = \frac{(a_{n-1} - \sqrt{2})^4}{(2a_{n-1})^2}$ . Por inducción se puede demostrar que:

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{(1 - \sqrt{2})^{2n}}{2^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

$$(1 - \sqrt{2})^{2n} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

Así, existe  $N$  tal que si  $n \geq N$ ,

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| < \varepsilon.$$

6. Dada la sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{c} \\ a_{n+1} &= \sqrt{c + a_n} \end{aligned}$$

- a) Demuestre que  $\{a_n\}$  es creciente  
 b) Demuestre que si  $L = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$ , entonces  $L + c = L^2$ .  
 c) Demuestre por inducción que  $\{a_n\}$  es acotada superiormente por  $L$ .  
 d) Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

**Solución:**

- a)  $c > 0 \implies a_n \geq 0$ ; para todo  $n$ . Además, como las cantidades subradicales van creciendo,  $a_n$  crece con  $n$ ,  
 b)  $L^2 = \frac{1}{4} (1 + 2\sqrt{1 + 4c} + 1 + 4c) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} + c = L + c$ .  
 c)  $a_1 = \sqrt{c} < L$ . Supongamos que  $a_n < L$  y demostremos que  $a_{n+1} < L$ .

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + L} = \sqrt{L^2} = L.$$

Así, vemos que  $\{a_n\}$  es creciente y acotada superiormente por  $L$ . Entonces, por teorema 1.2.27, existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n = M \leq L$ .

d) Como  $L$  existe, y

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{c + a_n} \\ a_{n+1}^2 &= c + a_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (c + a_n) \iff M^2 = c + M. \end{aligned}$$

despejando el valor de  $M$  tenemos

$$M = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}.$$

Como  $M > 0$ ,  $M = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} = L$ . En particular, si  $c = 2$ , entonces  $L = 2$ .

7. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots,$$

y encontrar su límite, si es que existe.

**Solución:** Observemos que esta sucesión puede definirse por recurrencia del modo siguiente:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_n &= \sqrt{2a_{n-1}}. \end{aligned}$$

Demostraremos que  $(a_n)$  es una sucesión acotada superiormente por 2 y es creciente. Procediendo por inducción tenemos:  $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ . Supongamos que  $a_{n-1} \leq 2$ , entonces  $a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$ .

Para analizar el crecimiento demostraremos que  $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$ . En efecto,  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{\sqrt{2a_n}} = \sqrt{\frac{a_n}{2}}$ . Como  $a_n \leq 2$ , tenemos que  $\frac{a_n}{2} \leq 1$  y por lo tanto,  $\sqrt{\frac{a_n}{2}} \leq 1$ . Lo cual equivale a tener que,  $a_n \leq a_{n+1}$ .

Usando teorema 1.2.27, existe  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Esto nos permite calcularlo usando la fórmula de recurrencia:  $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ , implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}}$ , y por consiguiente,  $L = \sqrt{2L}$ , lo que nos lleva a resolver la ecuación  $L^2 - 2L = 0$  que tiene por solución  $L = 0$  o  $L = 2$ . Como la sucesión es creciente y  $a_1 \geq 1$ , podemos deducir que  $L = 2$ .

8. ¿Cuál número es mayor,  $1,000,000^{1,000,000}$  ó  $1,000,001^{999,999}$  ?

**Solución:** Si  $n = 10^6$ , entonces debemos averiguar cuál es el máx  $\{n^n, (n+1)^{n-1}\}$ . Para ello estudiaremos el cociente entre ambos números.

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Usando el resultado del ejercicio resuelto 1.2.38 de esta misma sección, tenemos:  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ , para todo  $n$ . Así,

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < \frac{3}{10^6 + 1} < 1.$$

Por lo tanto,  $(n+1)^{n-1} < n^n$ . Es decir,  $1,000,000^{1,000,000} > 1,000,001^{999,999}$ .

9. Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^{4n}}{\left(\sum_{k=1}^n 4k^3\right)^n}.$$

**Solución:** Usando la fórmula de suma de cubos que se demuestra por inducción:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

tenemos:  $\sum_{k=1}^n 4k^3 = 4 \sum_{k=1}^n k^3 = 4 \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ . Así,

$$\frac{(1+n)^{4n}}{\left(\sum_{k=1}^n 4k^3\right)^n} = \frac{(1+n)^{4n}}{(n^2(n+1)^2)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2.$$

El teorema 1.2.17, nos permite concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^{4n}}{\left(\sum_{k=1}^n 4k^3\right)^n} = e^2.$$

10. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + a'n + b'} \right].$$

**Solución:** Multiplicando y diviendo la expresión por la suma de las raíces, nos queda:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + a'n + b'} &= \frac{n^2 + an + b - (n^2 + a'n + b')}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + a'n + b'}} \\ &= \frac{(a - a')n + (b - b')}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + a'n + b'}} \\ &= \frac{(a - a') + \frac{(b - b')}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{a'}{n} + \frac{b'}{n^2}}}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + a'n + b'} \right] = \frac{a - a'}{2}.$$

11. Encontrar el límite de una sucesión que comienza con los números positivos  $a, b$ , y que en cada elemento es la media geométrica entre los dos anteriores.

**Solución:** Sean  $a, b, u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, \dots$ . Entonces, tenemos:  
 $u_1 = \sqrt{ab}, u_2 = \sqrt{u_1 b}, \dots, u_{n-1} = \sqrt{u_{n-3} u_{n-2}}, u_n = \sqrt{u_{n-2} u_{n-1}}$ . Multiplicando miembro a miembro las igualdades, nos queda:

$$\begin{aligned} u_1 u_2 \dots u_n &= \sqrt{ab^2 u_1^2 u_2^2 \dots u_{n-2}^2 u_{n-1}^2} \\ &= \sqrt{ab^2 u_1 u_2 \dots u_{n-1}}. \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos:  $\sqrt{u_{n-1}} u_n = \sqrt{ab^2}$  y tomando límite en esta última igualdad tenemos:

$$L^{1/2} \cdot L = (ab^2)^{1/2},$$

esto es  $L^{3/2} = (ab^2)^{1/2}$ . Así concluimos que la sucesión converge a  $L = \sqrt[3]{ab^2}$ .

12. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right).$$

**Solución:** Usando la descomposición  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  tenemos que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \\ &\quad + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) \\ &\quad - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

13. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+3)} \right).$$

**Solución:** Como en el ejercicio 12 para calcular este límite se debe descomponer el término general de la suma en fracciones simples o parciales, quedando:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{1}{3k} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{6(k+3)}.$$

Por tanto la suma puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{3 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{6 \cdot 4} \\ &+ \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 5} \\ &+ \frac{1}{3 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 6} \\ &+ \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{6 \cdot 7} \\ &+ \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{3 \cdot n} - \frac{1}{2 \cdot (n+1)} + \frac{1}{6 \cdot (n+3)}. \end{aligned}$$

Podemos observar que el  $\frac{1}{6 \cdot 4}$  de la primera línea se compensa con el  $\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 4}$ , que resulta de sustraer el  $\frac{1}{2 \cdot 4}$  de la tercera línea con el  $\frac{1}{3 \cdot 4}$  de la cuarta línea. Similarmente, el  $\frac{1}{6 \cdot 5}$  de la segunda línea se compensa con el  $\frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 5}$  que se obtiene de sustraer el  $\frac{1}{2 \cdot 5}$  de la cuarta línea al  $\frac{1}{3 \cdot 5}$  de la quinta línea. Sucesivamente tenemos:

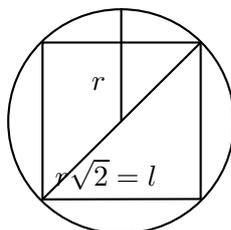
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{3 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3} * \\ &+ \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+3)} \\ &= \frac{12 - 9 + 6 - 6 + 4}{36} + \frac{1-3}{6(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{6(n+3)} \\ &= \frac{7}{36} - \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{6(n+3)} \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+3)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{36} - \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{6(n+3)} \right) = \frac{7}{36}.$$

14. Dentro de un círculo de radio  $r$  se inscribe un cuadrado, en este cuadrado se inscribe un círculo y así sucesivamente. Calcule las sumas de la áreas de los círculos y los cuadrados así obtenidos y suponiendo que el proceso se prolonga indefinidamente.

**Solución:**



El lado  $l$  del primer cuadrado inscrito, usando el teorema de Pitágoras es:  $l = r\sqrt{2}$ . Si denotamos por  $A_i$  el área del círculo  $i$  y por  $a_i$  el área del cuadrado  $i$ , tenemos:

$$A_1 = \pi r^2; a_1 = 2r^2; A_2 = \pi \frac{r^2}{2}; a_2 = r^2; A_3 = \pi \frac{r^2}{4}; a_3 = \frac{r^2}{2}; \dots$$

Por lo tanto, la suma de las áreas de los círculos es:

$$\sum_{i=1}^n A_i = \pi r^2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \dots \right),$$

la que puede ser calculada usando la fórmula de la suma de una serie geométrica que en este caso nos da  $2\pi r^2$ . Análogamente, la suma total de las áreas de los cuadrados es

$$\sum_{i=1}^n a_i = r^2 \left( 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \dots \right),$$

la cual da  $4r^2$ .

15. **La sucesión de Fibonacci**. Esta sucesión fue propuesta por Leonardo Fibonacci también conocido como Leonardo de Pisa (1170? - 1250?). Considere la sucesión de números que comienza con 0 y 1; para obtener un número se suman los dos precedentes. Es decir:

$$u_0 = 0; u_1 = 1; u_2 = 0+1 = 1; u_3 = 1+1 = 2; u_4 = 1+2 = 3; \dots u_{n+1} = u_n + u_{n-1}.$$

- a) Demuestre que la sucesión formada por las razones de dos términos consecutivos  $x_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$  satisface la relación

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}.$$

- b) Demuestre que las razones de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci,  $x_n = \frac{u_n}{u_{n+1}}$ , converge y calcule su límite.

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \\ &= \frac{1}{\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{\frac{u_{n+1} + u_n}{u_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{u_n}{u_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{1 + x_n} \end{aligned}$$

- b) Como paso previo demostraremos, usando inducción, que  $u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 + (-1)^n$ , con  $n \geq 2$ . Si  $n = 2$  se tiene  $u_3u_1 = 2 \cdot 1 = 2$ . reemplazando  $n = 2$  en el segundo miembro de la igualdad que queremos demostrar, obtenemos:  $u_2^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$ . Por lo tanto, la igualdad es válida para  $n = 2$ . Ahora supongamos que  $u_{k+1}u_{k-1} = u_k^2 + (-1)^k$  para todo  $k \leq n$  y consideremos

$$\begin{aligned} u_{n+2}u_n &= (u_{n+1} + u_n)u_n \\ &= (u_{n+1} + u_{n-1} + u_{n-2})u_n \\ &= ((u_n + u_{n-1}) + u_{n-1} + u_{n-2})u_n \\ &= u_n^2 + 2u_{n-1}u_n + u_{n-2}u_n \\ &= u_n^2 + 2u_{n-1}u_n + u_{n-1}^2 + (-1)^{n-1}; \text{ usando la hipótesis de inducción;} \\ &= (u_n + u_{n-1})^2 + (-1)^{n-1} \\ &= u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Para analizar la existencia del límite veamos la diferencia entre dos términos consecutivos

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \\ &= \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1} u_{n+2}} \\ &= \frac{u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} - u_{n+1}^2}{u_{n+1} u_{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} u_{n+2}} \end{aligned}$$

Así vemos que la sucesión no es creciente ni decreciente, pero como

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{u_{n+1} u_{n+2}},$$

las distancias entre los términos de la sucesión tiende a cero, la sucesión tiene un límite que llamaremos  $L$ . Según el ítem anterior,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{1 + x_n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} &= \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \\ L &= \frac{1}{1 + L}, \quad \text{lo que implica} \\ L^2 + L - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones a esta última ecuación son  $L = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Por ser  $x_n > 0$ , para todo  $n$ ,  $L$  debe ser un número positivo. Así,  $L = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

16. a) Demuestre que la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

converge a un número  $L$  comprendido entre  $\frac{1}{2}$  y 1.

b) Pruebe que

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

converge y que su límite es el mismo que el de la sucesión  $(a_n)$ .

c) Demuestre que  $\frac{37}{60} < L < \frac{57}{60}$ .

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)} \right) - \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\
 &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\
 &= \frac{2(n+1)n + (2n+1)n - (2n+1)(2n+2)}{2n(2n+1)(n+1)} \\
 &= \frac{-3n-2}{2n(2n+1)(n+1)} \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $a_{n+1} < a_n$ , lo que nos dice que la sucesión es decreciente, por otro lado es fácil ver que  $a_n$  está acotado inferiormente por  $\frac{1}{2}$ , por teorema 1.2.27 la sucesión es convergente. Acotando el término general tenemos que:

$$(n+1)\frac{1}{2n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} < (n+1)\frac{1}{n},$$

así,  $\frac{1}{2} < a_n < 1 + \frac{1}{n}$ . Usando el teorema 1.2.22, tenemos que la sucesión converge hacia un número  $L$  tal que  $\frac{1}{2} \leq L \leq 1$ .

b) Veamos que la sucesión  $(b_n)$  es creciente. En efecto,

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= \left( \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \right) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\
 &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{2(n+1) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} \\
 &= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la sucesión  $b_n$  es creciente. Por otro lado es fácil ver que es acotada superiormente por 1, acotando el término general nos queda,

$$n\frac{1}{2n} < b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < n\frac{1}{n},$$

es decir,  $\frac{1}{2} < b_n < 1$ . Por ser una sucesión creciente y acotada superiormente, ella es convergente. Ahora,  $a_n - b_n = \frac{1}{n}$  implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- c)  $L = \inf\{a_n\} = \sup\{b_n\}$ , por lo tanto,  $b_n \leq L \leq a_n$ , para todo  $n$ . En particular,  $b_3 \leq L \leq a_3$ .

$$a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}, \quad b_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}. \text{ Así, vemos que:}$$

$$\frac{37}{60} \leq L \leq \frac{57}{60}.$$

Si uno desea obtener otras cotas para  $L$  debemos tomar otros  $n$ . Por ejemplo, si  $n = 4$ ,  $\frac{533}{840} \leq L \leq \frac{743}{840}$ .

17. a) Demuestre, sin usar el teorema del binomio, que  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  es creciente y que  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  es decreciente.  
b) Calcule el límite de ambas sucesiones.

**Solución:**

- a) Para estudiar el crecimiento de la sucesión  $(a_n)$  demostraremos que el cociente  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  es mayor que 1. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &> \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \quad (\text{usando la desigualdad de Bernoulli}), \\ &= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} \\ &> 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que  $(a_n)$  es una sucesión creciente. Siguiendo la misma técnica para sucesión  $(b_n)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}\right)^{n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \\ &> \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) \frac{n+1}{n+2}, \quad (\text{usando la desigualdad de Bernoulli}), \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n} > 1. \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $(b_n)$  es decreciente.

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e, \text{ por otro lado tenemos que } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = e \cdot 1 = e.$$

18. Convergencia de la media aritmética.

- Si  $\{a_n\}$  converge a  $L$ , entonces la sucesión de las medias aritméticas también converge a  $L$ .
- Demuestre que la propiedad se conserva cuando  $L = \pm\infty$ .
- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$ .
- Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n}$ .

**Solución:**

- Sea  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Entonces, queremos demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = L$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que si  $n \geq N$ , entonces  $|a_n - L| < \varepsilon$ , en particular podemos escribir las  $(n - N)$  desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} L - \varepsilon &< a_{N+1} < L + \varepsilon \\ L - \varepsilon &< a_{N+2} < L + \varepsilon \\ \dots &< \dots < \dots \\ L - \varepsilon &< a_n < L + \varepsilon \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades nos queda:

$$(n - N)(L - \varepsilon) < a_{N+1} + \dots + a_n < (n - N)(L + \varepsilon).$$

Dividiendo toda la desigualdad por  $n$ , obtenemos:

$$(L - \varepsilon) \frac{(n - N)}{n} < \frac{a_{N+1} + \dots + a_n}{n} < \frac{(n - N)}{n} (L + \varepsilon). \quad (1)$$

Por otro lado, para  $N$  fijo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{n} = (a_1 + \dots + a_N) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Por tanto, para  $n$  suficientemente grande,

$$-\varepsilon < \frac{a_1 + \dots + a_N}{n} < \varepsilon. \quad (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$\frac{(n - N)}{n} (L - \varepsilon) - \varepsilon < \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} < \left(\frac{n - N}{n}\right) (L + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - N}{n}\right) = 1$  y usando el teorema 1.2.22 tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(n - N)}{n} (L - \varepsilon) - \varepsilon \right] < \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right] < \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{n - N}{n}\right) (L + \varepsilon) + \varepsilon \right].$$

$$L - 2\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right] \leq L + 2\varepsilon$$

$$\left| \left[ \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right] - L \right| \leq 2\varepsilon \quad ; \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right) = L.$$

b) Si  $L = +\infty$ . Entonces, dado  $M > 0$ , existe  $N$  tal que si  $n > N$ ,

$$a_{N+1} > M, \quad a_{N+2} > M, \dots$$

sumando miembro a miembro estas desigualdades:

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_n > (n - N)M$$

dividiendo la desigualdad por  $\frac{1}{n}$ , nos queda:

$$\frac{a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_n}{n} > M \frac{n-N}{n}.$$

Considerando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  y que  $N$  está fijo con respecto a  $n$ , para  $n$  suficientemente grande

$$\frac{a_1 + \dots + a_N}{n} > -\frac{M}{2}.$$

Por tanto,

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} > \left(\frac{n-N}{n}\right)M - \frac{M}{2} = \frac{M}{2} - \frac{N}{n}M,$$

lo que implica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \geq \frac{M}{2} > \frac{M}{3}.$$

Así vemos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) = +\infty.$$

Si  $L = -\infty$ , la demostración es análoga.

- c) Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , el límite dado también vale 1.  
 d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n}\right) = \infty$ , pues  $a_n = n$  diverge a  $\infty$ .

19. a) Demuestre que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = L$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = L$ .  
 b) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$ .  
 c) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n}$  cuando  $p$  es un número fijo mayor que 1.

**Solución:**

- a) Sea

$$\begin{cases} b_n = a_n - a_{n-1} & n > 1 \\ b_1 = a_1 \end{cases}$$

Entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$  por hipótesis y según el ejercicio 18,

$$\frac{b_1 + \dots + b_n}{n} = \frac{a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})}{n} = \frac{a_n}{n}$$

converge también a  $L$ .

- b) Definiendo  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ , tenemos que  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}$ , sucesión que tiende a 0. Como  $\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \dots + \frac{1}{n^2}$ , usando la parte (a) el límite pedido vale 0.
- c) Definiendo  $a_n = p^n$ , tenemos que  $a_{n+1} - a_n = p^n(p-1)$ , sucesión que diverge a  $+\infty$  y por tanto,  $\frac{p^n}{n}$  diverge a  $+\infty$ .

20. Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de términos positivos.

- a) Demuestre que si  $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$  converge a un número positivo menor que 1, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- b) Demuestre que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  es mayor que 1, entonces  $\{a_n\}$  no converge.
- c) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ,  $\{a_n\}$  puede converger o no. Dé ejemplos de ambas posibilidades.
- d) Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

- e) ¿Para cuáles valores de  $x$ , la sucesión  $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$  converge? Calcule su límite cuando exista.
- f) ¿Para cuáles valores de  $x$ , la sucesión  $a_n = \frac{n}{x^n}$  converge?

**Solución:**

- a) Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $L < r < 1$ . Por definición 1.2.11, existe  $N$  tal que si  $n \geq N$ , entonces  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ , lo que implica  $a_{n+1} < ra_n$  para todo  $n \geq N$ . En particular, podemos observar que  $a_{N+1} < ra_N$  y  $a_{N+2} < ra_{N+1} < r^2 a_N$ . En general,  $a_n \leq r^{n-N} a_N$ , lo que nos dice que la sucesión  $(a_{N+n})_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada por la sucesión  $r^n a_N$  que converge a 0, ya que  $0 < r < 1$ , así  $0 \leq a_n \leq r^n a_N$  implica que  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 0$ .
- b) Si  $L > 1$ , sea  $r$  tal que  $L > r > 1$ , entonces existe  $N$  tal que si  $n \geq N$  tenemos que  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > r > 0$ , es decir,  $a_{n+1} > ra_n$ ;  $n \geq N$  de modo análogo a la parte previa. Por tanto,

$$a_n > r^{n-N} a_N; \text{ para todo } n.$$

Como  $r > 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-N} = \infty$  y consecuentemente  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

c) Si  $a_n = \frac{1}{n}$ ;  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1$  y  $a_n$  converge a 0.

Si  $a_n = n$ ; entonces  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ , por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

d)  $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ ;  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ . Por lo

cual,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{2} < 1$ , lo que implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ .

e)  $a_n = \frac{x^n}{n!}$ ; así  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x^{n+1} \cdot n!}{x^n (n+1)!} = \frac{x}{n+1}$  implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

0. Por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ .

f) Para  $a_n = \frac{n}{x^n}$  tenemos que  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{x^{n+1}} \cdot \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

Así,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{x} < 1$  cuando  $x > 1$ . Por tanto, si  $x > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^n} = 0$ ; si  $x < 1$ ,  $\frac{n}{x^n}$  diverge, si  $x = 1$ ,  $a_n = n$  que diverge a  $\infty$ .

### 1.2.5. Ejercicios propuestos

Calcular los siguientes límites cuando existan:

1.  $a_n = \frac{n^3 - 2n + 2}{n^5 + 8n}$

2.  $a_n = \frac{5n^4 + 3n^2 - 4}{3n^3 - 1}$

3.  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

4.  $a_n = \sqrt[n]{n+1}$

5.  $a_n = \sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+3}$

6.  $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$7. a_n = \frac{n}{10} - \left[ \frac{n}{10} \right]$$

$$8. a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n}.$$

$$9. a_n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots + (-1)^n \frac{1}{5^n}.$$

$$10. a_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + \dots + 3^n.$$

$$11. \sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots,$$

$$12. \sqrt{3}, \sqrt{3 + \sqrt{3}}, \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}, \dots,$$

$$13. \sqrt{6}, \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \dots,$$

14. Usando el ejercicio resuelto 10, calcule:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{n^2 + 5n - 2} - \sqrt{n^2 - 6n + 8} \right].$$

15. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 2)} \right).$$

**Indicación:** Ver el ejercicio resuelto 12.

16. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right).$$

**Indicación:** Ver el ejercicio resuelto 13.

17. Demuestre que la sucesión  $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$  tiene límite  $\frac{1}{k!}$ , donde  $k$  es un entero fijo.

18. Demuestre que la sucesión  $(a_n)$  definida por:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}; \text{ si } n > 2; \end{aligned}$$

es tal que  $a_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$  y calcule su límite.

19. Sea  $x$  un número real fijo, demuestre que la sucesión:

$$\left( \frac{[x] + [2x] + \dots + [nx]}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge y su límite es  $\frac{x}{2}$ .

**Indicación:** Este límite puede ser calculado por acotamiento, usando que  $y - 1 \leq [y] \leq y$ , cualquiera sea el número real  $y$ .

20. Demuestre que

$$\left( \frac{[nx]}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge a  $x$ .

**Indicación:** Este límite puede ser calculado por acotamiento, usando que  $nx - 1 \leq [nx] \leq nx$ , cualquiera sea el número real  $x$ .

21. Demuestre que

$$\left( \frac{[a_n]}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

donde  $a_n$  es el  $n$ -ésimo decimal de  $\pi$ , converge a 0.

**Indicación:** Este límite puede ser calculado por acotamiento, usando que  $0 < a_n < 1$  y  $[a_n] \geq a_n \leq [a_n] + 1$ , cualquiera sea el número real  $y$ .

22. Demuestre que  $5^n - n$  diverge hacia  $+\infty$ .
23. Pruebe una propiedad análoga a la del ejercicio 18 para la media geométrica de una cantidad finita de números.

a) Si  $a_n > 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ,  $L$  puede ser finito o  $\infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = L$ .

b) Si  $a_n > 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$  entonces,  $\sqrt[n]{a_n} = L$ .

c) Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

d) Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ .

e) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$ .

24. a) Pruebe que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  y si la sucesión  $\{b_n\}$  es acotada, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ .
- b) Muestre con ejemplos que si  $\{b_n\}$  no es acotada no se tiene la conclusión de (a).
25. a) Si  $0 < y \leq x$  y si  $a_n = (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}}$  demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ .
- b) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^n + \left( \frac{1}{3} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}}$ .
- c) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 5^n}$ .
26. Analizar la convergencia de la sucesión  $\frac{1}{1 + x^{2n}}$ , según sea el valor de  $x$ .
27. Dado  $a > 0$  y  $x_1 > 0$  cualquiera, demuestre que la sucesión definida por recurrencia  $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$  converge a  $\sqrt{a}$ .

## 1.3. Las funciones numéricas de variable continua

### 1.3.1. Definiciones básicas

Dado que  $\mathbb{R}$  o un intervalo de  $\mathbb{R}$  es la imagen abstracta de una magnitud que varía continuamente, tomaremos intervalos para establecer ciertas relaciones entre magnitudes que llamaremos funciones numéricas de variable continua.

**Definición 1.3.1** Sea  $I$  un intervalo y sea  $x \in I$ . Si mediante una cierta regla establecemos una correspondencia de modo que a cada  $x$  en el intervalo le corresponda un único  $y \in \mathbb{R}$ , decimos que  $y$  es una función numérica de  $x$ , lo que denotaremos como:

$$x \mapsto y \quad \text{o} \quad x \mapsto y(x) \quad \text{o} \quad x \mapsto f(x) \quad \text{o} \quad y = f(x).$$

$f$  simboliza a la función,  $x$  es la **variable independiente** e  $y$  es la **variable dependiente**.

**Definición 1.3.2** i) Al conjunto  $D(f) = \{x \in I : \text{existe } y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = f(x)\}$  se le llama **dominio** de la función.

ii) Al conjunto  $R(f) = \{y \in \mathbb{R} : \text{existe } x \in D(f) \text{ tal que } y = f(x)\}$ , se le llama **recorrido** de  $f$  o conjunto de valores de la función  $f$ .

iii) Al conjunto  $G(f) = \{(x, y) \in D(f) \times R(f) : y = f(x)\}$ , se le llama **gráfico** de  $f$ .

### Ejemplos:

1. **La función constante:** Es aquella que a cada  $x \in I$  le hace corresponder un mismo número  $c$ , en símbolos, se escribe  $f(x) = c$ .
2. **La función lineal no constante:** Es aquella que a cada  $x \in I$  le hace corresponder el número  $ax + b$ , con  $a, b$  constantes,  $a \neq 0$ , es decir,  $f(x) = ax + b$ .
3. **La función cuadrática:** Es aquella que a cada  $x \in I$  le hace corresponder el número  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ; con  $a, b, c$  constantes y  $a \neq 0$ .
4. **La función polinomial:** Es aquella que hace corresponder a cada  $x \in I$  el número  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , donde los  $a_i$  son constantes.
5. **La función racional:** Es aquella que se obtiene mediante cuocientes de polinomios, es decir:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

En este caso debemos observar que para aquellos  $x$  tal que  $q(x) = 0$ ,  $f(x)$  no está definida. Por tanto el dominio de una función racional lo constituye

$$\mathbb{R} - \{x : q(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}.$$

**Observación:** Podemos extender algunas de las propiedades de los números a las funciones, por ejemplo, podemos establecer una aritmética de funciones, podemos comparar funciones, estudiar si es acotada, si tiene máximos y mínimos, etc.

**Definición 1.3.3** Dadas dos funciones numéricas  $f$  y  $g$ , se definen las siguientes funciones cuyo dominio es  $D(f) \cap D(g)$  :

- (i)  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- (ii)  $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- (iii)  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  ; cuando  $g(x) \neq 0$  .

**Definición 1.3.4** Dadas dos funciones numéricas  $f$  y  $g$ , diremos que:

- (i)  $f = g$  si  $D(f) = D(g)$  y  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  en el dominio común.
- (ii)  $f < g$  si  $f(x) < g(x)$  para todo  $x \in D(f) \cap D(g)$ .

**Ejemplo:**

1. Dadas las funciones  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^2$  definidas sobre  $I = [0, 1]$ ; usando las propiedades de los números reales tenemos que para todo  $x \in [0, 1]$  ,  $0 < x^2 < x$ . Por tanto  $g(x) < f(x)$  , para todo  $x \in I$ . Es decir,  $f < g$  sobre  $[0, 1]$ .
2. Dadas las funciones  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^2$  definidas sobre  $J = [1, 2]$ ; usando las propiedades de los números reales tenemos que para todo  $x \in [1, 2]$  ,  $x^2 > x$ . Por tanto  $g(x) > f(x)$  , para todo  $x \in J$ . Es decir,  $g > f$  sobre  $[1, 2]$ .

**Definición 1.3.5** Diremos que la función  $f$  es **acotada**, si su recorrido es un conjunto acotado, es decir, si existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ , para todo  $x \in D(f)$ .

**Ejemplo:**

1. La función  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^2$  definidas sobre  $I = [0, 1]$  son acotadas, puesto que para todo  $x \in [0, 1]$  ,  $0 < x^2 < x \leq 1$  . Cualquier número  $M \geq 1$  satisface la definición.
2. En cambio, si  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^2$  son definidas sobre  $\mathbb{R}$ , no son acotadas.

**Definición 1.3.6** Dada una función  $f$  diremos que:

1.  $f$  es **estrictamente creciente** en un intervalo  $I$ , si para todo  $x_1, x_2 \in I$ , tal que  $x_1 < x_2$  se tiene que  $f(x_1) < f(x_2)$ .
2.  $f$  es **creciente en sentido amplio o creciente** sobre un intervalo  $I$ , si para todo  $x_1, x_2 \in I$  tal que  $x_1 < x_2$  se tiene que  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .
3.  $f$  es **estrictamente decreciente** sobre un intervalo  $I$ , si para todo  $x_1, x_2 \in I$  tal que  $x_1 < x_2$  se tiene que  $f(x_1) > f(x_2)$ .
4.  $f$  es **decreciente en sentido amplio o decreciente** sobre un intervalo  $I$ , si para todo  $x_1, x_2 \in I$  tal que  $x_1 < x_2$  se tiene  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .
5.  $f$  es **monótona** sobre  $I$  si es creciente o decreciente.

Por cierto la mayoría de las funciones presentan cierto tipo de monotonía a tramos, es decir, sobre un intervalo son crecientes y sobre otro son decrecientes, por esta razón es interesante estudiar **las variaciones de una función**, es decir, averiguar sobre qué parte del dominio son crecientes o decrecientes.

**Ejemplo:**

1. La función:

$$f : [-3, 3] \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

es estrictamente decreciente sobre el intervalo  $[-3, 0]$  y es estrictamente creciente sobre  $[0, 3]$ .

2. **Definición 1.3.7** Dado  $x \in \mathbb{R}$ , se define la **parte entera de  $x$** , como el número entero  $m$ , que es el mayor entero menor o igual que  $x$ . Este número se denota por  $[x]$ . Es decir:

$$[x] \in \mathbb{Z} \text{ y si } n \in \mathbb{Z} \text{ es tal que } n \leq x, \text{ entonces } n \leq [x].$$

Por ejemplo,  $[3,2] = 3$ ,  $[-3,2] = -4$ .

La función parte entera  $h : x \mapsto [x]$  es creciente y, en particular, es constante a tramos.

Si  $x \in [n, n + 1)$ , entonces  $[x] = n$ , para todo  $n$  entero.

Así, si  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) = f(x_2)$  si  $x_1, x_2 \in [n, n + 1)$ ; para algún entero  $n$ . En cualquier otro caso  $f(x_1) < f(x_2)$ .

3. La función

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

No es creciente ni decreciente en ningún intervalo.

4. Una situación análoga se tiene con la función:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

**Definición 1.3.8** Sea  $f$  una función numérica no constante,  $I$  un intervalo contenido en el dominio de  $f$  y  $x_0$  un punto de  $I$ . Diremos que  $f$  tiene:

- (i) un **cero** en  $x_0$  cuando  $f(x_0) = 0$ .
- (ii) un **máximo** en  $x_0$ , con valor  $f(x_0)$ , cuando para todo  $x \in I$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$ .
- (iii) un **mínimo** en  $x_0$ , con valor  $f(x_0)$ , cuando para todo  $x \in I$ ,  $f(x) \geq f(x_0)$ .
- (iv) un **extremo** en  $x_0$ , cuando  $f$  tiene ya sea un máximo o un mínimo en  $x_0$ .

**Ejemplo:**

1. Consideremos la función:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = x^2 - 4 .$$

- a) Como  $f(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0$ . Entonces los ceros de la función son  $x_1 = 2$  y  $x_2 = -2$ .
- b) Usando las desigualdades estudiadas en la primera sección, podemos ver que  $f(x) < 0$  cuando  $-2 < x < 2$  y para todos los otros valores de  $x$ , la función es positiva. Por tanto, su valor mínimo lo alcanza en el intervalo  $[-2, 2]$ . Como el cuadrado de un número y su inverso aditivo tienen el mismo cuadrado, basta analizar lo que sucede en  $[0, 2]$ . Usando propiedades de las potencias, sabemos que el cuadrado crece con el número, así podemos sospechar que el mínimo lo alcanza en  $x = 0$ , donde  $f(0) = -4$ .

En efecto, si  $x \in (0, 2)$ , entonces  $0 < x < 2$  y por tanto  $0 < x^2 < 4$ . Restando  $-4$  a la última desigualdad, tenemos,  $-4 < x^2 - 4 < 0$ . Esto nos dice que,  $f(0) < f(x)$ , para todo  $x \in (0, 2)$ . Lo mismo sucede en  $(-2, 0)$  y como en el resto del dominio la función es positiva,  $f(0) \leq f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . En síntesis, la función alcanza su valor mínimo,  $-4$ , en  $x = 0$ .

- c) La función no tiene máximo. Por reducción al absurdo supongamos que  $f$  tiene un máximo en algún  $x_0$ . Entonces,  $f(x) < f(x_0)$ ; para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Si hacemos  $M = \max\{f(x_0), 4\}$  tendríamos que  $|f(x)| < M$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Lo que implicaría que  $x < \sqrt{M+4}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  y por tanto  $\mathbb{R}$  sería acotado superiormente, contradiciendo lo visto en la primera sección.
2. Sea la función  $g(x) = -x^2 + 4$  sobre  $[-2, 2]$ .  $g$  es positiva en  $(-2, 2)$  y  $g(-2) = g(2) = 0$ , en los puntos  $x_1 = -2$  y  $x_2 = 2$  la función alcanza su valor mínimo.

**Definición 1.3.9** Diremos que una función  $f$  es **periódica**, si existe un  $T \in \mathbb{R}$ , tal que

$$f(x+T) = f(x), \quad (P)$$

para todo  $x \in D(f)$ . Al menor de los números positivos  $T$ , que cumplen con (P), se le llama **período** de  $f$ .

**Ejemplo:** La función  $f(x) = x - [x]$ , es periódica de período 1.

**Definición 1.3.10** Una función  $f$  se dice:

- i) **par**, si  $f(-x) = f(x)$ , para todo  $x \in D(f)$ .
- ii) **impar**, si  $f(-x) = -f(x)$ , para todo  $x \in D(f)$ .

**Ejemplos:**

1. Toda función del tipo  $f(x) = x^k$ ; con  $k$  un entero par, es función par.
2. Toda función del tipo  $f(x) = x^n$ ; con  $n$  impar, es función impar.

**Definición 1.3.11** Sean  $I$  y  $J$  intervalos. Sean  $f$  y  $g$  funciones numéricas tales que  $D(f) = I$ ,  $D(g) = J$  y  $R(f) \subset J$ . Entonces la función compuesta de  $f$  con  $g$ , denotada,  $g \circ f$  está definida por:

- (i)  $D(g \circ f) = I$ .
- (ii)  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ , para todo  $x$  en  $I$ .

**Ejemplo:**

Si  $f : x \mapsto x^2 + 1$  y  $g : x \mapsto |x|$ , entonces  
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = |x^2 + 1|$ .

**Definición 1.3.12** Una función  $f : I \rightarrow J$  se dice **sobreyectiva** si y sólo si  $R(f) = J$ .

**Ejemplo:**

1. La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $x \mapsto x^2$  no es sobreyectiva, pues  $R(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .
2. La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $x \mapsto x^3$  es sobreyectiva, pues dado cualquier real  $y$  siempre existe  $\sqrt[3]{y}$ , según lo visto en la sección 1.1 de modo que  $f(\sqrt[3]{y}) = y$ .

Es importante observar que *toda función es sobreyectiva sobre su recorrido*.

**Definición 1.3.13** Una función  $f$  se dice **uno a uno** o **inyectiva** sobre un intervalo  $I$ , si para todo  $x_1, x_2 \in I$ , con  $x_1 \neq x_2$  se tiene  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Equivalentemente, si  $f(x_1) = f(x_2)$  entonces  $x_1 = x_2$ .

**Ejemplos:**

1. La función constante no es inyectiva en ningún intervalo de  $\mathbb{R}$ , pues  $f(x_1) = f(x_2)$  aun cuando  $x_1 \neq x_2$ .
2. La función lineal no constante  $f(x) = ax + b$  es inyectiva sobre todo  $\mathbb{R}$ , pues si  $x_1 \neq x_2$ , entonces  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
3. La función cuadrática  $f(x) = x^2$ , no es inyectiva sobre  $\mathbb{R}$ , pero sí lo es separadamente sobre  $\mathbb{R}^+$  o  $\mathbb{R}^-$ .

La importancia de las funciones inyectivas sobre un intervalo  $I$  es que ellas tienen **función inversa** sobre su recorrido. Es decir, si  $f$  es inyectiva sobre  $I$ , entonces existe la función  $f^{-1}$  definida sobre  $R(f)$ , con valores en  $I$  de modo que

$$f \circ f^{-1} = \mathbb{I}_{R(f)}$$

$$f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_I$$

donde  $\mathbb{I}_A$  es la función idéntica sobre el conjunto  $A$ , es decir, aquella que a cada  $x \in A$  le asigna el mismo  $x \in A$ ;  $\mathbb{I}_A(x) = x$ .

Además, es muy posible que algunas funciones sean inyectivas en algún subintervalo de su dominio, entonces restringiendo su dominio ellas pueden invertirse.

**Ejemplo:**

1. Hemos visto que la función lineal no constante es inyectiva sobre  $\mathbb{R}$ :

$$f : x \mapsto ax + b$$

para encontrar  $f^{-1}$  se debe despejar la variable independiente en la ecuación  $y = ax + b$ , lo cual nos da para  $x$  el valor en función de  $y$ , así tenemos,

$$x = \frac{y - b}{a}$$

pero, para presentar la función  $f^{-1}$ , debemos retomar la convención que  $x$  es la variable independiente. En este caso,

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

verifiquemos que  $f \circ f^{-1}(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ :

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-b}{a}\right) = a\left(\frac{x-b}{a}\right) + b = x$$

Del mismo modo:

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(ax+b) = \frac{(ax+b)-b}{a} = x$$

2. La función cuadrática  $f(x) = x^2$ , la podemos invertir sobre  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

Sea  $y \geq 0$  y consideremos  $y = x^2 \iff y - x^2 = 0 \iff (\sqrt{y} - x)(\sqrt{y} + x) = 0$  de donde se tiene  $x = \pm\sqrt{y}$ , pero como nos hemos restringido a  $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $x$  sólo puede tomar el valor  $\sqrt{y}$ .

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\longmapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

**Observación:** De todos los ejemplos vistos se puede deducir que **las propiedades que puede tener una función depende fuertemente del dominio**, por tal razón es de suma importancia determinar el dominio de una función.

### 1.3.2. Representación gráfica de funciones

Podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los elementos de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , usando la continuidad de  $\mathbb{R}$  como el continuo geométrico de la recta.

La posición de un punto en el plano se puede determinar mediante dos cantidades llamadas coordenadas del punto. Eligiendo dos rectas perpendiculares, con intersección en el punto  $O$ , las coordenadas de un punto  $P$  son las distancias del punto a las dos rectas, que son a su vez las proyecciones ortogonales del trazo  $OP$  sobre los ejes. De esta manera, se determina, sobre cada eje un punto  $N$  y  $M$ .

Como cada punto  $M, N$  se puede identificar con un número real, tenemos que a todo punto  $P$  le corresponde dos números reales, con los cuales podemos formar un par ordenado  $(M, N)$ , en que a la primera componente se la llama **abscisa** y a la segunda se le llama **ordenada** del punto  $P$ .

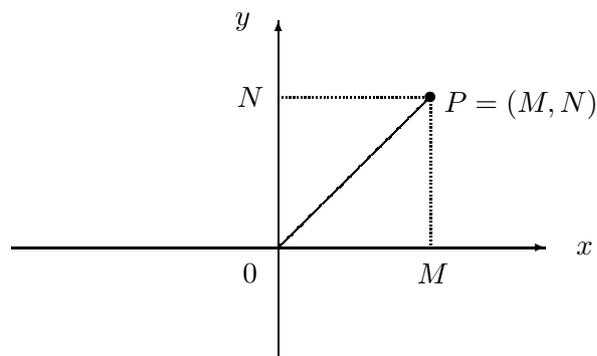


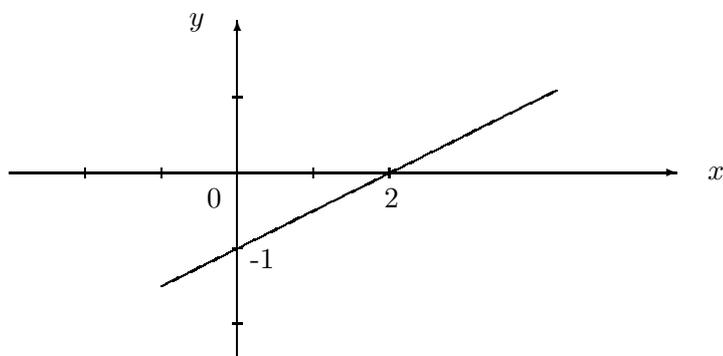
Figura 1.3.1: Sistema de coordenadas rectangulares

Una vez que sabemos determinar la posición de un punto en el plano, es natural concebir la idea de poder representar el gráfico  $G(f)$  de una función  $f$  como una curva en el plano.

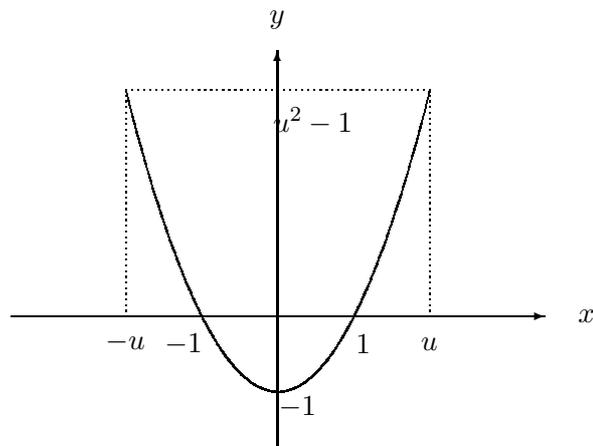
Para tener una idea del gráfico de una función debemos encontrar una cantidad suficiente de puntos de  $G(f)$ , lo que tradicionalmente se llama una tabla de valores.

**Ejemplo:**

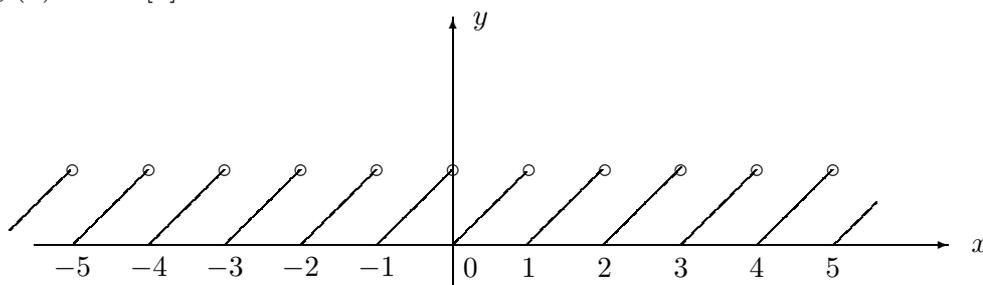
1.  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

Figura 1.3.2: Gráfico de  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ 

2.  $f(x) = x^2 - 1$

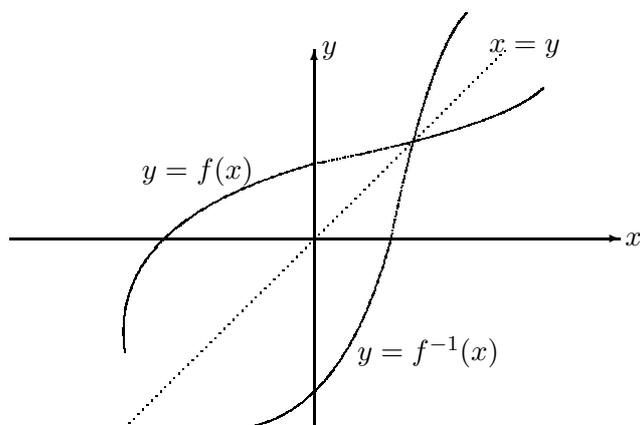
Figura 1.3.3: Gráfico de  $f(x) = x^2 - 1$ 

3.  $f(x) = x - [x]$

Figura 1.3.4: Gráfico de  $f(x) = x - [x]$ **Observaciones:**

1. En general una tabla de valores sólo sirve cuando la función tiene un comportamiento relativamente simple, de lo contrario, se requieren técnicas más elaboradas que se irán desarrollando más adelante.
2. Muchas propiedades de las funciones pueden ser interpretadas geoméricamente con la ayuda del sistema de coordenadas.
  - a) El gráfico de una función par es simétrico con respecto al eje  $Y$ .
  - b) El gráfico de una función impar es simétrico con respecto al origen.
  - c) El gráfico de una función y de su función inversa son simétricos con respecto a la recta  $y = x$ . Pues,

$$(u, v) \in G(f) \iff f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u \iff (v, u) \in G(f^{-1})$$

Figura 1.3.5: Gráfico de  $f$  y su inversa  $f^{-1}$ 

### 1.3.3. Ejercicios resueltos

1. Sea  $f(x) = \text{signo de } x$  que se define como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Gráfique las siguientes funciones:

- a)  $f(x), [f(x)]^2, 1 - f(x)$ .  
 b)  $h(x) = f\left(3 - \frac{2}{|x|}\right)$ .

**Solución:**

- a) Gráfico de  $f(x)$ .

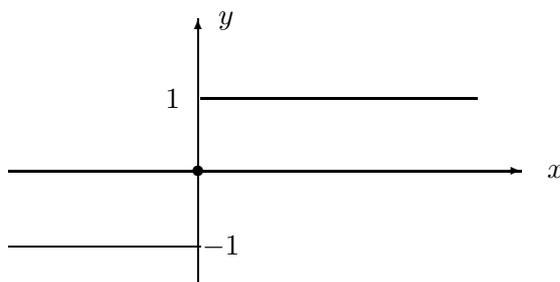


Gráfico de  $[f(x)]^2$ .

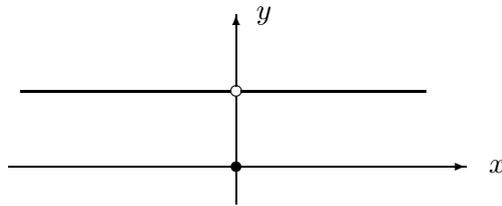
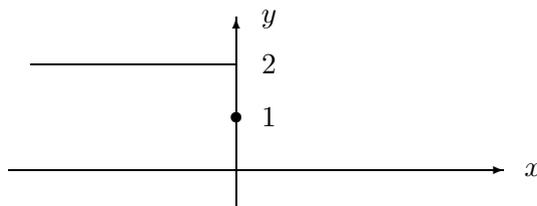


Gráfico de  $1 - f(x)$ .

$$1 - f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

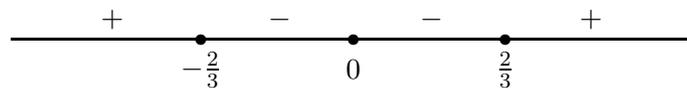


b)

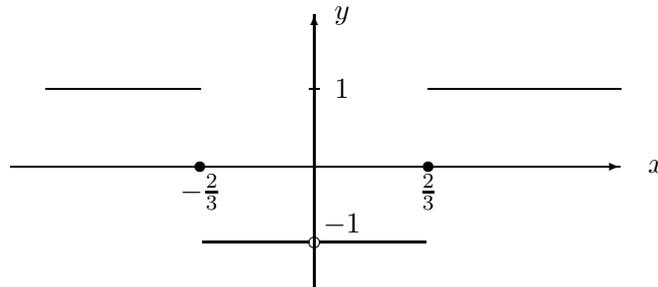
$$g(x) = 3 - \frac{2}{|x|} = \begin{cases} 3 - \frac{2}{x} & \text{si } x > 0 \\ \text{no está definida} & \text{si } x = 0 \\ 3 + \frac{2}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si  $x > 0$ .  $3 - \frac{2}{x} > 0$  es equivalente a  $x > \frac{2}{3}$ . Si  $x < 0$ .  $3 + \frac{2}{x} > 0$  es equivalente a  $x < -\frac{2}{3}$ .

$g(x)$  se anula en  $x = \pm \frac{2}{3}$ . Por tanto, el signo de  $g(x)$  se distribuye de la siguiente forma:



Esto nos dice que el gráfico de  $f(g(x))$  es:



2. Si  $a < b < c$ , graficar

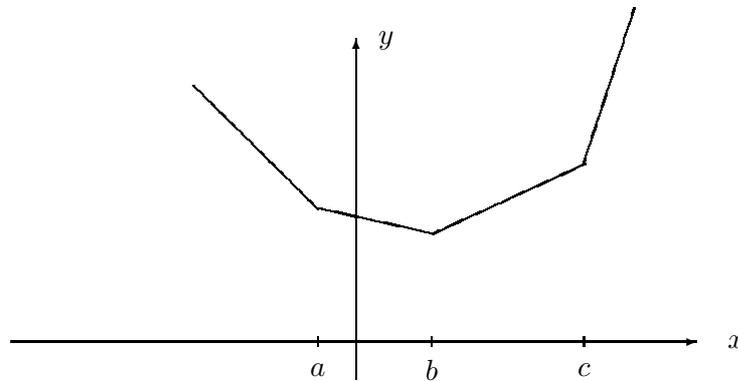
$$f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|.$$

**Solución:** Según el ejercicio resuelto 12 de la subsección 1.1.4 tenemos que:

- 3.

$$f(x) = \begin{cases} -3x + a + b + c & \text{si } x \leq a \\ -x - a + b + c & \text{si } a < x \leq b \\ x - a - b + c & \text{si } b < x \leq c \\ 3x - a - b - c & \text{si } c < x. \end{cases}$$

Por tanto, su gráfico es la línea poligonal:



4. Sea  $h(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$h(x) = \{x\} = \text{la distancia de } x \text{ al entero más próximo.}$$

- a) Calcular  $h(0), h(1), h(\frac{1}{2}), h(\frac{1}{4}), h(\frac{3}{4}), h(\frac{1}{3}), h(\frac{2}{3})$ .

- b) Graficar  $h$ .  
 c) Extienda gráficamente  $h$  a todo  $\mathbb{R}$ .

**Solución:**

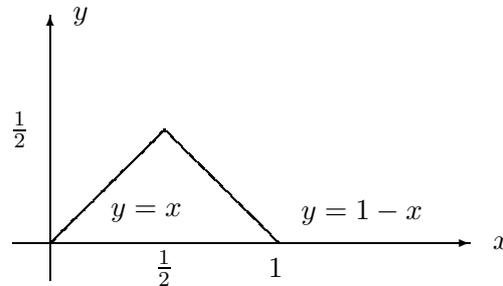
a)  $h(0) = 0, h(1) = 0, h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, h(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}, h(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}, h(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}, h(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ .

- b) Si  $x \in [0, \frac{1}{2})$  el entero más cercano a  $x$  es el cero y la distancia entre ellos es igual a  $x$ .

$x = \frac{1}{2}$  está a la misma distancia del cero y del uno, y ésta es  $\frac{1}{2}$ .

Si  $x \in (\frac{1}{2}, 1]$  el entero más cercano a  $x$  es 1 y la distancia de  $x$  a 1 es  $1 - x$ .

Por tanto, sobre el intervalo  $[0, \frac{1}{2})$ , el gráfico de  $h(x)$  es el segmento de la recta  $y = x$  y sobre  $[\frac{1}{2}, 1]$  el gráfico es el segmento de la recta  $1 - x$ .



- c) En cada intervalo  $[n, n + 1]$ , el análisis es el mismo que en  $[0, 1]$ , por tanto, la función se repite periódicamente.
5. Dada la función  $g$  de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1. \end{cases}$$

- a) Calcule  $g(0), g(1), g(\frac{1}{2}), g(\frac{1}{4}), g(\frac{2}{4}), g(\frac{3}{4}), g(\frac{4}{4}), g(\frac{1}{3}), g(\frac{2}{3}), g(\frac{4}{3}), g(\frac{5}{3})$ .  
 b) Calcule la imagen inversa de  $\{\frac{1}{3}\}$ .  
 c) Calcule la imagen inversa de  $\{\frac{1}{q}\}$ .  
 d) Grafique  $g$ .

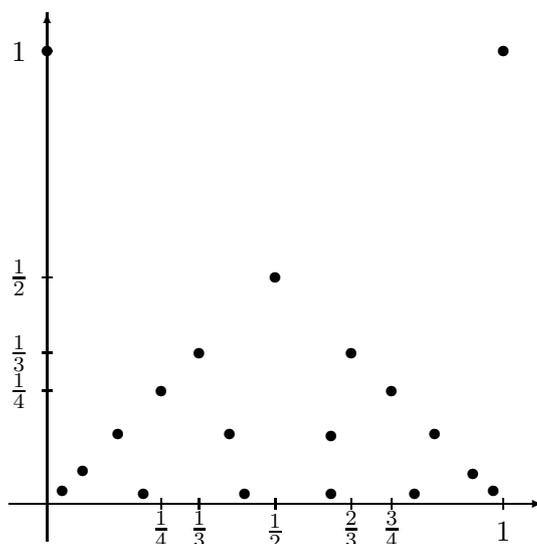
**Solución:**

a) Calcule  $g(0) = 0, g(1) = 1, g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}, g(\frac{2}{4}) = \frac{1}{2}, g(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}, g(\frac{4}{4}) = g(1) = 1, g(\frac{1}{3}) = g(\frac{2}{3}) = g(\frac{4}{3}) = g(\frac{5}{3}) = \frac{1}{3}$ .

b)  $g^{-1}(\frac{1}{3}) = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right\}$ .

c)  $g^{-1}(\frac{1}{q}) = \left\{ \frac{p}{q}; (p, q) = 1, 0 < p < q \right\}$ .

d) Su gráfico es:



6. Bosqueje el gráfico de las funciones

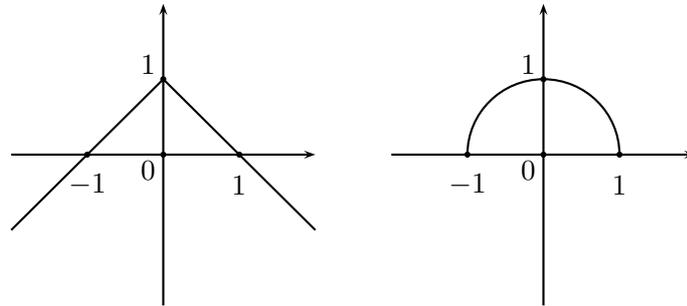
a)  $f(x) = 1 - |x|$ .

b)  $g(x) = \sqrt{1 - |x|}$ .

**Solución:**

a) Si  $x > 0$ , entonces  $f(x) = 1 - x$ . Si  $x < 0$ , entonces  $f(x) = 1 + x$ .  $f(0) = 0$ . Su gráfico son dos semirrectas como lo muestra la figura.

b) Del gráfico de  $f$  vemos que  $1 - |x| \geq 0$  es el intervalo  $[-1, 1]$ , por tanto  $D(g) = [-1, 1]$ . Dado que  $1 - x$  es decreciente en  $[0, 1]$  también lo es  $\sqrt{1 - x}$ . Sobre  $[-1, 0]$ , el crecimiento de  $1 + x$  implica el crecimiento de  $\sqrt{1 + x}$ . Así, los gráficos de  $f$  y  $g$  son:



7. Determine el dominio y el recorrido de cada una de las siguientes funciones:

- a)  $\sqrt{x+1}$
- b)  $\sqrt{x^2+1}$
- c)  $\sqrt{x^2-1}$
- d)  $\sqrt{1-x^2}$
- e)  $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

**Solución:**

- a) Para determinar el dominio debemos analizar los valores de  $x$  que hacen de  $\sqrt{x+1}$  un número real.

$$\sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \iff x+1 \geq 0 \iff x \geq -1.$$

Por tanto,  $D(f) = [-1, \infty)$ .

Para encontrar el recorrido, debemos despejar  $x$  en la ecuación que define la función.

$y = \sqrt{x+1} \iff y^2 = x+1$  y  $y \in [0, \infty)$ . Entonces, cualquiera sea  $y \in [0, \infty)$ ,  $x = y^2 - 1$  pertenece al dominio, por lo cual  $R(f) = [0, \infty)$ .

- b) Sabemos de las propiedades de los números reales que  $x^2$  es positivo o nulo, por lo que  $x^2+1 \geq 0$  para todo  $x$ , por tanto el dominio de la función  $h(x) = \sqrt{x^2+1}$  es  $\mathbb{R}$ . Por la misma razón y como  $x^2$  no es acotada superiormente como vimos en un ejemplo, el recorrido de la función es  $[1, \infty)$ .
- c) Sea  $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ . Según lo visto en la primera sección tenemos que,  $x^2-1 \geq 0 \iff (x+1)(x-1) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ . Así  $D(h) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  y  $R(h) = [0, \infty)$ .
- d) Similarmente tenemos que  $\sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R} \iff 1-x^2 \geq 0$ . Por tanto  $D(g) = [-1, 1]$  y  $R(g) = [0, 1]$ .

- e) La función  $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$  tiene por dominio  $(-1, \infty)$ , como puede deducirse a partir de la parte (a) y su recorrido es  $(0, \infty)$ .
8. Estudiar las variaciones de las funciones  $x$ ,  $x^2$  y  $\sqrt{x}$ , sobre  $[0, \infty)$ . Graficarlas en un mismo diagrama y deducir que:  
Si  $x \in (0, 1)$  entonces  $x^2 < x < \sqrt{x}$ . Si  $x \in (1, \infty)$  entonces  $x^2 > x > \sqrt{x}$ .

**Solución:**

Es fácil verificar que las tres funciones son crecientes y toman valores no negativos en todo su dominio. Todas valen 0 en  $x = 0$  y valen 1 en  $x = 1$ , pero su crecimiento difiere en la rapidez con que se da. Con la ayuda de una pequeña tabla de valores podemos bosquejar el gráfico siguiente:

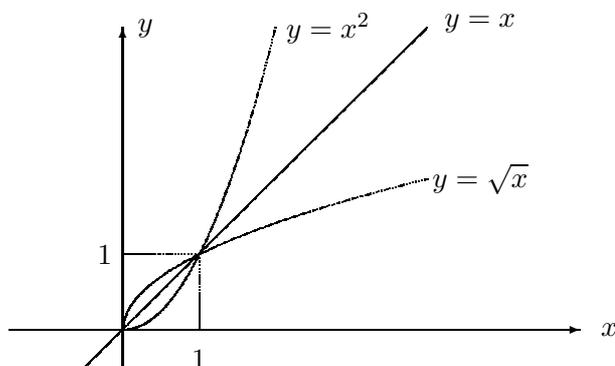


Figura 1.3.6: Gráficos de  $y = x$ ,  $y = x^2$  y  $y = \sqrt{x}$

9. Dada la función numérica

$$f : x \mapsto \frac{x+a}{(x-a)(x-b)}$$

Calcule  $a$  y  $b$  sabiendo que  $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$  y que el gráfico de  $f$  pasa por el punto  $(3, \frac{2}{5})$ .

**Solución:** Si  $(3, \frac{2}{5}) \in G(f)$ , entonces,

$$\frac{3+a}{(3-a)(3-b)} = \frac{2}{5}$$

Lo cual es equivalente a  $11a + 6b - 2ab = 3$ . Una solución a esta ecuación es  $a = 1$  y  $b = -2$ . En este caso

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)},$$

cuyo dominio es  $\mathbb{R} - \{1, -2\}$ . Valores distintos de  $a$  y  $b$  satisfacen  $11a + 6b - 2ab = 3$  pero no la condición  $D(f) = \mathbb{R} - \{1, -2\}$  ya que  $D(f) = \mathbb{R} - \{a, a\}$ .

10. Dada la función  $f(x) = \frac{1}{x}$  definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ , con  $x \neq 0$ .

- Calcule:  $f(10)$ ,  $f(10^2)$ ,  $f(10^3)$ ,  $f(10^4)$ ,  $f(-10)$ ,  $f(-10^2)$ ,  $f(-10^3)$ ,  $f(-10^4)$ .
- ¿ Para qué valores positivos de  $x$  se tiene que  $0 < \left| \frac{1}{x} \right| < 10^{-5}$  ?
- ¿ Para qué valores positivos de  $x$  se tiene que  $0 < \left| \frac{1}{x} \right| < 10^{-50}$  ?
- ¿ Para qué valores positivos de  $x$  se tiene que  $0 < \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$  ? Donde  $\epsilon$  es un número positivo cualquiera dado previamente.
- ¿ Para qué valores negativos de  $x$  se tiene que  $0 < \left| \frac{1}{x} \right| < 10^{-3}$  ?
- ¿ Para qué valores negativos de  $x$  se tiene que  $0 < \left| \frac{1}{x} \right| < 10^{-30}$  ?
- ¿ Para qué valores negativos de  $x$  se tiene que  $0 < \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$  ?
- ¿ Qué condición debe satisfacer  $x$  para que la distancia entre  $f(x)$  y 0 sea cada vez menor ?

**Solución:**

- $$f(10) = \frac{1}{10}, f(10^2) = \frac{1}{100}, f(10^3) = \frac{1}{1000}, f(10^4) = \frac{1}{10^4}.$$

$$f(-10) = \frac{-1}{10}, f(-100) = \frac{-1}{100}, f(-10^3) = \frac{-1}{10^3}, f(-10^4) = \frac{-1}{10^4}.$$
- Si  $x > 0$  entonces  $\frac{1}{x} > 0$ . Por tanto  $\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x}$ . Tenemos:
 
$$0 < \frac{1}{x} < 10^{-5} \iff 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{10^5} \iff x > 10^5.$$
- Del mismo modo para que  $0 < \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{10^{50}}$  es equivalente a pedir que  $|x| > 10^{50}$ .
- Si  $\epsilon$  es un número positivo cualquiera y  $x > 0$ :
 
$$0 < \frac{1}{x} < \epsilon \iff x > \frac{1}{\epsilon}$$
- Si  $x < 0$  entonces  $\frac{1}{x} < 0$  y  $\left| \frac{1}{x} \right| = -\frac{1}{x}$ . Así,
 
$$-\frac{1}{x} < 10^{-3} \iff -\frac{1}{x} < \frac{1}{10^3} \iff -x > 10^3 \iff x < -10^3.$$
- Del mismo modo se obtiene que  $x < -10^{30}$ .
- El mismo razonamiento se repite para concluir que  $x < -\frac{1}{\epsilon}$ .
- De los tres últimos pasos podemos deducir que, para que la distancia entre  $f(x)$  y el 0 disminuya,  $x$  debe crecer.

11. Estudiar la variación de la función  $f(x) = \frac{x}{[x]}$ .

**Solución:**

Si  $x \in [0, 1)$  entonces  $[x] = 0$ , tenemos que  $D(f) = \mathbb{R} - [0, 1)$ .

Sea  $n$  un número natural, si  $x \in [n, n+1)$  entonces  $f(x) = \frac{x}{n}$ . Es decir, sobre cada intervalo  $[n, n+1)$  es un fragmento de recta y por tanto creciente. Pero, como  $\frac{1}{n}$  decrece a medida que  $n$  crece, la inclinación de cada fragmento es cada vez menor y en cada  $x = n$  la función tiene un salto.

Para  $x$  negativo. Si  $x \in [-1, 0)$  entonces  $[x] = -1$  por tanto,  $f(x) = -x$ . Así  $f$  es decreciente sobre  $[-1, 0)$ . En general, en los intervalos del tipo  $[-(n+1), -n)$   $f(x) = \frac{x}{-(n+1)}$ . Como  $\frac{1}{n+1}$  decrece cuando  $n$  crece, tenemos una situación parecida a la rama positiva, los fragmentos de recta, que en este caso están en forma decreciente, se van poniendo cada vez más en forma horizontal.

El gráfico de esta función es el siguiente:

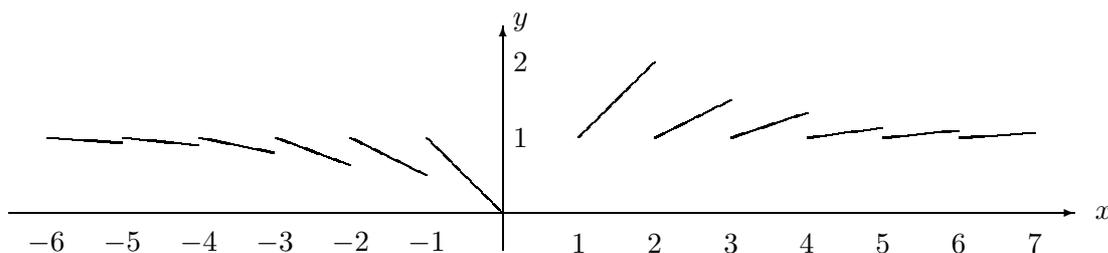


Figura 1.3.7: Gráfico de la función  $f(x) = \frac{x}{[x]}$

12. Recuerde que si  $x$  es pequeño,  $x^2$  es más pequeño aún. Entonces puede ser razonable despreciar  $x^2$  y aproximar  $(1+x)^2$  por  $1+2x$ .
- ¿ Qué error se comete al reemplazar  $(1+x)^2$  por  $1+2x$  ?
  - ¿ Cómo elegir  $x$  para que el error sea inferior a:  $10^{-2}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  ?
  - Calcule aproximadamente sin usar calculadora,  $(1,0381)^2$ ,  $(1,0056)^2$  con un error menor que  $10^{-2}$ .

**Solución:**

- a) El error cometido al reemplazar  $(1+x)^2$  por  $1+2x$ , está dado por la diferencia:

$$|(1+x)^2 - (1+2x)| = |x^2| = x^2$$

b) Para que el error sea menor que  $10^{-2}$  basta resolver la desigualdad  $x^2 < 10^{-2}$ .

$$x^2 < \frac{1}{100} \iff \left(x - \frac{1}{10}\right)\left(x + \frac{1}{10}\right) < 0.$$

Usando las propiedades de las desigualdades de la subsección 1.1.3, vemos que  $x \in \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ .

Del mismo modo para que  $x^2 < 10^{-4}$  debemos tener  $x \in \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ .

Finalmente,  $x^2 < 10^{-5} \iff x \in \left(-\frac{1}{100\sqrt{10}}, \frac{1}{100\sqrt{10}}\right)$ .

c) Como  $1,0381 = 1 + 0,0381$  y  $0 < 0,0381 < \frac{1}{10}$ , podemos aproximar  $(1,0381)^2$  por  $1 + 2 \cdot 0,0381$ . Así,  $(1,0381)^2 \approx 1,0762$ .

13. Dada la función numérica

$$f(x) = x^2 + |3 - 4x^2| - |5x + 1|,$$

calcule  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$  y deduzca que  $f$  no es monótona sobre  $[-1, 1]$ .

**Solución:**

$$f(-1) = (-1)^2 + |3 - 4(-1)^2| - |5(-1) + 1| = -2.$$

$$f(0) = 3 - 1 = 2.$$

$$f(1) = 1 + |3 - 4| - |5 + 1| = -4.$$

Como  $f(-1) < f(0)$ , si fuera monótona también  $f(0)$  debería ser menor que  $f(1)$ . Pero, como esto no se cumple la función no es monótona sobre  $[-1, 1]$ .

14. Sea  $x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 10}{x - 3}$ .

a) Escriba el dominio de  $f$  como unión de intervalos.

b) Encuentre  $a, b, c$  de modo que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}.$$

c) Utilizando la expresión obtenida en el ítem anterior, estudiar el crecimiento de  $f$  sobre los intervalos que componen el dominio.

**Solución:**

a)  $D(f) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ .

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 10}{x - 3} &= ax + b + \frac{c}{x - 3} \\
 &= \frac{ax(x - 3) + b(x - 3) + c}{x - 3} \\
 &= \frac{ax^2 - 3ax + bx - 3b + c}{x - 3} \\
 &= \frac{ax^2 + (b - 3a)x + (c - 3b)}{x - 3}
 \end{aligned}$$

Usando el ejercicio resuelto 2 de la sección 1.2 podemos concluir que:

$$a = 1, \quad b - 3a = 0, \quad c - 3b = -10.$$

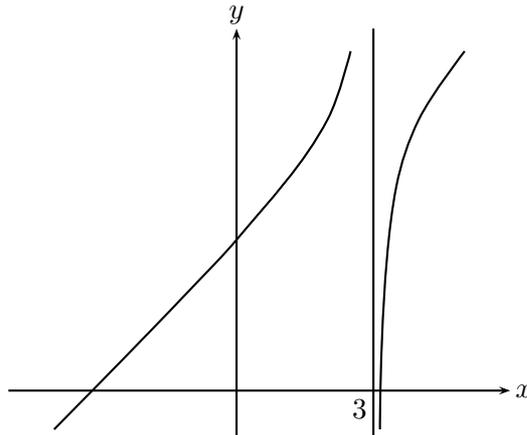
Por tanto,

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = -1.$$

Así:

$$f(x) = x + 3 - \frac{1}{x - 3}.$$

- c)
- Si  $x < 3$ , a medida que crece y se acerca a 3,  $x + 3$  crece.  $x - 3$  disminuye tomando valores negativos y  $-\frac{1}{x - 3}$  crece sin acotamiento.
  - Si  $x > 3$  y decrece hacia el valor 3, entonces  $x - 3$  disminuye tomando valores positivos, por tanto,  $-\frac{1}{x - 3}$  toma valores negativos que no pueden ser acotados inferiormente. Ver problema resuelto 10 de esta misma sección.
- d) Su gráfico es:



15. Estudie las variaciones de la función  $y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ ,  $a > 0$ .

**Solución:**

Primero debemos determinar el dominio de la función. Para que  $y$  sea un número real es necesario y suficiente que  $\frac{x}{a-x} \geq 0$ . Analizando las distintas soluciones a esta desigualdad llegamos a que  $x \in [0, a[$ .

Cuando  $x$  crece desde 0 hasta  $a$ ,  $y$  crece de 0 a  $\infty$ , pues la  $\frac{1}{a-x}$  crece indefinidamente.

La curva resultante es una rama de una curva llamada **cisoide**.

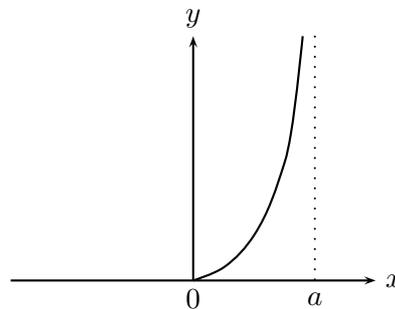


Figura 1.3.8: Una rama de la cisoide

16. Bosquejar el gráfico de la función,

$$f : x \mapsto x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \text{ con } a \geq 0$$

**Solución:** El dominio de la función está determinado por la condición

$$\frac{a-x}{a+x} \geq 0 \text{ con } x \neq -a.$$

Lo cual es equivalente a  $-a < x \leq a$ . Cuando  $x$  varía desde 0 hasta  $a$ , el valor de la función es positivo y finito, además  $f(0) = f(a) = 0$ . Cuando  $x$  disminuye desde 0 hasta  $-a$ , la función es negativa y también decrece indefinidamente. El gráfico resultante es una rama de la curva llamada **estrofoide**.

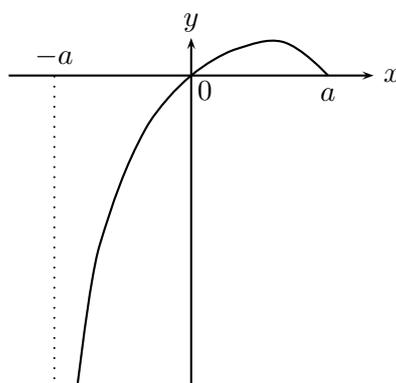


Figura 1.3.9: Una rama de la estrofoide

17. Encuentre constantes reales  $a$  y  $b$  de modo que la función:

$$f : x \mapsto x^3 + (a - 1)x^2 + x + ab + 1$$

sea impar.

**Solución:**

Para que  $f$  sea impar se debe cumplir que  $f(-x) = -f(x)$ , para todo  $x \in D(f)$ . Como,

$-f(x) = -(x^3 + (a-1)x^2 + x + ab + 1)$  y  $f(-x) = (-x)^3 + (a-1)(-x)^2 + (-x) + ab + 1$ , tenemos que:

$$f(-x) = -f(x) \iff (a-1)x^2 + ab + 1 = 0.$$

Como esta igualdad debe satisfacerse para todo  $x \in \mathbb{R}$ , calculemos la expresión para  $x = 0$  y  $x = 1$ , obteniendo las ecuaciones:

$ab = -1$  y  $a(1+b) = 0$ , lo que nos da los valores  $a = 1$  y  $b = -1$ , pues la posibilidad  $a = 0$ , es incompatible con  $ab = -1$ .

18. Dada la función

$$f(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}.$$

- Demuestre que  $f$  es par.
- Dado el número  $a$ , resuelva la ecuación  $f(x) = a$ .
- Deduzca que el recorrido de  $f$  es  $[0, 1)$ .
- Estudie el crecimiento de  $f$  y bosqueje su gráfico.

**Solución:**

- a) Como  $|x| = |-x|$  se tiene que  $f(x) = f(-x)$ . Por tanto  $f$  es una función par.
- b) Debido a que el valor absoluto de un número es positivo o nulo, la ecuación  $f(x) = a$  sólo tiene sentido si  $a > 0$ .  
Teniendo en cuenta que  $f$  es par, consideraremos el caso  $x > 0$ .

$$\frac{x}{1+x} = a \iff x = a(1+x) \iff x = \frac{a}{1-a}.$$

- c) Dado  $a \in [0, 1)$  existe  $x = \frac{a}{1-a}$  de modo que  $f(x) = \frac{\frac{a}{1-a}}{1 + \frac{a}{1-a}} = a$ . Esto nos dice que la función  $f$  toma todos los valores entre 0 y 1. Toma el valor 0 en  $x = 0$ , pero no toma el valor 1. Pues, si  $f(x) = 1$ , entonces debiera existir  $x$  tal que  $\frac{x}{1+x} = 1$ , lo que implica  $1 = 0$ . Como esto es imposible,  $f$  no alcanza el valor 0. En consecuencia  $R(f) = [0, 1)$ .
- d) Usando la parte (a) del ejercicio propuesto 17 estudiaremos el signo de la expresión

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

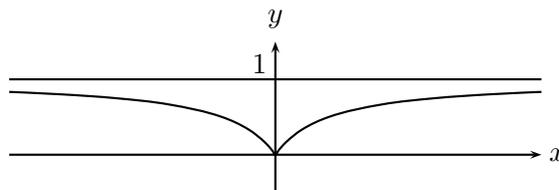
Sean  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ,

$$\frac{\frac{x_1}{1+x_1} - \frac{x_2}{1+x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1(1+x_2) - x_2(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)} > 0.$$

Esto nos dice que  $f$  es creciente en  $[0, +\infty)$ .

Como  $f$  es par, sobre  $(-\infty, 0]$  ella es decreciente.

Su gráfico es



19. Sea  $f$  una función inyectiva sobre un intervalo  $I$ . Demuestre que, si  $f$  es estrictamente creciente entonces  $f^{-1}$  es estrictamente creciente.

**Solución:** Sean  $y_1, y_2 \in D(f^{-1})$ . Entonces,  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ . Si  $y_1 < y_2$ , debemos demostrar que  $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ . Supongamos por reducción al absurdo que no se cumple lo que queremos demostrar. Si  $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ , entonces  $x_1 = x_2$  y por tanto  $f(x_1) = f(x_2)$ , es decir,  $y_1 = y_2$ , lo que contradice la hipótesis. Si

$f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ , entonces  $x_1 > x_2$  y por tanto  $f(x_1) > f(x_2)$ , es decir,  $y_1 > y_2$ , lo que nuevamente contradice la hipótesis. Así tenemos que  $f^{-1}$  es estrictamente creciente.

20. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}.$$

**Solución:** El dominio de la función está determinado por la desigualdad

$$\frac{x^2}{4} - 1 \geq 0.$$

Por tanto,

$$D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Para calcular la inversa debemos despejar  $x$  en la ecuación  $y = f(x)$ .

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \\ \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 &= \frac{x^2}{4} - 1 \\ y^2 - xy &= -1 \\ x &= y + \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Para responder correctamente al problema debemos permutar las variables, así:

$$f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x}.$$

21. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}.$$

**Solución:** Si  $y = \frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}$ , entonces

$$\frac{1 - y}{1 + y} = \frac{1 - \frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}}{1 + \frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}} = \sqrt{1 + 4x}.$$

Por tanto,  $1 + 4x = \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2$ , lo que nos da

$$x = \frac{1}{4} \left[ \frac{(1-y)^2}{(1+y)^2} - 1 \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{(1-y)^2 - (1+y)^2}{(1+y)^2} \right] = -\frac{y}{(1+y)^2}.$$

Intercambiando las variables tenemos:

$$f^{-1}(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

22. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}.$$

**Solución:** Sea  $a = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}}$  y  $b = \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} y &= a + b \\ y^3 &= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \\ &= a^3 + b^3 + 3aby \\ &= x + \sqrt{1+x^2} + x - \sqrt{1+x^2} + 3y\sqrt[3]{x^2 - (1+x^2)} \\ &= 2x - 3y \\ x &= \frac{y^3 + 3y}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 3x}{2}.$$

#### 1.3.4. Ejercicios propuestos

1. Determine el dominio, el recorrido y los intervalos donde las siguientes funciones son positivas y negativas.

- a)  $\sqrt[3]{x+1}$
- b)  $\sqrt[3]{x^2+1}$
- c)  $\sqrt[3]{x^2-1}$
- d)  $\sqrt[3]{1-x^2}$
- e)  $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

2. a) ¿ Son iguales las funciones  $f(x) = \sqrt{x-5}\sqrt{x+7}$  y  $g(x) = \sqrt{(x-5)(x+7)}$  ? Justifique su respuesta.

b) ¿ Son iguales las funciones  $f(x) = \frac{1}{x}$  y  $g(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x^2 + 1}$  ?

Grafique las siguientes funciones:

3.  $y = |x - a| + \frac{1}{3}|x - b|$ .

4.  $f(x) = \{2x\}$ , ver ejercicio resuelto 4.

5.  $f(x) = |x + 1| + |x - 1| - 2|x|$ .

6.  $y = ||x| + 2|$ .

7.  $y = ||x - 1| - 1|$ .

8.  $y = |x^2 - 4| + |x - 2|$ .

9. Sea  $f(x)$  la función signo de  $x$ , ver ejercicio resuelto 1 y sea  $g(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ . Grafique la función compuesta  $f(g(x))$ .

10. Dada la función  $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ . Grafique:

a)  $f(x)$ .

b)  $g(x) = \max\{f(x), 0\}$ .

c)  $h(x) = \max\{-f(x), 0\}$ .

d) Compruebe que  $f(x) = g(x) - h(x)$  y  $|f(x)| = g(x) + h(x)$ .

11. Encuentre la función inversa de

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}}$$

12. Encuentre la función inversa de

$$f(x) = \sqrt[5]{\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - p^5}} + \sqrt[5]{\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - p^5}}$$

13. a) ¿ Cómo elegir  $x$  para que el error absoluto cometido al aproximar  $\sqrt{1+x}$  por  $1 + \frac{x}{2}$  sea menor o igual a:  $10^{-3}$ ,  $4 \cdot 10^{-5}$  ?

b) Calcule sin usar calculadora un valor aproximado de:  $\sqrt{1,0035}$ .

14. Demuestre que, si  $f$  y  $g$  son funciones pares entonces  $\alpha f$ ,  $f + g$ ,  $fg$  son funciones pares.
15. Estudie la variación de la función numérica :  $h : x \mapsto x^2 + |2x|$  sobre cada uno de los intervalos  $(-\infty, 0]$  y  $[0, +\infty)$ .
16. Sean  $f$  y  $g$  son funciones numéricas sobre un mismo intervalo  $I$ .
- Demuestre que si  $f$  y  $g$  son ambas crecientes o ambas decrecientes sobre  $I$ , la función  $f + g$  es monótona sobre  $I$ . En cada caso precise el sentido de la variación de  $f + g$ .
  - Si  $f$  y  $g$  son monótonas sobre  $I$ , ¿es  $f + g$  monótona ?
17. Sea  $f$  una función numérica sobre  $I$ .

- Demuestre que  $f$  es creciente sobre  $I$  si y sólo si, para cualquier par de números reales  $x$  y  $x'$  de  $I$  tal que  $x \neq x'$ ,

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}, \quad (*)$$

Separe los casos  $x < x'$ ,  $x' < x$ .

- Encuentre una condición necesaria y suficiente del tipo (\*) para que una  $f$  sea decreciente sobre  $I$ .
  - Aplice los resultados anteriores para estudiar las variaciones de la función:
 
$$f(x) = \frac{|x| - 1}{x - 1}.$$
18. Dadas las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , represente las tres en un mismo gráfico.
- $f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = 3x^2 - 4$ ,  $h(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$ .
  - $f(x) = x^3 + 2x$ ,  $g(x) = 3 - x$ ,  $h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$ .
19. Dado el gráfico de la función  $f$ , determine:

- Los ceros de la función.
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Los intervalos donde la función es inyectiva.
- Seleccione un intervalo donde  $f$  es invertible y grafique juntas  $f$  y  $f^{-1}$ .

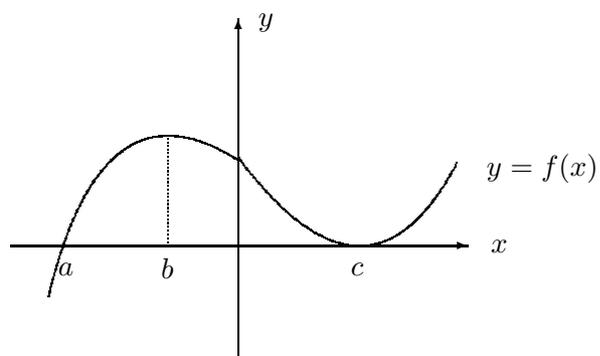


Figura 1.3.10

## 1.4. Límites de funciones numéricas de variable continua

Seguiremos considerando, como en el capítulo anterior, que los dominios de las funciones son intervalos o uniones de intervalos.

### 1.4.1. Límites finitos:

**Definición 1.4.1** Sea  $f$  una función numérica. Dado  $a \in \mathbb{R}$ , decimos que  $L$  es el límite de  $f$  en el punto  $a$ , si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  - que en general depende de  $\varepsilon$  y de  $a$  - tal que si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . En tal caso escribimos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \text{ o } f(x) \longrightarrow L \text{ cuando } x \longrightarrow a.$$

**Observación 1.4.2** 1.  $f(x)$  tiene sentido si  $x$  pertenece al dominio de  $f$ .

2.  $|x - a| > 0$  nos dice que no nos interesa lo que pasa exactamente en  $a$ , punto que eventualmente pudiera no estar en el dominio de la función.
3. La definición tiene sentido si existen infinitos  $x \in D(f)$  cercanos al punto  $a$ , para lo cual  $a$  debe ser **un punto de acumulación** del dominio de  $f$ . Esto quiere decir que dado cualquier número  $\eta > 0$  la intersección  $D(f) \cap ]a - \eta, a + \eta[$  es no vacía.
4. Los infinitos  $x \in D(f)$  cercanos al punto  $a$  nos permiten hacer las sucesivas aproximaciones a  $L$ , lo que constituye la parte práctica del concepto de límite.
5. El  $\varepsilon$  **dado** es el grado de exactitud que uno requiere según la situación concreta en que estamos involucrados.
6.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$  es equivalente a : *existe  $\varepsilon > 0$  de modo que existe al menos un  $x \in D(f)$  tal que  $|x - a| < \delta$  pero  $|f(x) - L| \geq \varepsilon$ .*
7. La dificultad de aplicar la definición es encontrar el  $\delta$  apropiado para cada  $\varepsilon$  dado.

**Ejemplo 1.4.3** 1. Sea  $f(x)$  la función constante definida sobre un intervalo abierto  $I = (A, B)$ ,  $a \in I$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c, \quad c = \text{cte.}$$

Pues dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta$  que puede ser elegido como  $\delta = \inf\{|A - a|, |a - B|\}$  tal que si  $|x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ . Observemos que si en particular  $I = \mathbb{R}$  cualquier  $\delta$  sirve para que se cumpla la definición 1.4.1.

2. Sea  $f(x) = x$  definida en un intervalo abierto  $I, a \in I$ , entonces:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta$  que puede ser elegido igual a  $\varepsilon$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta$ . Entonces  $|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon$ . Si el intervalo no es todo  $\mathbb{R}$ ,  $\delta$  debe ser elegido como:

$$\delta = \inf \{|A - a|, |a - B|, \varepsilon\}.$$

3. Sea  $f(x) = [x]$  definida sobre todo  $\mathbb{R}$ . Entonces:

(i)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = n$  si  $a \in (n, n + 1)$ , para algún  $n \in \mathbb{Z}$ .

(ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe, si  $a \in \mathbb{Z}$ .

En efecto,

(i) Como  $[x] = n$  si  $x \in (n, n + 1)$ . Entonces cuando analizamos los valores  $[x]$  cerca de un  $a \in (n, n + 1)$ , vemos que para tales  $x$ ,  $[x]$  es constante igual a  $n$ , por la parte 1 de este ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = n$ .

(ii) En cambio cuando  $a \in \mathbb{Z}$ , la función toma distintos valores según  $x$  sea mayor que  $a$  o menor que  $a$ , siendo la diferencia entre estos valores de 1. Por tanto, para cualquier  $0 < \varepsilon < 1$ , la diferencia entre los valores de  $[x]$  para  $x$  cercano al punto  $a$ , es mayor que  $\varepsilon$ , por tanto no se cumple la definición 1.4.1. Más particularmente, dados los valores que toma  $[x]$ , podríamos tener candidatos a límite  $n$  ó  $n - 1$ .

Si  $L = n$ , entonces tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  cualquiera sea  $\delta > 0$ , entonces existe  $x_1 = n - \frac{\delta}{2}$  tal que  $|x_1 - a| = |n - \frac{\delta}{2} - n| = \frac{\delta}{2} < \delta$ , pero  $|f(x_1) - n| = |n - 1 - n| = 1 > \varepsilon$ .

Si  $L = n - 1$ , entonces tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  y existe  $x_2 = n + \frac{\delta}{2}$ , tenemos que  $|x_2 - a| = |n + \frac{\delta}{2} - n| = \frac{\delta}{2} < \delta$ ; pero  $|f(x_2) - (n - 1)| = |n - (n - 1)| = 1 > \varepsilon$ .

4. Si  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  entonces  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$ , a pesar que  $f$  no está definida en  $x = -1$  utilizaremos este ejemplo para ilustrar bien cómo encontrar el  $\delta$  apropiado.

Dado  $\varepsilon > 0$ , queremos que  $|f(x) - L| = \left| \frac{x^2 - 1}{x + 1} - (-2) \right| = |x - 1 + 2| = |x + 1|$  sea menor que  $\varepsilon$ , entonces suponemos la condición

$$|x + 1| < \varepsilon$$

y en este caso podemos observar que  $|x + 1| = |x - (-1)| < \varepsilon$ . Esto nos dice que podemos elegir  $\delta = \varepsilon$  para tener la definición 1.4.1. Si graficamos esta función,

tenemos que este ejemplo muestra un caso en que el límite existe aunque la función en el punto no está definida.

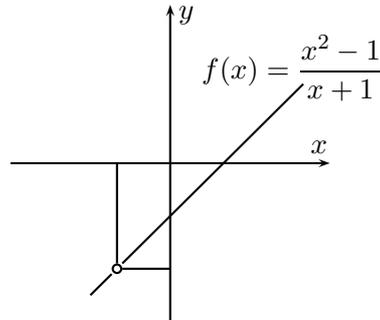


Figura 1.4.1: Existencia del límite sin que la función esté definida.

5.  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ . Dado  $\varepsilon > 0$ ; queremos encontrar  $\delta > 0$  tal que  $|x - 2| < \delta$  implique  $|x^2 - 4| < \varepsilon$ . Para ello observemos que  $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$ , para despejar  $|x - 2|$  debemos acotar  $|x + 2|$ . Como nos interesa lo que pasa cerca del 2, podemos restringir nuestra atención al intervalo  $(1, 3)$ , centrado en 2 con un radio 1. Si  $x \in (1, 3)$  entonces  $3 < x + 2 < 5$ . Por tanto  $|x - 2||x + 2| < 5|x - 2|$  y si  $5|x - 2| < \varepsilon$  entonces  $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$ . Eligiendo  $\delta = \inf\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\}$ , tenemos que si  $|x - 2| < \delta$  entonces  $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2| < 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1}$  no existe. Supongamos que existe  $L \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} = L$ , entonces dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si en particular tomamos  $x > 1$  tenemos que:

$$0 < x - 1 < \delta, \text{ entonces } \left| \frac{1}{x - 1} - L \right| < \varepsilon.$$

Si  $0 < x - 1 < \inf\{\delta, \frac{1}{L + \varepsilon}\}$ , entonces  $x - 1 < \frac{1}{L + \varepsilon}$ . Esto implica que  $\frac{1}{x - 1} > L + \varepsilon$ , es decir,  $\frac{1}{1 - x} - L > \varepsilon$ , lo que contradice la acotación  $\left| \frac{1}{x - 1} - L \right| < \varepsilon$ .

7. La función

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no tiene límite en ningún punto como una consecuencia de la densidad de los números racionales y los irracionales en  $\mathbb{R}$ . Como ejercicio, el lector debiera escribir cuidadosamente los detalles.

**Interpretación geométrica.** La definición de límite nos dice que todas las imágenes por  $f$  que están a una distancia menor que  $\varepsilon$  de  $L$  tienen su preimagen en alguna vecindad del punto  $a$ .

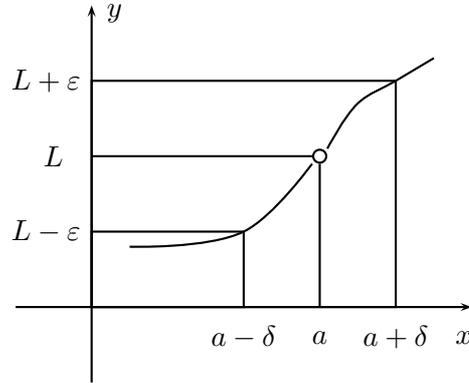


Figura 1.4.2: Interpretación geométrica del límite.

**Teorema 1.4.4** Si el límite de una función en un punto existe, él es único.

**Demostración:** Esta demostración es muy semejante a la del teorema 1.2.15. Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L'$  y que existe además  $L'' = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  con  $L' \neq L''$ .

Usando definición 1.4.1, para  $L'$  y  $L''$  tenemos que: Dado  $\varepsilon > 0$  existe:

- $\delta'$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta'$  entonces  $|f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,
- existe  $\delta''$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta''$  entonces  $|f(x) - L''| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Por tanto eligiendo  $\delta = \inf\{\delta', \delta''\}$ , tenemos que se satisfacen ambas conclusiones, por lo cual tenemos que: si  $0 < |x - a| < \delta$  entonces

$$|L' - L''| = |(L' - f(x)) - (L'' - f(x))| \leq |L' - f(x)| + |L'' - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como  $|L' - L''| < \varepsilon$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , por ejercicio resuelto 5 de la sección 1.3,  $L' = L''$ .

**Teorema 1.4.5** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , entonces  $f(x)$  es acotada en algún intervalo abierto que contiene al punto  $a$ .

**Demostración:** Dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$ . Entonces  $|f(x) - L| < 1$ . Sacando las barras del valor absoluto, nos queda que para  $\delta - a < x < \delta + a$  se

tiene  $L-1 < f(x) < L+1$ . Si además,  $L \geq 0$ , tenemos que  $-(L+1) < L-1 < f(x) < L+1$ , y por tanto,  $|f(x)| < 1+L$ .

Si en cambio,  $L < 0$ , entonces  $L-1 < f(x) < L+1 < 1-L$ , y  $|f(x)| < 1-L$ . Por consiguiente, para todo  $x \in (a-\delta, a+\delta)$ , excepto eventualmente para  $x = a$ , los valores de  $f(x)$  están acotados. ■

**Teorema 1.4.6** Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existen, entonces:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ , cuando  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ .

**Demostración:**

- (i) Sean  $\lim f(x) = L$  y  $\lim g(x) = M$ . Aplicando la definición 1.4.1 a ambos límites tenemos que, dado  $\varepsilon > 0$ :

Existe  $\delta_1$  de modo que si  $0 < |x - a| < \delta_1$ , entonces  $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Existe  $\delta_2$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta_2$ , entonces  $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Eligiendo  $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2\}$  tenemos que:

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

- (ii) Usando un recurso similar al de la parte (ii) teorema 1.2.17, tenemos que:

$$|f(x)g(x) - LM| \leq |f(x)||g(x) - M| + M|f(x) - L|.$$

Aplicando la definición de límite, podemos afirmar que dado  $\varepsilon > 0$ : existe  $\delta_1$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta_1$ . Entonces  $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2M}$  y por teorema 1.4.5 existe  $C > 0$  tal que  $|f(x)| < C$ ; para  $x \in (a-\delta_2, a+\delta_2)$ , existe  $\delta_3$  tal que si  $0 < |x - a| < \delta_3$ . Entonces  $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2C}$ . Así, eligiendo  $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , tenemos que si  $0 < |x - a| < \delta$ . Entonces:

$$|f(x)g(x) - LM| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{C} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

- (iii) Se demuestra combinando de modo apropiado la técnica de (ii) y de (iii) del teorema 1.2.17. Se deja como ejercicio. ■

**Corolario 1.4.7** (i)  $\lim(cf(x)) = c \lim f(x)$ ;  $c = \text{cte.}$

(ii)  $\lim(-f(x)) = -\lim f(x)$ .

(iii)  $\lim(f(x) - g(x)) = \lim f(x) - \lim g(x)$ .

**Demostración:**

(i) Del ejemplo 1.4.3, caso 4.1.2, sabemos que  $\lim_{x \rightarrow c} c = c$ . Usando parte (ii) del teorema 1.4.6, tenemos:

$$\lim(cf(x)) = \lim_{x \rightarrow c} c \cdot \lim f(x) = c \lim f(x).$$

(ii)  $\lim(-f(x)) = \lim((-1)f(x)) = (-1) \lim f(x) = -\lim f(x)$ .

(iii)  $\lim(f(x) - g(x)) = \lim(f(x) + (-g(x))) = \lim f(x) + \lim(-g(x)) = \lim f(x) - \lim g(x)$ .

■

**Ejemplo 1.4.8** 1. **Límites de funciones polinomiales:**

Sea  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ;  $a_i$  constantes. Por teorema 1.4.6 y corolario 1.4.7

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a_n \lim_{x \rightarrow a} x^n + \dots + a_1 \lim_{x \rightarrow a} x + a_0$$

y en virtud del ejemplo 1.4.3, caso 2  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a_n a^n + \dots + a_1 a + a_0$ .

2. **Límites de funciones racionales:**

Sea  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ; con  $p(x)$  y  $q(x)$  funciones polinomiales. Si  $q(a) \neq 0$ , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} r(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} p(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = r(a).$$

**Teorema 1.4.9** Una condición necesaria y suficiente para que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  es que, para cada sucesión  $\{x_n\} \subset D(f)$ ,  $x_n \neq a$  y que converge hacia  $a$ , se tenga que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

**Demostración:**

- (i) Primero demostraremos que si existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , entonces se tiene la condición del enunciado.

Sea  $\{x_n\}$  una sucesión que converge hacia  $a$  y  $x_n \neq a$  para todo  $n$ . Entonces, dado  $\eta > 0$ , existe  $N$  tal que si  $n > N$ , se cumple que  $0 < |x_n - a| < \eta$ .

Como  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que,  $0 < |x - a| < \delta$  implica que  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Tomando en particular  $\eta = \delta$ , podemos concluir que si  $n > N$ , entonces  $|x_n - a| < \delta$  y por tanto  $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ . Con lo cual tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .

- (ii) Supongamos que la condición del enunciado se cumple y demostremos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Por reducción al absurdo supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ . Usando la negación de la definición 1.4.1), existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$ , existen  $x$  tales que  $0 < |x - a| < \delta$ , pero  $|f(x) - L| \geq \varepsilon$ .

Tomando  $\delta = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que para cada  $n$ , existe al menos un  $x_n$  tal que  $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$  pero  $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ .

Así podemos formar una sucesión  $\{x_n\}$  tal que  $x_n \neq a$  y  $\lim x_n = a$ , pero tal que  $\lim f(x_n) \neq L$ , lo que contradice la hipótesis. Por tanto,  $\lim f(x)$  debe ser igual a  $L$ .

■

**Observación 1.4.10** 1. En relación a la demostración del teorema, podemos observar que existen infinitas sucesiones  $\{x_n\}$  contenidas en el dominio de  $f$  con  $x_n \neq a$  para todo  $n$  y que convergen hacia  $a$ , pues  $a$  es un punto de acumulación del dominio de  $f$ .

2. El teorema 1.4.9 puede simplificar algunos cálculos de límite; por ejemplo, usando algunas propiedades de las potencias, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad ; \quad a > 0.$$

**Teorema 1.4.11** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existen, entonces:

- (i)  $f(x) \leq g(x)$  implica  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .
- (ii) Si la función  $h$  es tal que  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  y además  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

**Demostración:** La demostración de este teorema es consecuencia del teorema anterior y de las respectivas desigualdades para límites de sucesiones, por lo que se deja como ejercicio. ■

**Teorema 1.4.12** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$  y  $f(x) \neq A$  para todo  $x \neq a$  en algún intervalo abierto que contiene al punto  $a$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = B$ .

**Demostración:** Como  $\lim f(x) = A$ , entonces para cualquier sucesión  $\{x_n\}$ ,  $x_n \neq a$  y tal que  $\lim x_n = a$  se tiene que  $\lim f(x_n) = A$ . Sea  $y_n = f(x_n)$  y como  $f$  no asume el valor  $A$  en algún intervalo que contiene al punto  $a$ , para  $n$  suficientemente grande  $f(x_n) \neq A$ , o lo que es lo mismo  $y_n \neq A$ . Así  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = B$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = B$ ; para toda sucesión  $\{x_n\}$  tal que  $x_n \neq a$  y tal que  $\lim x_n = a$ . Por el teorema 1.4.9:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B. \blacksquare$$

**Ejemplo 1.4.13** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 1}$ .

Aquí  $f(x) = x^2 + 1$  y  $g(x) = \sqrt{x}$ , entonces  $\sqrt{x^2 + 1} = g(f(x))$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  y  $f(x) \neq 2$  para todo  $x \neq 1$  cercanos a 1, además  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \sqrt{2}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2}$ .

### 1.4.2. Límites laterales

En la definición 1.4.1 se contempla la posibilidad de acercarse al punto  $a$  por ambos lados por ser  $a$  un punto de acumulación. Para simplificar, suponemos que existe un intervalo abierto  $(a - \delta, a + \delta)$  de modo que, excepto eventualmente  $a$ , esté contenido en el dominio de la función.

Pero podemos también analizar el comportamiento de una función separando los valores de  $x$  mayores que  $a$  y los valores de  $x$  menores que  $a$ . Así surge el concepto de límite lateral.

**Definición 1.4.14** Diremos que el número  $L_d$  (respectivamente  $L_i$ ) es el **límite a la derecha (respectivamente a la izquierda)** en un punto  $a$  de una función  $f$  si:

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $a < x < a + \delta$ , entonces  $|f(x) - L_d| < \varepsilon$  (respectivamente si  $a - \delta < x < a$ , entonces  $|f(x) - L_i| < \varepsilon$ ). En estos casos se suele usar las notaciones siguientes:

$$L_d = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad ; \quad L_i = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

- Ejemplo 1.4.15** 1.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^-} [x] = 2$ . En general, dado  $n \in \mathbb{Z}$ :  $\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$ ;  $\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1$ . En cada entero:  $L_d \neq L_i$ .
2. Si el dominio de la función es un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , para cada extremo del intervalo sólo tiene sentido hablar de uno de los límites laterales: Para  $a$ , podría existir sólo  $L_d$  y para  $b$  sólo  $L_i$ .
3.  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 0$ , sólo puede analizarse su comportamiento para valores mayores que 0 y tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$  que vale 0.

- Teorema 1.4.16** (i)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_d$  si y sólo si para toda sucesión  $\{x_n\}$  tal que  $x_n > a$  y  $\lim x_n = a$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L_d$ .
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_i$  si y sólo si para toda sucesión  $\{x_n\}$  tal que  $x_n < a$ , y  $\lim x_n = a$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L_i$ .
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ .

**Demostración:** Ejercicio

### 1.4.3. Límites finitos cuando la variable independiente crece o decrece indefinidamente

**Definición 1.4.17** Diremos que el número  $L$  es el límite de  $f(x)$  cuando:

- (i)  $x$  crece indefinidamente si dado  $\varepsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que si  $x > M$ . Entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . En tal caso escribimos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad f(x) \rightarrow L \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow +\infty.$$

- (ii)  $x$  decrece indefinidamente si dado  $\varepsilon > 0$  existe  $M < 0$  tal que si  $x < M$ . Entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . En este caso escribiremos  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  o  $f(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

- Ejemplo 1.4.18** 1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0^+$ . En efecto: dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$  tal que si  $x > M$ . Entonces  $x > \frac{1}{\varepsilon}$  y por tanto,  $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$ . Escribimos  $0^+$  para enfatizar que  $\frac{1}{x}$  se acerca a 0 por la parte positiva del eje  $Y$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$  tal que si  $x < M$ , o lo que es lo mismo  $x < -\frac{1}{\varepsilon}$  entonces  $-\varepsilon < \frac{1}{x}$  y como  $\frac{1}{x} < 0$ ,  $-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$ , es decir,  $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$ .

En general, ninguna función trigonométrica tiene límite cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , porque debido a la periodicidad ellas oscilan.

Los teoremas 1.4.6, 1.4.11 y 1.4.12 permanecen válidos al reemplazar  $a$  por  $+\infty$  o  $-\infty$ .

La siguiente propiedad permite reducir el cálculo de límites al  $+\infty$  al cálculo de límites en puntos finitos.

**Teorema 1.4.19** (i) Si  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{x})$  existe, entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{x})$ .

(ii) Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ .

**Demostración:**

(i) Haciendo  $x = \frac{1}{t}$ , tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0^+$ . Usando el teorema 1.4.12 con  $a = \infty$  y  $A = 0^+$ , se tiene la conclusión.

(ii) Demostración análoga. ■

**Ejemplo 1.4.20** Límites de funciones racionales cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Sea

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

con  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  ;  $a_n \neq 0$  y  $q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$  ;  $b_m \neq 0$ . Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} q(x)}$$

Escribiendo  $p(x) = x^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n})$  y  $q(x) = x^m(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m})$ , tenemos que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Si  $n = m$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \frac{a_n}{b_m}$ .

Si  $m > n$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{m-n}} = 0$ .

Si  $m < n$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} = \pm\infty$ . Así,  $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x)$  es finito si y sólo si  $m \geq n$ .

**Interpretación Geométrica:** Si hacemos un gráfico de  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ , vemos que para valores grandes de  $x$ , los valores de la función se acumulan en torno a la recta  $y = L$ . Esto inspira la siguiente definición:

**Definición 1.4.21** Decimos que la recta  $y = L$  es una **asíntota horizontal** del gráfico de  $f$  si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  ó si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ .

**Ejemplo 1.4.22** 1. Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , la recta  $y = 0$ , es decir, el eje  $X$  parte positiva es una asíntota horizontal de  $\frac{1}{x}$ .

2. Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ , tenemos el siguiente gráfico.

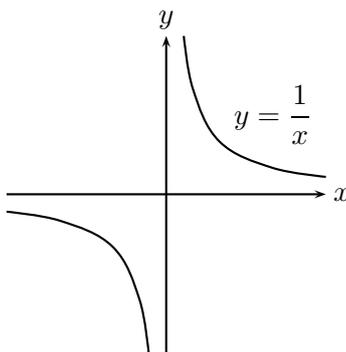


Figura 1.4.3: Asíntota de  $\frac{1}{x}$ .

3. La recta  $y = 3$  es una asíntota horizontal para la función  $f(x) = \frac{3x+1}{x}$ , pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 + \frac{1}{x} \right) = 3^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 3 + \frac{1}{x} \right) = 3^-$$

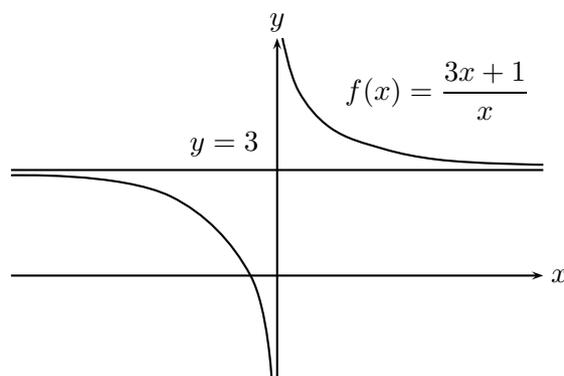


Figura 1.4.4: Asíntota horizontal de  $\frac{3x + 1}{x}$ .

### Límites infinitos

Un límite infinito refleja el crecimiento o decrecimiento indefinido de la variable dependiente, lo que puede suceder cuando la variable independiente se acerca a un punto finito o cuando ella crece o decrece a su vez, indefinidamente. Por tal razón debemos separar los casos.

**Definición 1.4.23** Diremos que:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  si dado  $M > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta$ , entonces  $f(x) > M$ .
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  si dado  $M < 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta$ , entonces  $f(x) < M$ .
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  si dado  $M > 0$ , existe  $K > 0$  tal que si  $x > K$ , entonces  $f(x) > M$ .
- (iv)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , si dado  $M < 0$ , existe  $K < 0$  tal que si  $x < K$ , entonces  $f(x) < M$ .
- (v)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ , si dado  $M > 0$ , existe  $K < 0$  tal que si  $x < K$ , entonces  $f(x) > M$ .
- (vi)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ , si dado  $M < 0$ , existe  $K > 0$  tal que si  $x > K$ , entonces  $f(x) < M$ .

**Observación 1.4.24** 1. De manera obvia las definiciones (i) y (ii) pueden escribirse para  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  y para  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ .

- 2. Todos ellas, como en el caso finito, pueden reinterpretarse en términos de sucesiones. Tal escritura se deja como ejercicio.

3. Las reglas aritméticas valen también para estos límites, excepto cuando se obtiene una de las formas indeterminadas. En estos casos se debe buscar en primera instancia, como ya hemos visto, formas algebraicas de hacer desaparecer la indeterminación.

Así, en particular, tenemos que: Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$ .

**Ejemplo 1.4.25** 1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$ . Si  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$  su dominio excluye el punto  $x = 2$ , además  $f$  es siempre positiva por ser un cuadrado, cuando uno se acerca a 2 por ambos lados,  $f(x)$  crece indefinidamente.

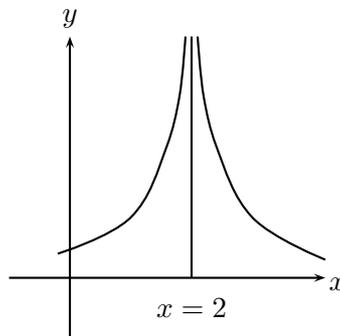


Figura 1.4.5:  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{(x-2)^2} = -\infty$ . La función  $g(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$ , es la función **simétrica** de la anterior y, por tanto, es evidente que  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$ .

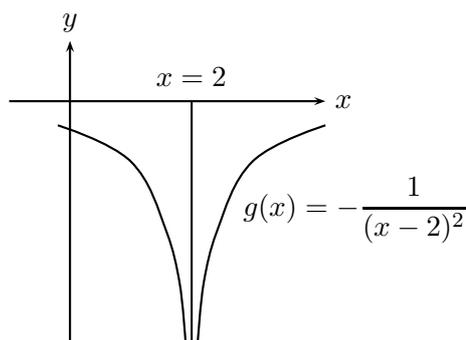


Figura 1.4.6

3.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ . Si  $h(x) = \frac{1}{x-2}$ ,  $x \neq 2$ , ella cambia de signo según  $x$  sea mayor o menor que 2. Cuando  $x \rightarrow 2^+$ , la función crece indefinidamente y cuando  $x \rightarrow 2^-$ , la función decrece indefinidamente.

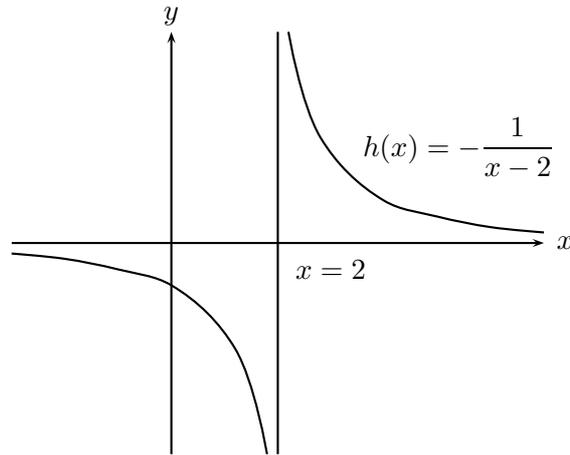


Figura 1.4.7

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 + 1 - 3x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 + 1 - 3x) = -\infty$ . Sea  $f(x) = 4x^3 + 1 - 3x = x^3(4 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2})$ ; como  $\frac{1}{x^k} \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , tenemos:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = 4(+\infty) = +\infty$ . y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = 4(-\infty) = -\infty$ .

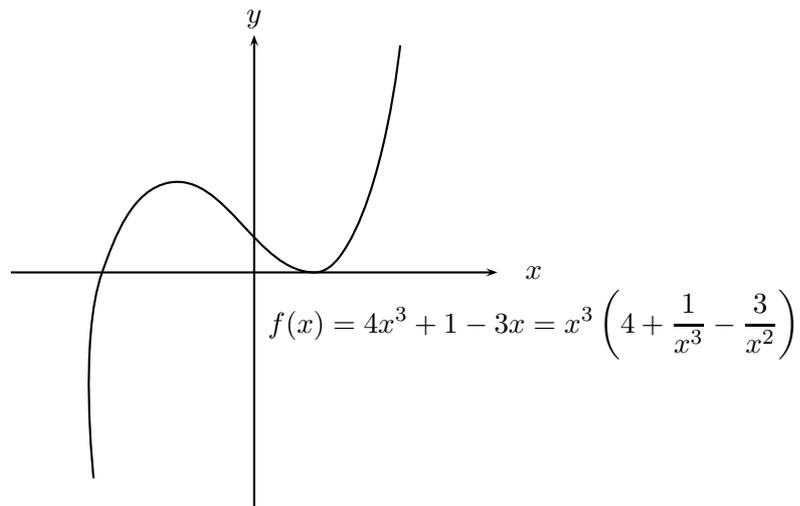


Figura 1.4.8

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty.$$

Como  $g(x) = x^2$  es una parábola y es siempre positiva,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^2) = -\infty.$$

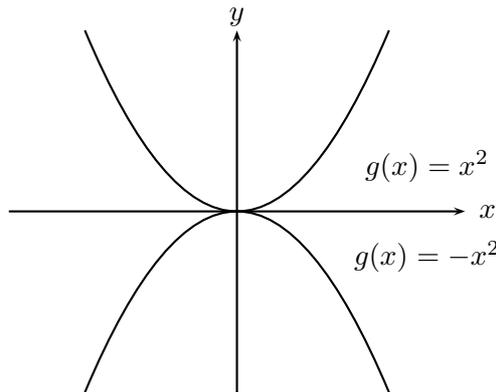


Figura 1.4.9

6. **Límites de polinomios:** Sea

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0 \\ &= x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n = a_n \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

En particular

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 5x^4 + 8) = -5 \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = -\infty.$$

**Definición 1.4.26** Diremos que la recta  $x = a$  es una **asíntota vertical** del gráfico de la función  $f$  si:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  o  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  o  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ .

**Ejemplo 1.4.27** 1. Los casos 1, 2 y 3 del ejemplo 1.4.25 muestran asíntotas verticales.

2. La recta  $x = 2$  es una asíntota vertical de las funciones  $\pm \frac{1}{(x-2)^2}, \pm \frac{1}{x-2}$ .

### 1.4.4. Las funciones circulares o trigonométricas

#### Conceptos previos

**La fórmula de la distancia en el plano:** Sean  $P_1, P_2$  dos puntos del plano, con coordenadas  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  respectivamente. El triángulo  $P_1QP_2$  es rectángulo en  $Q$ , por teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1Q}^2 + \overline{QP_2}^2$$

si llamamos  $d$  a la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$ , tenemos que

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

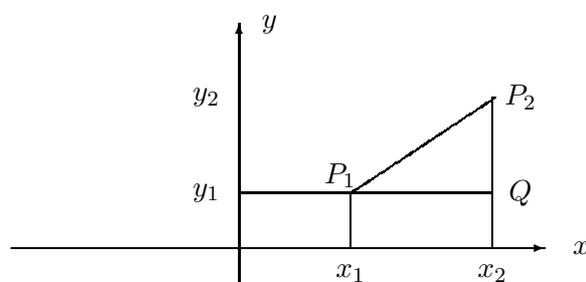


Figura 1.4.10: Distancia entre dos puntos

**La circunferencia de centro  $C=(h, k)$  y radio  $r$**  Recordando que la circunferencia de radio  $r$  y centro  $C$  es el lugar geométrico de los puntos  $p$  del plano que están a la distancia  $r$  del centro  $C$ , podemos deducir la ecuación que satisfacen las coordenadas de los puntos de dicha circunferencia.

Sean  $(h, k)$  las coordenadas del centro  $C$  y sea  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  un punto cualquiera de la circunferencia. Usando la definición de la circunferencia tenemos que:

$$\begin{aligned} d(P, C) = r &\iff [d(P, C)]^2 = r^2 \\ \text{ssi} &\quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia de radio  $r$  y centro  $(h, k)$  es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \quad (1.8)$$

En particular, para nuestros fines trabajaremos con la circunferencia más simple, la de centro en el origen y radio 1, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (1.9)$$

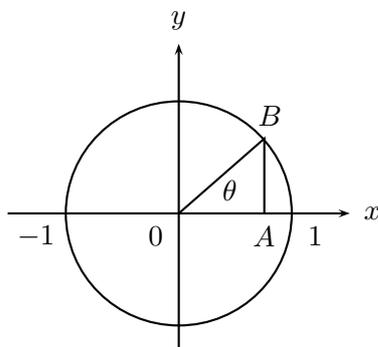


Figura 1.4.11: Círculo unitario

**Medición de ángulos** Intuitivamente consideremos dos semirrectas en el plano con extremo común. Por simplicidad supongamos que este extremo es el origen del plano y una de las semirrectas está en el eje de las abscisas. Por ángulo entenderemos la **medida de la separación** de estas semirrectas. Como existen distintas maneras de medir esta separación, adoptaremos la siguiente convención.

Diremos que un ángulo está en posición normal o estándar si lo medimos desde el semieje  $OX$ , con lo cual la medida de separación se reduce a dos posibilidades: Si esta medida de separación se toma en el sentido contrario a los punteros del reloj, el ángulo se dice **positivo** y si es en el sentido de los punteros del reloj se dice que el ángulo es **negativo**.

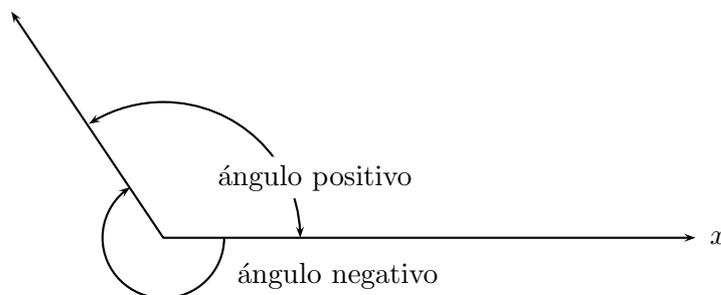


Figura 1.4.12: Dos sentidos en la medida de un ángulo

Esta noción se puede ver más dinámicamente pensando que el ángulo es la medida de separación de una semirrecta que gira en torno a su extremo. La máxima rotación es aquella que vuelve a su posición inicial; este ángulo se llamará **ángulo completo** y si esta rotación fue en sentido positivo le daremos el valor de 360 grados, que se denota por  $360^\circ$ . ¿Por qué  $360^\circ$  y no otro valor? Tal vez corresponde a los días de un año calendario que

en la época de los griegos clásicos era de 360 días. La división en sólo 360 unidades que a simple vista parece razonable, no lo es tanto si queremos más precisión. Por ejemplo, en astronomía dividimos un grado en 60 minutos;  $1^\circ = 60'$  y para ser más finos aun, 1 minuto en 60 segundos  $1' = 60''$  y podemos continuar, dependiendo de nuestras necesidades. La división en 60 o sistema sexagesimal es herencia de los babilonios.

Los 360 grados corresponden a una vuelta completa en el sentido positivo. Por supuesto que podemos dar las vueltas que queramos en cualquiera de los dos sentidos. Por ejemplo: un ángulo de 765 grados, descomponiendo  $765 = 2 \cdot 360 + 45$ , significa haber dado dos vueltas completas y estar en el punto determinado por un ángulo de 45 grados. Si consideramos el ángulo de  $-765$  grados, significa que hemos dado dos vueltas completas y nos encontramos en el punto determinado por el ángulo  $-45$  grados. es decir hemos caminado en el sentido de los punteros del reloj y estamos a 45 grados bajo el semirecta  $OX$ . Como nuestro objetivo es introducir las funciones circulares o trigonométricas como funciones de números reales y los **grados no son números reales** debemos hacer una transformación de los grados para hacerlos equivalentes a números reales. Para ello imaginaremos que caminamos sobre la circunferencia unitaria, y por lo tanto al dar una vuelta completa hemos caminado una longitud de  $2\pi$  y descrito un ángulo de 360 grados.

**Definición 1.4.28** Llamaremos un **radián** a la longitud de arco de  $\frac{1}{2\pi}$ .

Así, a los 360 grados le corresponde una longitud de arco sobre la circunferencia unitaria de  $2\pi$  unidades de longitud. Esto nos permite, usando un razonamiento de proporciones directas, tener una fórmula que transforme grados en radianes y viceversa.

$$\frac{\text{ángulo en radianes}}{\text{ángulo en grados}} = \frac{2\pi}{360} \quad (1.10)$$

#### 1.4.5. Definición de las funciones circulares o trigonométricas

Consideremos la circunferencia unitaria cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (1.11)$$

y sobre ella consideremos un punto cualquiera  $P$ . Este punto determina el ángulo  $\theta$  como lo muestra la figura. Como el punto  $P$  es un punto del plano le corresponden las coordenadas

$(x_P, y_P)$ , donde  $x_P = \overline{OA}$  e  $y_P = \overline{AP}$ .

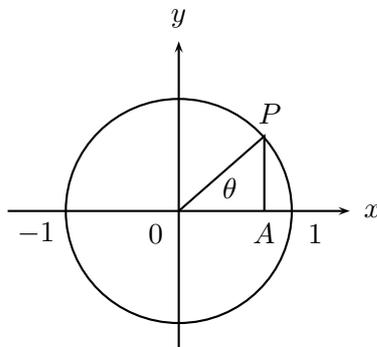


Figura 1.4.13 : Circunferencia unitaria

**Definición 1.4.29** Definiremos las siguientes funciones numéricas:

1. La **función seno**:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \theta \mapsto \text{sen } \theta = y_P$
2. La **función coseno**:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad \theta \mapsto \text{cos } \theta = x_P$

**Propiedades básicas de seno y coseno** Antes de deducir las propiedades más elementales de estas funciones, es importante observar y retener en la mente que estas funciones no son de naturaleza algebraica. forman parte del tipo de funciones que se llaman **funciones trascendentes**.

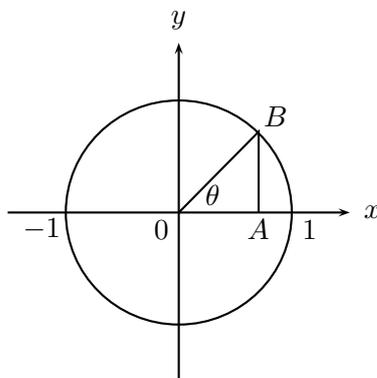


Figura 1.4.14: Representación del seno y coseno en el círculo unitario

1. Algunos valores de referencia de seno y coseno

- Si  $\theta = 0$ , entonces el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria es  $(1, 0)$ , lo que nos permite concluir que:

$$\cos 0 = 1$$

$$\operatorname{sen} 0 = 0.$$

- Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , entonces el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria es  $(0, 1)$ , lo que nos permite concluir que:

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1.$$

- Si  $\theta = \pi$ , entonces el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria es  $(-1, 0)$ , lo que nos permite concluir que:

$$\cos \pi = -1$$

$$\operatorname{sen} \pi = 0.$$

- Si  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ , entonces el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria es  $(0, -1)$ , lo que nos permite concluir que:

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1.$$

- Si  $\theta = 2\pi$ , entonces el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria es  $(1, 0)$ , lo que nos permite concluir que:

$$\cos 2\pi = 1$$

$$\operatorname{sen} 2\pi = 0.$$

2. **Periodicidad** Dado que los valores de  $\operatorname{sen} x$  y  $\cos x$  dependen de la ubicación del punto en la circunferencia unitaria y como su longitud total es  $2\pi$ , entonces fuera del intervalo  $[0, 2\pi]$  los valores de estas funciones se repiten **periódicamente**. Por lo tanto las funciones seno y coseno son periódicas de período  $2\pi$ . Es decir, para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

### 3. Paridad de coseno e imparidad de seno

Si  $P = (x_p, y_p)$  y  $P' = (x'_p, y'_p)$  con  $x_p = x'_p$  y  $y'_p = -y_p$ . De aquí concluimos que  $\cos(-x) = \cos x$  y  $\text{sen}(-x) = -\text{sen} x$ . Es decir, la función coseno es una función **par** y la función seno es **impar**.

Así, tenemos que para todo  $x \in \mathbb{R}$  tenemos que:

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ y } \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x).$$

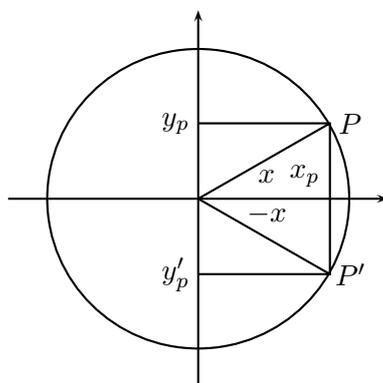


Figura 1.4.15: Relaciones de paridad en las funciones trigonométricas

### 4. Identidad fundamental

Dado que seno y coseno de un mismo número corresponden a las coordenadas de un punto sobre la circunferencia unitaria, tenemos que:

$$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

5. **Recorrido** Como consecuencia inmediata de la identidad fundamental dada por la ecuación 1.12, se tiene que el recorrido de las funciones seno y coseno es  $[-1, 1]$ .

### Cálculo de los valores más usuales de las funciones seno y coseno

1.  $x = \frac{\pi}{3}$

En el círculo unitario inscribimos un hexágono regular como en la figura 2.3.10.

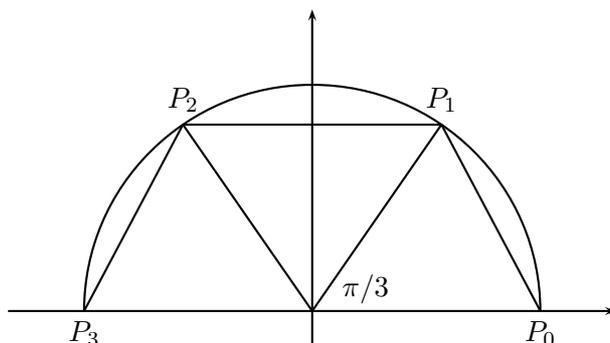


Figura 1.4.16: Hexágono regular

Si  $(u, v)$  son las coordenadas de  $P_1$ , entonces las de  $P_2$  son  $(-u, v)$ ; como

$$P_1P_0 = \sqrt{(u-1)^2 + (v-0)^2} = P_2P_1 = \sqrt{(-u-u)^2 + (v-v)^2},$$

se tiene (elevando al cuadrado) que  $(u-1)^2 + v^2 = (-2u)^2$ . Como  $u^2 + v^2 = 1$ , entonces  $2 - 2u = 4u^2$  que tiene como soluciones  $u_1 = \frac{1}{2}$  y  $u_2 = -1$ . Como  $u > 0$  se elige la solución  $u = \frac{1}{2}$ , y de  $u^2 + v^2 = 1$ , se tiene que  $v = \sqrt{1-u^2}$  (raíz positiva) que es  $v = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Por lo tanto:

$$u = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad v = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

El ángulo  $P_0OP_2$  es  $\frac{2\pi}{3}$  y se obtiene:

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.  $x = \frac{\pi}{4}$ .

En el círculo unitario inscribimos un octágono regular como en la figura 1.4.17.

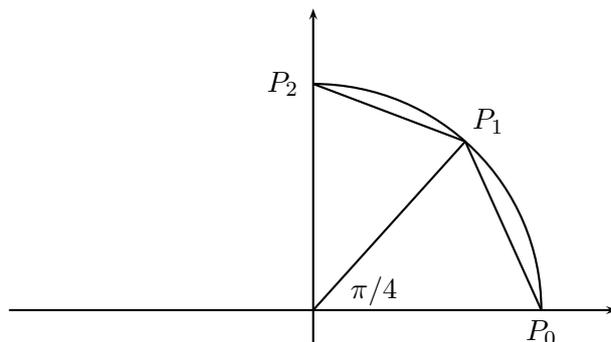


Figura 1.4.17: Octágono regular

Si  $(u, v)$  son las coordenadas de  $P_1$ , entonces la ecuación  $P_0P_1 = P_1P_2$  es equivalente a:

$$\sqrt{(u-1)^2 + (v-0)^2} = \sqrt{(0-u)^2 + (1-v)^2},$$

es decir,  $u^2 - 2u + 1 + v^2 = u^2 + 1 - 2v + v^2$  lo que implica  $u = v$ . Por lo tanto,  $u^2 + v^2 = 1 \implies 2u^2 = 1 \implies u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , por lo tanto,  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , lo que implica

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3.  $x = \frac{\pi}{6}$ .

En el círculo unitario inscribimos un dodecágono regular como en la figura 2.3.12.

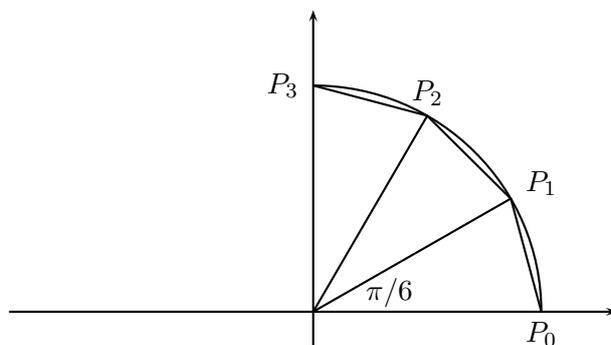


Figura 1.4.18: Dodecágono regular

Entonces  $P_1 = (u, v)$  y  $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  como se calculó en el punto (1) por ser  $\frac{\pi}{3}$  el ángulo  $P_0OP_2$ .

De la ecuación  $P_3P_2 = P_0P_1$  obtenemos  $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $v = \frac{1}{2}$ , por tanto:

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Observación 1.4.30** Con este método de inscribir polígonos regulares conociendo sus lados y apotemas, podemos seguir calculando los valores de las funciones trigonométricas para ángulos cada vez más pequeños de la forma  $\frac{\pi}{2k}$ ,  $\frac{\pi}{3k}$ ,  $\frac{\pi}{5k}$ , etc. ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Con estos valores encontrados, usando la geometría euclidiana elemental más los que podemos encontrar con una calculadora, podemos esbozar los gráficos de las funciones seno y coseno.

**Los gráficos de seno y coseno** Reuniendo la información obtenida tenemos:

1.

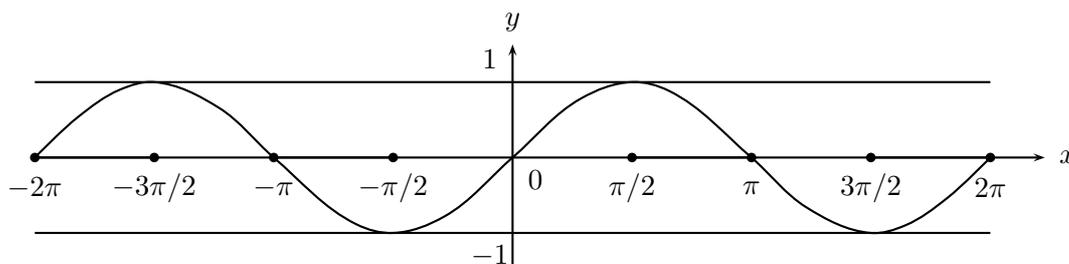


Figura 1.4.19: La función  $y = \text{sen } x$

2.

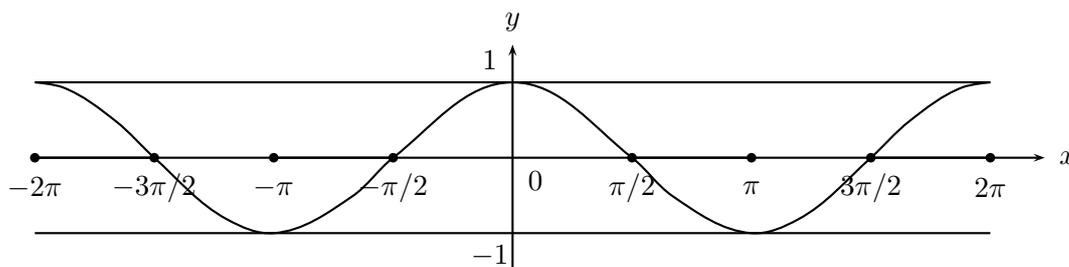


Figura 1.4.20: La función  $y = \text{cos } x$

**Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante** Estas funciones trigonométricas están definidas en términos de seno y coseno. Por lo tanto, sus propiedades se deducen de las de aquellas.

**Definición 1.4.31** 1. La **función tangente**:  $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$ , definida para todos los  $x \in \mathbb{R}$  donde no se anula la función  $\operatorname{cos} x$ . Es decir:  
 $D(\tan) = \mathbb{R} - \{(2n - 1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$ ;  $R(\tan) = \mathbb{R}$ .

La función tangente también es periódica, pero de período  $\pi$ , es decir, para todo  $x \in D(\tan)$ .

$$\tan(x + k\pi) = \tan x.$$

2. La **función cotangente** se define como:

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)} \text{ para todo } x \in \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}.$$

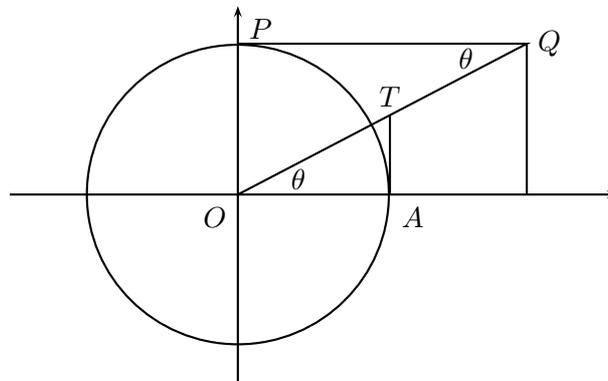
3. La **función secante** se define como:

$$\operatorname{sec}(x) = \frac{1}{\operatorname{cos}(x)}, \text{ para todo } x \in \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{cos} x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{(2n - 1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

4. La **función cosecante** se define como:

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \text{ para todo } x \in \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}.$$

**Interpretación geométrica de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante** Estas funciones para ángulos agudos pueden ser representadas por los siguientes trazos como vemos en la figura 2.3.16.



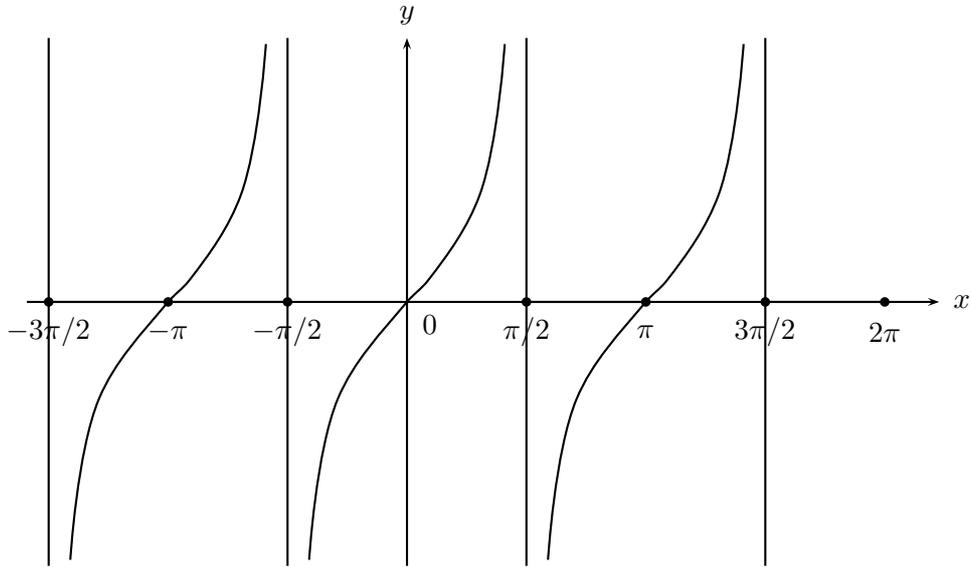
$$\tan \theta = \overline{AT}, \operatorname{cotan} \theta = \overline{PQ}, \operatorname{sec} \theta = \overline{OT}, \operatorname{cosec} \theta = \overline{OQ}$$

Figura 1.4.21: Interpretación geométrica

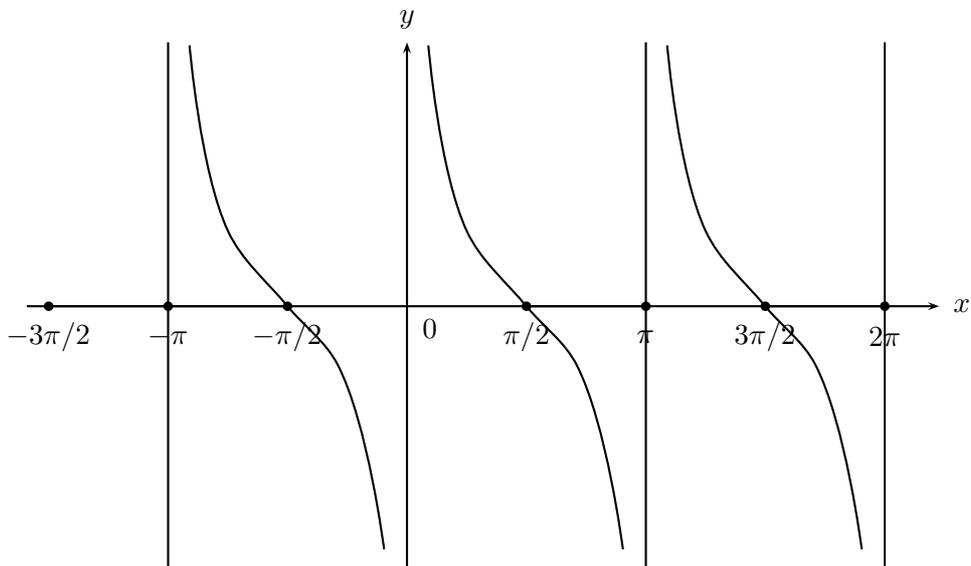
Es un bonito ejercicio de semejanza de triángulos justificar esta interpretación geométrica y extenderla a cualquier ángulo  $\theta$ .

## Gráficos de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

1.

Figura 1.4.22: La función  $y = \tan x$ 

2.

Figura 1.4.23: La función  $y = \cotan x$

3.

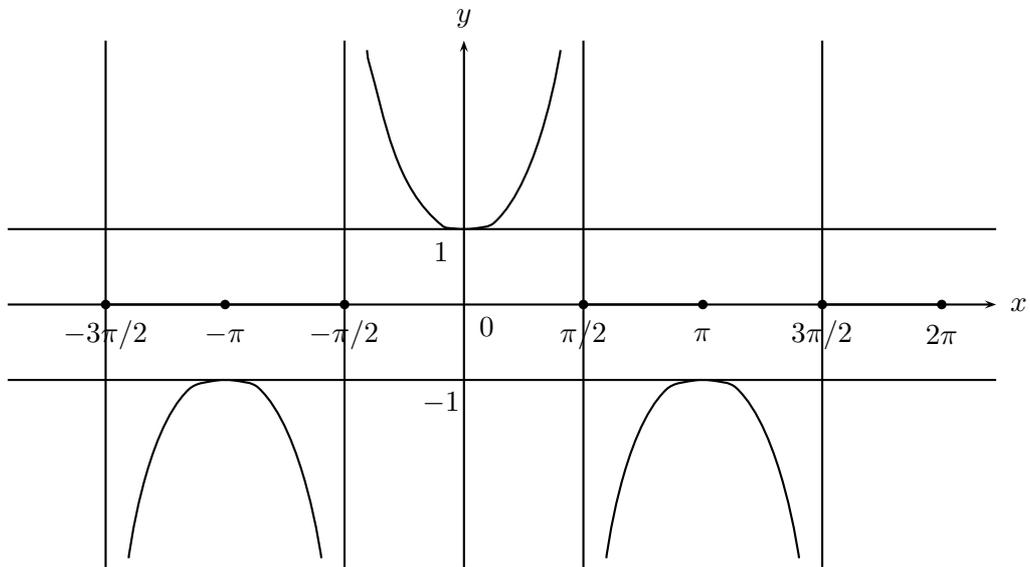


Figura 1.4.24: La función  $y = \sec x$

4.

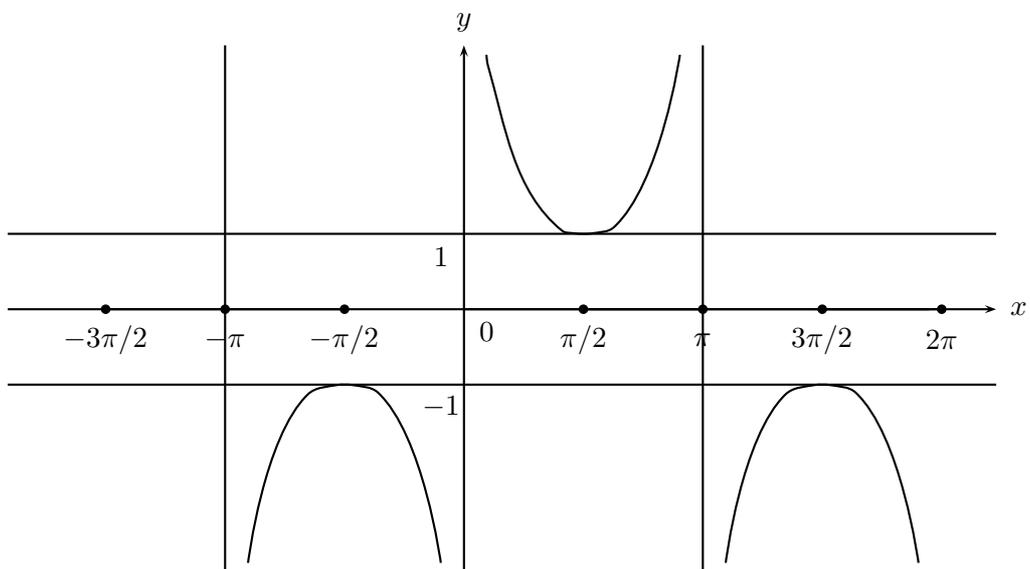


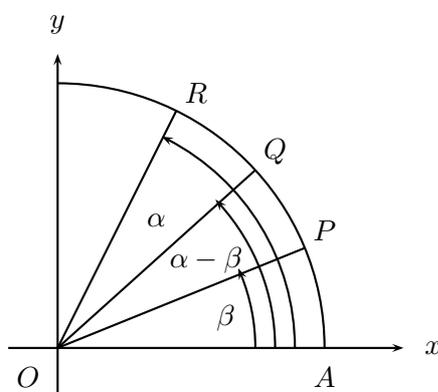
Figura 1.4.25: La función  $y = \operatorname{cosec} x$

### Identidades fundamentales de las funciones trigonométricas

Casi todas las propiedades e identidades fundamentales pueden desprenderse de las fórmulas para  $\sin(\alpha \pm \beta)$  o  $\cos(\alpha \pm \beta)$ . De allí que existan variadas formas de obtener dichas fórmulas. Veremos la sugerida por Cauchy.

**Teorema 1.4.32** Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se verifica que  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ .

**Demostración:** Consideremos la siguiente figura:



Donde:

$$\begin{aligned} \angle AOP &= \beta & P &= (\cos \beta, \sin \beta) \\ \angle AOQ &= \alpha - \beta & Q &= (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)) \\ \angle AOR &= \alpha & R &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ A &= (1, 0) \end{aligned}$$

Figura 1.4.26: Diagrama de Cauchy

Los ángulos  $AOQ$  y  $POR$  son de igual medida y por tanto subtienden cuerdas de la misma longitud, entonces se tiene:

$$d^2(A, Q) = d^2(P, R);$$

es decir:

$$\begin{aligned} (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\ \iff 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ \iff \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \blacksquare \end{aligned}$$

Del teorema 1.4.32 se obtiene la mayoría de las identidades fundamentales que detallaremos a continuación:

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) &= \cos\frac{\pi}{2} \cos\beta + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\beta \\
 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \cos\alpha \\
 \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{sen}\beta \\
 &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \\
 \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-\beta) \\
 &= \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \\
 \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \operatorname{sen}(-\beta) \\
 &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta
 \end{aligned}$$

Del mismo modo tenemos que:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2},$$

implica

$$(1 + \cos\alpha) \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\alpha \cos\frac{\alpha}{2},$$

y por lo tanto,

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha}.$$

A continuación daremos una lista de las identidades más trascendentales:

$$\begin{aligned} \sec^2 \alpha &= \tan^2 \alpha + 1 \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \operatorname{sen}(\alpha/2) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ \cos(\alpha/2) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \tan(\alpha/2) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \end{aligned}$$

El doble signo indica que en cada caso debe seleccionarse el valor que corresponda de acuerdo al cuadrante donde se encuentra  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta &= 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Además, para cada  $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \cos(\pi/2 - \theta) & \cos \theta &= \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) \\ \tan \theta &= \cot(\pi/2 - \theta) & \cotan \theta &= \tan(\pi/2 - \theta) \\ \operatorname{sec} \theta &= \operatorname{cosec}(\pi/2 - \theta) & \operatorname{cosec} \theta &= \sec(\pi/2 - \theta) \end{aligned}$$

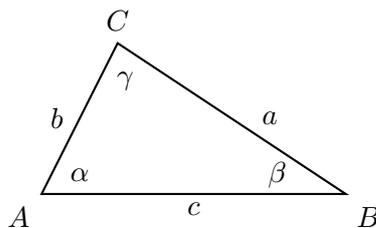
**Teoremas del seno y del coseno**

Queremos abordar ahora dos problemas clásicos de la geometría:

1. Dado un triángulo cualquiera del cual se conoce la longitud de dos de sus lados, encontrar la longitud del tercero.
2. Encontrar en un triángulo cualquiera la longitud de un lado conociendo el ángulo opuesto y la longitud y el respectivo ángulo opuesto de otro lado.

Estos problemas son resueltos por el teorema del coseno y el teorema del seno respectivamente. Antes de enunciarlos veamos la siguiente equivalencia:

En un triángulo  $ABC$  cualquiera, se tiene que:



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \quad (i)$$

si y sólo si

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c} \quad (ii)$$

Demostremos primeramente que  $(i) \implies (ii)$

Sea  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ , entonces  $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \\
\operatorname{sen}^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \\
&= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \\
&= \frac{(2bc - (b^2 + c^2 - a^2))(2bc + (b^2 + c^2 - a^2))}{4b^2c^2} \\
&= \frac{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{4b^2c^2}
\end{aligned}$$

Análogamente usando el mismo procedimiento, considerando  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ , se tiene

$$\operatorname{sen}^2 \beta = \frac{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{4a^2c^2}$$

De ambas ecuaciones obtenemos  $b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = a^2 \operatorname{sen}^2 \beta$  y como  $\operatorname{sen} \alpha, \operatorname{sen} \beta \geq 0$ , se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b}$$

La otra identidad se obtiene de la misma manera. Demostremos ahora que  $(ii) \implies (i)$

Sabemos que  $\pi = \alpha + \beta + \gamma$ , por lo tanto:

$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}[\pi - (\beta + \gamma)] = \operatorname{sen}(\beta + \gamma)$ , entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 \alpha &= (\operatorname{sen} \beta \cos \gamma + \cos \beta \operatorname{sen} \gamma)^2 \\
&= \operatorname{sen}^2 \beta \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \operatorname{sen}^2 \gamma + 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \cos \beta \cos \gamma \\
&= \operatorname{sen}^2 \beta (1 - \operatorname{sen}^2 \gamma) + (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) \operatorname{sen}^2 \gamma + 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \cos \beta \cos \gamma \\
&= \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma - 2 \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen}^2 \gamma + 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \cos \beta \cos \gamma \\
&= \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma - 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma (\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma - \cos \beta \cos \gamma) \\
&= \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma - 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma (-\cos(\beta + \gamma)) \\
&= \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma - 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma (-\cos(\pi - \alpha))
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma - 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \cos \alpha$$

Por hipótesis sabemos  $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} = k = \text{constante} \neq 0$ , entonces  $\operatorname{sen} \alpha = ka$ ,  $\operatorname{sen} \beta = kb$ , y  $\operatorname{sen} \gamma = kc$ . Sustituyendo estas expresiones en la expresión encontrada para  $\operatorname{sen}^2 \alpha$ , se obtiene:

$$k^2 a^2 = k^2 b^2 + k^2 c^2 - 2k^2 bc \cos \alpha$$

es decir,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ , que es lo que queríamos probar. Las otras identidades se demuestran de la misma manera. Enunciaremos ahora los teoremas del coseno y del seno.

### Teorema 1.4.33 Teorema del Coseno

En un triángulo cualquiera  $ABC$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

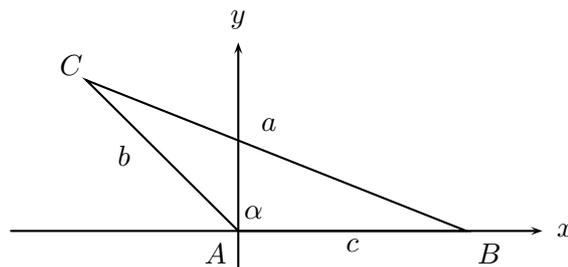
### Teorema 1.4.34 Teorema del Seno

En un triángulo cualquiera  $ABC$ , se tiene que:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Por lo obtenido anteriormente estos teoremas son equivalentes, luego basta demostrar sólo uno de ellos. Demostraremos el teorema del coseno.

Sea  $ABC$  un triángulo cualquiera y ubiquémoslo en un sistema de coordenadas de forma que el ángulo  $\alpha$  esté en el vértice  $O$  y el lado  $c$  en el eje de las abscisas, como lo indica la figura.



$$A = (0, 0) \quad ; \quad B = (c, 0) \quad ; \quad c = (b \cos \alpha, b \operatorname{sen} \alpha)$$

Figura 1.4.27: Teorema del seno

Por tanto:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= d^2(B, C) = (c - b \cos \alpha)^2 + (0 - b \operatorname{sen} \alpha)^2 \\
 &= c^2 + b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \\
 &= b^2(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cos \alpha \\
 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Las otras identidades se demuestran en forma similar ubicando el sistema de coordenadas en los vértices y lados indicados.

**Observación:** Sabemos de los teoremas de congruencias de triángulos en geometría plana que un triángulo queda completamente determinado si se conoce una de las siguientes alternativas:

1. Un lado y dos ángulos.
2. Dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Con el teorema del seno podemos entonces resolver cualquier triángulo si se conoce (1) o (2).

3. Dos lados y el ángulo comprendido entre ambos.
4. Los tres lados.

En estos casos con el teorema del coseno resolvemos el triángulo.

### Ecuaciones trigonométricas

Son ecuaciones donde las variables o incógnitas sólo aparecen en los argumentos de las funciones trigonométricas. Por ejemplo:

$$4 \operatorname{sen}^2 x = \tan x$$

o el sistema:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= a \\
 \cos 2y - \cos 2x &= b
 \end{aligned}$$

La ecuación  $\tan x - x = 0$  no es una ecuación trigonométrica, sin embargo el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= a \\ \tan x \tan y &= b\end{aligned}$$

puede reducirse a una ecuación trigonométrica. Observemos que no todas las ecuaciones trigonométricas tienen solución; por ejemplo:

$$3 \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 5$$

no tiene solución, pues los máximos valores que pueden tomar  $3 \operatorname{sen}^2 x$  y  $\cos 2x$  son 3 y 1 respectivamente, y por lo tanto su suma será siempre inferior a 5 para cualquier valor  $x \in \mathbb{R}$ .

Observemos también que, debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas, si una ecuación tiene una solución  $x_0$ , entonces tiene infinitas soluciones  $x_0 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Basta entonces encontrar las soluciones de una ecuación trigonométrica en el intervalo  $[0, 2\pi)$ , o bien, en algunos casos en  $(-\pi, \pi]$ . Estas soluciones se llaman *soluciones básicas*.

Como podemos ver no hay teoría sobre ecuaciones trigonométricas, sólo algunos métodos y estos consisten en reducirlas a una ecuación algebraica tomando una función trigonométrica como incógnita auxiliar; algunos ejemplos:

1. Resolver  $3 \tan^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$

Sea  $u = \cos x$ , entonces como  $\tan^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$ , tenemos

$$\frac{3(1 - u^2)}{u^2} + 5 = \frac{7}{u}$$

es decir,  $\frac{2u^2 - 7u + 3}{u^2} = 0$ . Como  $u = 0$  (es decir,  $\cos x = 0$ ) no es solución de la ecuación, tenemos que  $2u^2 - 7u + 3 = 0$ , que tiene como soluciones a  $u = 3$  y  $\frac{1}{2}$ . La primera no es solución por ser mayor que 1; por lo tanto  $u = \cos x = \frac{1}{2}$  es la ecuación que debemos resolver y cuyas soluciones básicas son  $x = \pm \frac{\pi}{3}$ . Entonces las soluciones de la ecuación son:

$$S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Si hacemos el reemplazo  $v = \tan x$ , la ecuación se convierte en:

$$3v^2 + 5 = \pm 7\sqrt{1+v^2}$$

pero esta ecuación no es equivalente a la propuesta, porque con las soluciones de esta, admite todavía las soluciones de la ecuación

$$3 \tan^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$$

Las soluciones de  $3 \tan^2 x + 5 = \pm 7\sqrt{1 + \tan^2 x}$  son  $S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$  que es un conjunto mayor que el buscado.

En general, no es recomendable usar sustituciones que conduzcan a raíces, pues se debe considerar el doble signo que aporta más soluciones que las buscadas en el problema original.

2. Resolver y discutir la ecuación:  $a \sin x + b \cos x = c$

Dividiendo por  $a$ , se tiene  $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$ ,  $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ , por lo tanto, existe  $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  tal que  $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b}{a}$ . Reemplazando en la ecuación original y multiplicando por  $\cos \varphi$  se tiene:

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{a} \cos \varphi$$

es decir,  $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi$

Sea  $\phi$  tal que  $\sin \phi = \frac{c}{a} \cos \varphi$ , entonces  $x + \varphi = 2k\pi + \phi$ , o bien,  $x + \varphi = (2k+1)\pi - \phi$  donde  $x = 2k\pi + \phi - \varphi$ , o bien,  $x = (2k+1)\pi - \phi - \varphi$ .

Este resultado es formal, tenemos que encontrar las condiciones para que estos valores existan:

Primero debemos tener  $-1 \leq \frac{c}{a} \cos \varphi \leq 1$  para que exista el valor  $\phi$ .

Es decir,  $\frac{c^2 \cos^2 \varphi}{a^2} \leq 1$

El valor de  $\cos^2 \varphi$  en función de los datos se deduce de la ecuación principal:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

Entonces, la condición de posibilidad se reduce a :

$$c^2 \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2} \leq 1 \iff c^2 \leq a^2 + b^2.$$

### La función sinusoidal

Las funciones de la forma

$$f(x) = a \operatorname{sen}(\omega x) + b \operatorname{cos}(\omega x)$$

se llaman **funciones sinusoidales** y aparecen en modelos matemáticos de problemas oscilatorios. En electromagnetismo, sonido, las ondas están representadas por funciones de tipo sinusoidal.

Escribamos  $f(x)$  como:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{cos} \omega x \right)$$

como  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ , entonces el punto  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$  pertenece a la circunferencia unitaria y por tanto, existe un único  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  tal que :

$$\operatorname{cos} \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

,

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

Pongamos  $A := \sqrt{a^2 + b^2}$ , entonces  $f(x)$  se puede escribir como:

$$\begin{aligned} f(x) &= A(\operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \omega x + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \omega x) \\ &= A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi) \end{aligned}$$

1. La función  $f(x)$  es periódica y su período  $T$  es:

$$\begin{aligned} A \operatorname{sen}(\omega(x + T) + \varphi) &= A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi) \\ &= A \operatorname{sen}(\omega x + 2\pi + \varphi) \end{aligned}$$

Por tanto,  $\omega x + \omega T = \omega x + 2\pi$ , es decir, el período  $T$  de la senoide es

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} \text{ (tomando } |\omega| \text{ para obtener } T > 0).$$

2. Como  $f(x) = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi) = A \operatorname{sen}(\omega(x - (\frac{-\varphi}{\omega})))$  se tiene que  $\frac{-\varphi}{\omega}$  es el monto en el cual la senoide está **desfasada**. Entonces el ciclo se inicia en el punto  $(\frac{-\varphi}{\omega}, 0)$ . Los ingenieros eléctricos llaman al desfase  $\frac{-\varphi}{\omega}$  como **ángulo de fase** de la senoide.
3. El número  $A$  se llama la **amplitud** de la senoide.
4. El número  $|\omega| = \frac{2\pi}{T}$  se llama la **frecuencia** de la senoide.

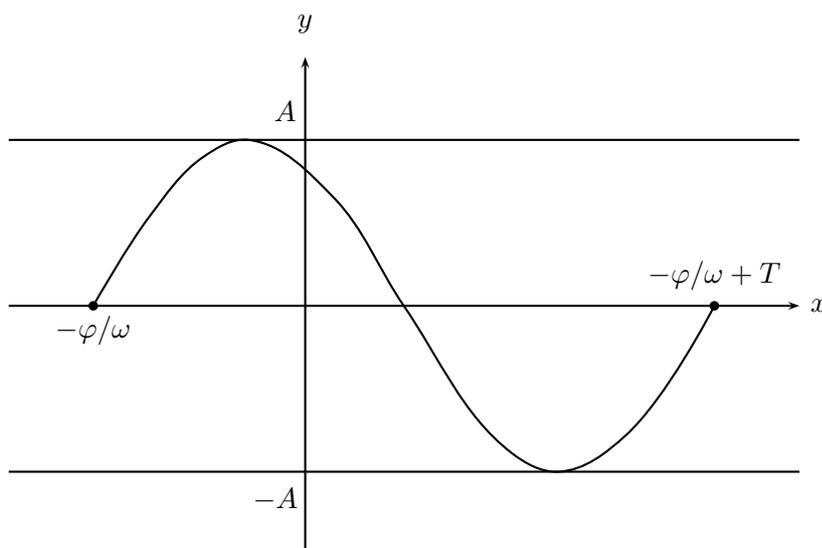


Figura 1.4.28: Función sinusoidal  $f(x) = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$

Algunas veces la función sinusoidal no aparece en la forma explícita  $f(x) = a \operatorname{sen}(\omega x) + b \operatorname{cos}(\omega x)$ ; pero bajo identidades trigonométricas podemos llevarla a esta forma. Veamos un ejemplo:

$$f(x) = 3 \operatorname{sen} x \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{2} \operatorname{cos} 3x.$$

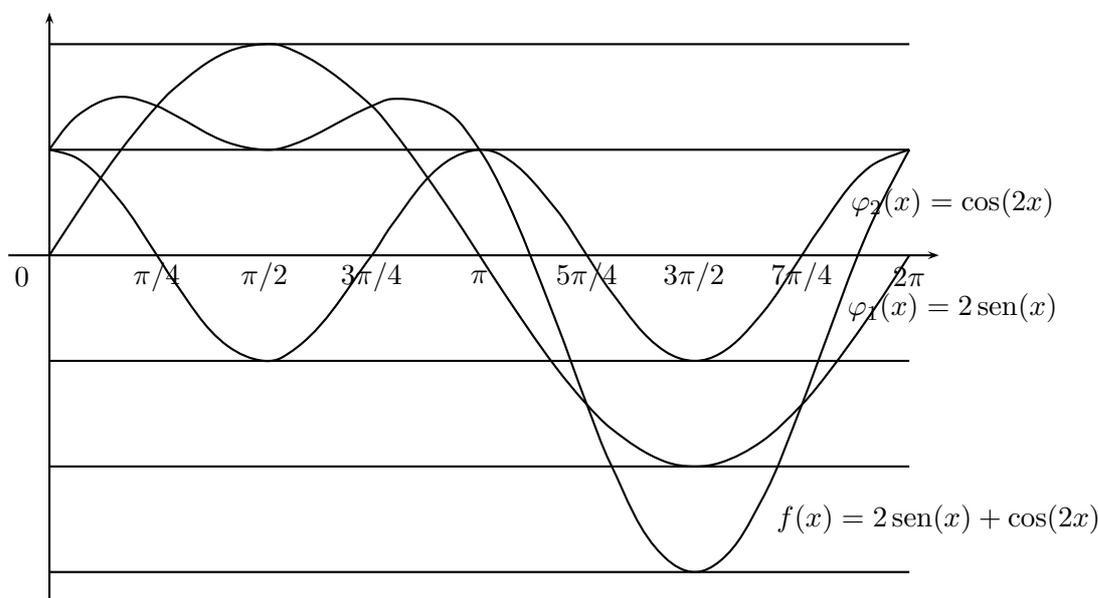
Entonces

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \operatorname{sen} x \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{2} \cos 3x \\
 &= \operatorname{sen} x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos 3x \\
 &= \operatorname{sen} x \cos 2x + 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos 3x \\
 &= \operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} \cos 3x \\
 &= \operatorname{sen}(x + 2x) + \frac{1}{2} \cos 3x \\
 &= \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{2} \cos 3x.
 \end{aligned}$$

que es de la forma sinusoidal.

Obviamente no toda función del tipo trigonométrico es sinusoidal, por ejemplo  $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2x$  es la función  $\operatorname{sen} 2x$  con amplitud periódica igual a  $\operatorname{sen}^2 x$ . Realice con ayuda de su calculadora un gráfico de esta función.

- Ejemplo 1.4.35**
1. La función  $\varphi_1(x) = 2 \operatorname{sen}(x)$  es la senoide seno con amplitud 2.
  2. La función  $\varphi_2(x) = \cos(2x)$  es la senoide coseno de período  $\pi$ .
  3. La función  $f(x) = 2 \operatorname{sen}(x) + \cos(2x)$  que es la suma de las dos senoideas anteriores no es una función sinusoidal.



**Algunos límites relevantes que involucran las funciones circulares**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0$ . Este límite se obtiene usando la desigualdad :

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|.$$

Esta se obtiene usando la definición de  $\operatorname{sen} x$  y elementos de la geometría euclidiana, intuitivamente basta mirar el dibujo con que se definen las funciones circulares. De una manera más formal:

Dado  $\varepsilon > 0$ , podemos elegir  $\delta = \varepsilon$  y tenemos que si  $|x - 0| = |x| < \delta$  entonces,

$$|\operatorname{sen} x - 0| = |\operatorname{sen} x| \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} \frac{x - a}{2} = 0$ . Es consecuencia del límite anterior y del teorema 1.4.12.
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ . Usando la fórmula trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}.$$

Tenemos

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = \left| 2 \operatorname{sen} \frac{x - a}{2} \cos \frac{x + a}{2} \right| \leq 2 \left| \operatorname{sen} \frac{x - a}{2} \right|.$$

En virtud del teorema 1.4.11, podemos concluir que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a.$$

4.  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ .

Se obtiene de modo similar al de la función  $\operatorname{sen} x$ , usando la fórmula

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \operatorname{sen} \frac{x + x_0}{2},$$

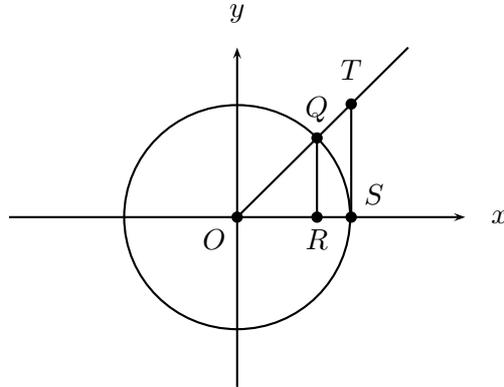
y el límite anterior.

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ .

Supongamos que  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . El triángulo  $ORQ$  de la figura está contenido en el sector circular  $OSQ$  que, a su vez, está contenido en el triángulo  $OST$ . Por tanto,

$$\text{Área } \triangle ORQ \leq \text{Área sector } OSQ \leq \text{Área } \triangle OST. \quad (1)$$

Además,  $\overline{RQ} = \text{sen } x$ ,  $\overline{OR} = \text{cos } x$ ,  $\overline{OS} = 1$ .



Por semejanza de triángulos tenemos:

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}$$

. Despejando  $\overline{ST}$  obtenemos que:

$$\overline{ST} = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \tan x.$$

Entonces, la expresión (1) toma la forma:

$$\frac{\text{sen } x \text{ cos } x}{2} \leq \text{Área sector } OSQ \leq \frac{\text{sen } x}{2 \text{ cos } x}. \quad (2)$$

Usando proporciones podemos calcular el área del sector circular:

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\text{Área del sector}}{\pi}.$$

Así (2) se escribe como:

$$\frac{\text{sen } x \text{ cos } x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\text{sen } x}{2 \text{ cos } x}. \quad (3)$$

Si  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , tenemos que de la primera desigualdad de (3) obtenemos al dividirla por  $\frac{x \text{ cos } x}{2}$ ,

$$\frac{\text{sen } x}{x} \leq \frac{1}{\text{cos } x}, \quad (4)$$

al multiplicar la segunda desigualdad por  $\frac{2 \text{ cos } x}{x}$  obtenemos:

$$\text{cos } x \leq \frac{\text{sen } x}{x}. \quad (5)$$

De (4) y (5) tenemos que:

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

desigualdad que sigue valiendo para  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ , pues  $\cos(-x) = \cos x$  y  $\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ .

Así, para todo  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , tenemos:

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Usando el teorema 1.4.11 y el hecho que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , obtenemos que ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

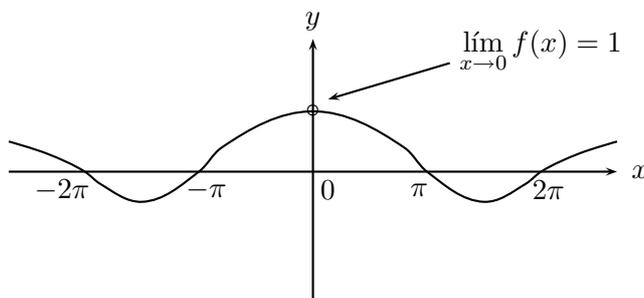


Figura 1.4.29:  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$ . Usando la fórmula trigonométrica:

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \operatorname{sen} \frac{x + x_0}{2},$$

tenemos que ,

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} &= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x - a}{2} \operatorname{sen} \frac{x + a}{2}}{x - a} \\ &= - \operatorname{sen} \frac{x + a}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{x - a}{2}}{\frac{x - a}{2}}. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $x \rightarrow a$  tenemos que  $u = \frac{x - a}{2} \rightarrow 0$  y entonces podemos usar el límite 5 y concluir que el valor de este límite es  $-\operatorname{sen} a$ .

7. La función  $f(x) = \text{sen } \frac{1}{x}$  tiene por dominio a  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Veremos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sen } \frac{1}{x}$  no existe.

Si  $x > 0$ ;  $\text{sen } \frac{1}{x} = 1$  si y sólo si  $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ , es decir, cuando  $x = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ .  
 $\text{sen } \frac{1}{x} = -1$  cuando  $\frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ , es decir, cuando  $x = \frac{2}{(4n+3)\pi}$ .

Así vemos que la sucesión  $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$  es tal que  $x_n > 0$ ,  $x_n \neq 0$ ,  $x_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$ .

Pero también existe la sucesión  $y_n = \frac{2}{(4n+3)\pi}$  que también converge a cero, cuando  $n$  crece, pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -1$ . Esto significa que la función oscila entre 1 y -1 cuando  $x \rightarrow 0^+$ .

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sen } \frac{1}{x}$  no existe.

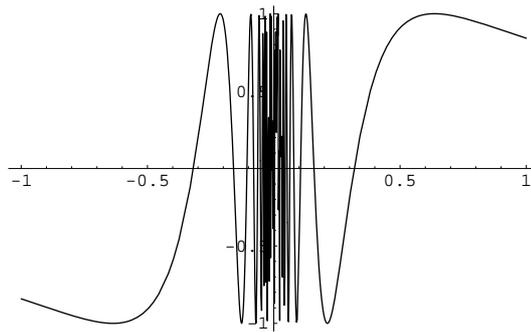


Figura 1.4.30: Gráfico de  $f(x) = \text{sen } \frac{1}{x}$

8.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sen } \frac{1}{x} = 0$ .

9. **Asíntotas de la tangente**

Las rectas  $x = (n+1)\frac{\pi}{2}$ ;  $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$  son asíntotas verticales de la función  $y = \tan x$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\text{sen } x}{\cos x}$  como  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \text{sen } x = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$   $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0^-$ ,  
 entonces  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

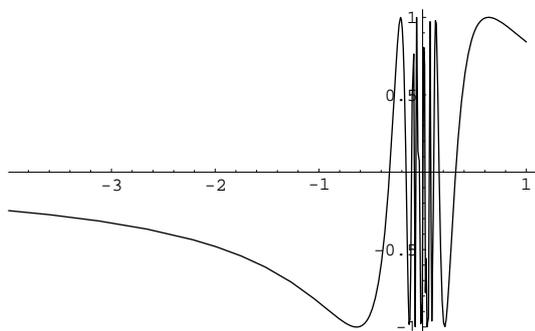
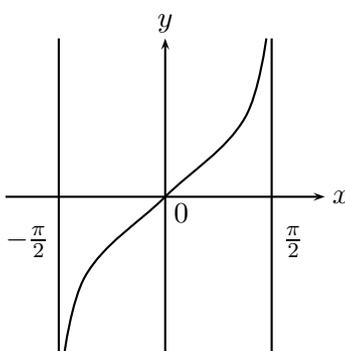


Figura 1.4.31

Figura 1.4.32 :  $y = \tan x$ **Algunas aplicaciones de los límites:**

1. Si cuando  $x$  crece indefinidamente, la diferencia entre las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se hace indefinidamente pequeña, se dice que  $f(x)$  y  $g(x)$  se aproximan asintóticamente. Es decir, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ , entonces escribimos  $f(x) \approx g(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Lo mismo se puede hacer cuando  $x \rightarrow -\infty$ .
2. Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , entonces decimos que  $f(x)$  y  $g(x)$  se comportan aproximadamente iguales para valores muy cercanos al punto  $a$ ; se puede escribir nuevamente  $f(x) \approx g(x)$ . Siempre que  $g(x)$  sea acotada para valores grandes de  $x$ .
3. La siguiente notación es muy usual :  $f(x)$  es  $o(n)$  si  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ . Por ejemplo,  $4x^2 + 6x^3$  es  $o(1)$ , pero  $\sin x$  no es  $o(1)$ .

## 1.4.6. Ejercicios resueltos

1. Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 4).$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3x - 4).$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 3x - 4}.$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5}{x^2 + 3x - 4}.$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3x - 4}.$

f)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}} (3x^2 + \pi).$

g)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}} \operatorname{sen} \sqrt{3x^2 + \pi}$

h)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} x \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}.$

i)  $\lim_{x \rightarrow -1} x \sqrt{\frac{x}{1-x}}.$

**Solución:**

a) El teorema 1.4.6 nos permite escribir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 4) &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 4 \\ &= (\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 4 \\ &= 1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3x - 4) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \\ &= \infty \cdot 1 = \infty. \end{aligned}$$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 3x - 4} = \frac{1}{\infty} = 0.$

d)

$$\frac{x^3 + 5}{x^2 + 3x - 4} = \frac{x^3(1 + \frac{5}{x^3})}{x^2(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \frac{5}{x^3})}{(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{5}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2})} = \infty \cdot 1 = \infty.$$

e) En virtud de a), si  $f(x) = x^2 + 3x - 4$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

Aplicando el teorema 1.4.12 con  $f(x) = x^2 + 3x - 4$  y  $g(x) = \sqrt{x}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ , tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3x - 4} = 0$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{\pi}} (3x^2 + \pi) = 3(\sqrt{\pi})^2 + \pi = 4\pi$ .g) En virtud del teorema 1.4.12 y el límite relevante 3 tenemos:  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{4\pi}} f(x) = \sqrt{4\pi}$ y si  $g(x) = \sin x$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{4\pi}} g(x) = \sin \sqrt{4\pi}.$$

h) Para calcular  $\lim_{x \rightarrow -3^+} x \cdot \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$ , escribiremos:  $x = -3 + \varepsilon$  y así se cumple que:  $x \rightarrow -3^+$  si  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , y por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-3 + \varepsilon)\sqrt{6 - \varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} = -\infty.$$

i) De manera similar a h)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x \sqrt{\frac{x}{1-x}} = +\infty.$$

2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 5x + 3}).$$

**Solución:** Sea  $y = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 5x + 3}$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} y &= \lim_{x \rightarrow \infty} y \cdot \frac{(2x - 1) - \sqrt{4x^2 - 5x + 3}}{(2x - 1) - \sqrt{4x^2 - 5x + 3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 1)^2 - (4x^2 - 5x + 3)}{2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 5x + 3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 5x - 3}{2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 5x + 3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 5x + 3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3/x}{2 - 1/x - \sqrt{4 - 5/x + 3/x^2}} \\
 &= +\infty.
 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 5x + 3}) = +\infty.$$

3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2}.$$

**Solución:** El numerador y el denominador se anulan cuando  $x$  toma el valor 1, por lo que debemos tratar de factorizar ambos trinomios.

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x - 1)(x - 4)}{(x - 1)(x - 2)},$$

si  $x \neq 1$  entonces podemos simplificar teniendo:  $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x - 4}{x - 2}$ , y así,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4}{x - 2} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

4. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}.$$

**Solución:** Tanto el numerador como el denominador se anulan cuando  $x$  toma el valor 0; por lo tanto, debemos transformar algebraicamente la expresión racionalizando el numerador:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x} &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \frac{x+1 - (x^2+x+1)}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})} = \frac{-x^2}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1})} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+x+1}}, \end{aligned}$$

por consiguiente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x} = \frac{0}{2} = 0.$$

5. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x}.$$

**Solución:** Usando la fórmula de factorización  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  podemos transformar algebraicamente la expresión de la misma forma que se hizo en el ejercicio anterior, es decir, racionalizando el numerador:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x} &= \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x} \cdot \frac{1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}} \\ &= \frac{1 - (1-x)}{3x(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} \\ &= \frac{x}{3x(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} \\ &= \frac{1}{3(1 + \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x} = \frac{1}{9}.$$

6. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^2(4x+7)^2}{(3x-4)^2(5x^2+1)^2}.$$

**Solución:** Según lo visto para funciones racionales en el ejemplo 1.4.20, para calcular este límite, basta conocer los coeficientes de los términos en  $x^4$  en el numerador y denominador. Así,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^2(4x + 7)^2}{(3x - 4)^2(5x^2 + 1)^2} = \frac{4 \cdot 16}{9 \cdot 5} = \frac{64}{45}.$$

7. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a}).$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a} &= \sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}} \\ &= \frac{bx + c}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}} \\ &= \frac{x(b + c/x)}{|x|\sqrt{a + b/x + c/x^2} + x\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b + c/x}{\sqrt{a + b/x + c/x^2} + \sqrt{a}} = \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

Y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2\sqrt{a}x = +\infty.$$

8. Analizar el límite de la expresión

$$y = x^{\frac{p}{3}} \left[ (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right]$$

cuando  $x \rightarrow \infty$ , según los valores de  $p$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}
 x^{\frac{p}{3}} \left[ (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right] &= x^{\frac{p}{3}} \left[ (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \frac{\left[ \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x^2 + 1)} + \sqrt[3]{x^4} \right]}{\left[ \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x^2 + 1)} + \sqrt[3]{x^4} \right]} \\
 &= \frac{x^{\frac{p}{3}}(x^2 + 1 - x^2)}{\left[ \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x^2 + 1)} + \sqrt[3]{x^4} \right]} \\
 &= \frac{x^{\frac{p}{3}}}{\left[ \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x^2 + 1)} + \sqrt[3]{x^4} \right]} \cdot \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{x^{-\frac{4}{3}}} \\
 &= \frac{1}{3} x^{\frac{p-4}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 2x^{-2} + x^{-4}} + \sqrt[3]{1 + x^{-2}} + 1}
 \end{aligned}$$

Entonces, tenemos: Si  $p = 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{1}{3}$ .

Si  $p > 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$ .

Si  $p < 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ .

9. Dada

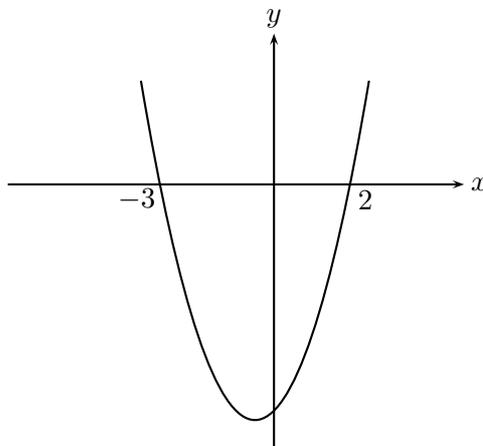
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}.$$

- Resuelva gráficamente la desigualdad  $x^2 + x - 6 \leq 0$ .
- Analice los ceros y el signo de la función  $f$ .
- Calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ .
- Bosqueje el gráfico de  $f$ .
- Bosqueje el gráfico de  $g(x) = x^2 + f(x)$ .

**Solución:**

- La función  $y = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$  representa una parábola que corta el eje  $x$  en los puntos  $x = 2$  y  $x = -3$ ; es abierta hacia arriba y su vértice  $(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4})$ . Su gráfico es el que muestra la figura 1.4.33. De donde podemos deducir que:

$$x^2 + x - 6 \leq 0 \iff x \in [-3, 2].$$

Figura 1.4.33: Gráfico de  $y = x^2 + x - 6$ .

$$b) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x-2)(x+3)}; \quad D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 2\} \text{ y no tiene ceros.}$$

Como  $x^2 + x - 6 > 0$  en  $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$  que:  $f(x) > 0$  sobre  $(-\infty, -3)$  y sobre  $(2, +\infty)$ ;  $f(x) < 0$  sobre  $(-3, 2)$ .

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty;$$

pues para valores de  $x$  menores que  $-3$  la función es positiva.

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty.$$

$$d) \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -0,16; \text{ como en } -\frac{1}{2} \text{ la parábola alcanza su mínimo valor, } f\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ es el mayor valor que toma } f \text{ en } (-3, 2).$$

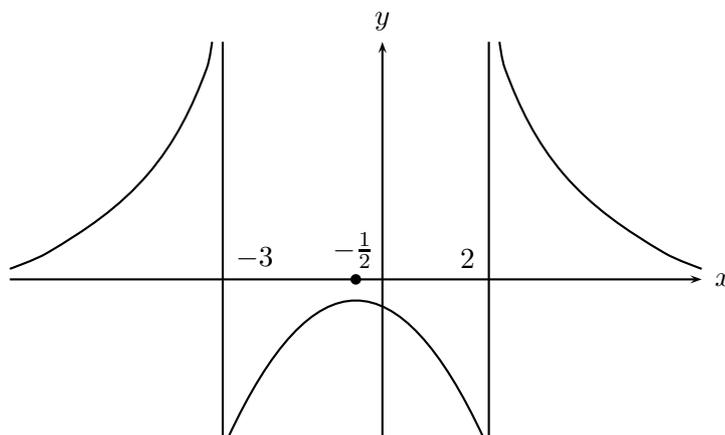


Figura 1.4.34: Gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ .

- e)  $g(x) = x^2 + f(x)$ ;  $D(g) = D(f)$ . Como  $x^2 \geq 0$ , para todo  $x$ , la función  $g(x)$  es positiva en  $(-\infty, -3)$  y en  $(2, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + f(x)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \left(1 + \frac{f(x)}{x^2}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x^2(x-2) + \frac{1}{x-3}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

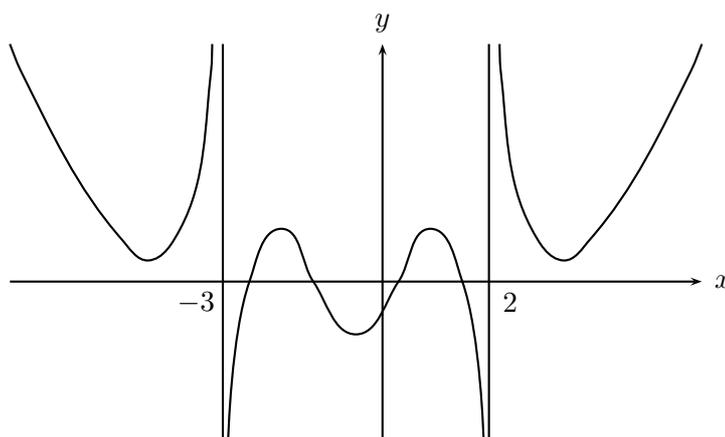


Figura 1.4.35: Gráfico de  $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2 + x - 6}$ .

10. Analice el comportamiento de la función  $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$  y bosqueje su gráfico.

**Solución:** Si  $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x(x-1)(x+1)}$ , el dominio de  $f$  es  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ , por lo que el gráfico de  $f$  consta de 4 ramas.

**Los ceros de  $f(x)$ :**

$$3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

En los puntos  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ , el gráfico corta al eje  $x$ .

**El signo de  $f(x)$ :**

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$$

Veamos el comportamiento de las parábolas:  $3x^2 - 1$ ,  $x^2 - 1$ . Del gráfico de ellas se deduce fácilmente que:

$$x^2 - 1 \leq 0 \iff x \in [-1, 1]$$

$$3x^2 - 1 \leq 0 \iff x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

Por tanto:

- (i) Sobre  $(-\infty, -1)$ :  $x < 0$ ; y  $\frac{3x^2 - 1}{x^2 - 1} \geq 0$ , es decir,  $f$  es negativa.
- (ii) Sobre  $(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ;  $f(x) > 0$ .
- (iii) Sobre  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ ;  $f(x) < 0$ .
- (iv) Sobre  $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ;  $f(x) > 0$ .
- (v) Sobre  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ ;  $f(x) < 0$ .
- (vi) Sobre  $(1, \infty)$ ;  $f(x) > 0$ .

Para poder bosquejar el gráfico, analizaremos algunos límites. Para ello escribiremos

$$f \text{ en la forma, } f(x) = \frac{x^2(3 - \frac{1}{x^2})}{x^3(1 - \frac{x}{x^3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) = -\frac{1}{2} - 1 + (-\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

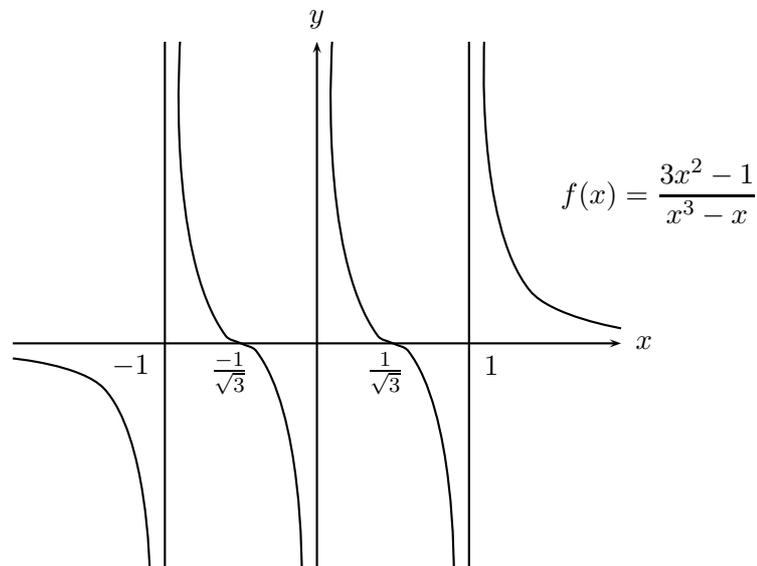


Figura 1.4.36: Gráfico de  $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$ .

11. Analice el comportamiento de la función  $g(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x^2}$  y bosqueje el gráfico.

**Solución:**

- a) Primero determinaremos el dominio  $D(g)$  de la función.

$$x \in D(g) \iff 2x - 3 \geq 0 \iff x \geq \frac{3}{2}.$$

- b)  $g(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$ .
- c)  $g(x) \geq 0$ ; para todo  $x \in D(g)$ .
- d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x(2 - \frac{3}{x})}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{3}{x}}}{\sqrt{x^3}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

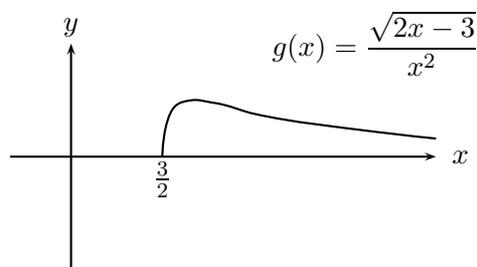


Figura 1.4.37: Gráfico de  $g(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x^2}$ .

12. Esbozar los gráficos de las funciones:

- a)  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ .
- b)  $g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ .
- c)  $h(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ .

**Solución:**

- a)  $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ . Como la función es acotada por 1, es decir,  $|\operatorname{sen} u| \leq 1$ , entonces tenemos que:

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1.$$

Por lo cual su gráfico se encuentra en la franja  $[-1, 1]$  del eje Y.

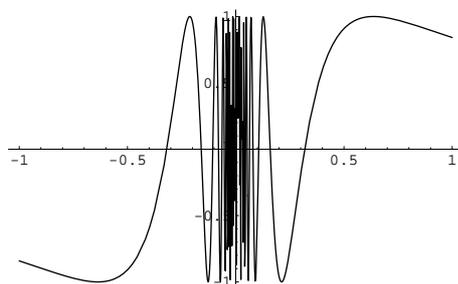


Figura 1.4.38: Gráfico de  $f(x) = \text{sen } \frac{1}{x}$

Como hemos visto en el ejemplo 1.4.15 caso 4,  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } \frac{1}{x}$  no existe, pues la función oscila.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{sen } \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \text{sen } t = 0$ , usando el teorema 1.4.19 y el límite relevante 1.

b)  $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$ .

$$-x \leq g(x) \leq x$$

Lo que nos dice que el gráfico de  $g(x)$  está comprendido entre las rectas  $y = -x$ ,  $y = x$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen } \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x$$

Usando el teorema 1.4.11, vemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen } \frac{1}{x} = 0$ .

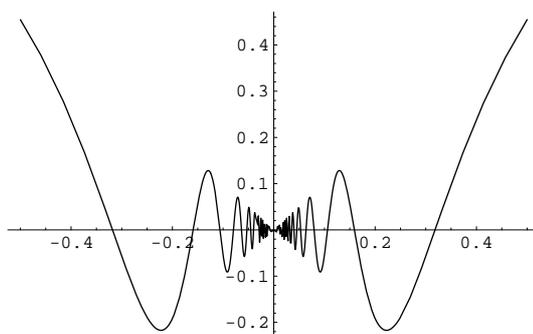


Figura 1.4.39: Gráfico de  $g(x) = x \text{sen } \frac{1}{x}$ .

c) El gráfico de  $h(x)$  está comprendido entre las hipérbolas  $y = \pm \frac{1}{x}$ . Con un

cálculo semejante al de las dos funciones anteriores obtenemos que :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0.$$

En las cercanías de  $x = 0$  la función cruza infinitad de veces el eje  $X$  oscilando entre sus valores extremos que están sobre las hipérbolas. Su gráfico es el que vemos en la figura 1.4.40.

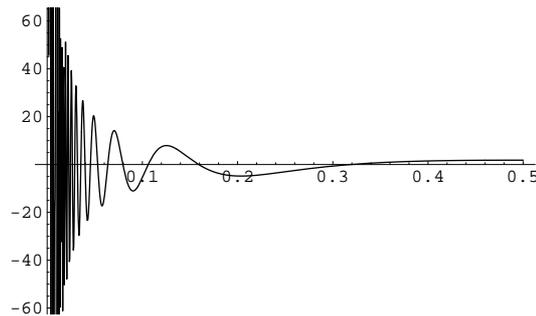


Figura 1.4.40: Gráfico de  $h(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ .

13. a) Demuestre que valores pequeños de  $x$ ,  $x \approx \tan x$ .  
 b) Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} \right) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ , cuando  $x \neq 0$ .

**Solución:**

- a) Es equivalente a demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ .

En efecto:

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

- b) Usando inductivamente la fórmula del ángulo doble, tenemos las siguientes igualdades:

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}; \quad \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4}$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2^2} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2^3} \cdot \cos \frac{x}{2^3}, \dots, \operatorname{sen} \frac{x}{2^{n-1}} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}$$

Remplazando, nos queda:

$$\operatorname{sen} x = 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n}$$

si  $x \neq 0$ ,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n}$$

Como para  $x$  fijo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = 1$ , se tiene lo que queríamos demostrar.

14. a) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 4x}$ .  
 b) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx}$ .

**Solución:**

$$a) \quad \frac{5x}{4x} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \cdot \frac{4x}{\operatorname{sen} 4x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \cdot \frac{4x}{\operatorname{sen} 4x}.$$

Cuando  $x \rightarrow 0$   $4x$  y  $5x \rightarrow 0$ , por tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 4x} \right) = \frac{5}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{4}$ .

b) Con los mismos pasos se llega a que este límite es  $\frac{m}{n}$ .

15. Calcular:  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x + \cos x}$ .

**Solución:** Reemplazando  $\cos x$  por  $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$  y  $\operatorname{sen} x$  por  $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ , la expresión se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2} + 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1 + 4 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} + 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) + \left( 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right)}{2 \left( 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right) + 4 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \left( 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right)} \\ &= \frac{\left( 1 - \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) \left( 1 + 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)}{2 \left( 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right) \left( 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right)} \\ &= \frac{\left( 1 + 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)}{2 \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) \left( 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Cuando  $x = \pi$  la última expresión vale  $\frac{1}{4}$ .

16. Resuelva la ecuación  $\tan x \tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} - \tan x = 0$ , tomando como incógnita  $\tan \frac{x}{2}$ , y encuentre los límites de las raíces de esta ecuación cuando  $\tan x \rightarrow \infty$  y  $\tan x \rightarrow 0$ .

**Solución:** Tenemos :

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 x}}{\tan x} = -\frac{1}{\tan x} \pm \sqrt{\frac{1}{\tan^2 x} + 1}.$$

Si  $\tan x \rightarrow \infty$ , entonces  $\tan \frac{x}{2} \rightarrow \pm 1$ .

Si  $\tan x \rightarrow 0$ , separando las raíces tenemos que:

$$\begin{aligned} \tan \frac{x}{2} &= \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2 x}}{\tan x} \\ &= \frac{\tan^2 x}{\tan x(\sqrt{1 + \tan^2 x} + 1)} \\ &= \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x} + 1}. \end{aligned}$$

Por tanto, si  $\tan x \rightarrow 0$ , entonces  $\tan \frac{x}{2} \rightarrow 0$ .

Para la otra raíz tenemos:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + \tan^2 x}}{\tan x}.$$

Si  $\tan x \rightarrow 0$ , entonces  $\tan \frac{x}{2} \rightarrow \infty$ .

17. Dada la función:

$$y(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}.$$

- Encuentre el dominio y el recorrido.
- Analice el signo de  $f$ .
- Analice la existencia de asíntotas.
- ¿Existe  $x \in D(y)$  tal que  $y(x) = -1, y(x) = \frac{3}{5}$ ?

**Solución:**

$$a) \quad D(y) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - x - 1 \neq 0\}.$$

Como  $x^2 - x - 1 = 0$  es equivalente a  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , tenemos que

$$D(y) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Para calcular el recorrido debemos despejar  $x$  en la expresión que define la función:  $y(x^2 - x - 1) = x^2 + x + 1$ , implica  $x^2(y - 1) - x(y + 1) - (y + 1) = 0$ , lo que nos da:

$$x = \frac{y + 1 \pm \sqrt{5y^2 + 2y - 3}}{2(y - 1)}.$$

Para que  $x$  sea un número real debemos imponer la condición

$$5y^2 + 2y - 3 \geq 0,$$

desigualdad que se resuelve según lo estudiado en la sección 1.3 y nos da:

$$y \geq \frac{3}{5} \text{ ó } y \leq -1.$$

Así,  $R(y) = (-\infty, -1] \cup [\frac{3}{5}, \infty)$ .

b) Como el polinomio  $x^2 + x + 1$  es siempre positivo, el signo de la función  $y$  corresponde al signo del denominador:  $x^2 - x - 1 = 0$  que tiene por soluciones  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , por lo tanto  $y \geq 0$  cuando  $x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  y cuando  $x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . En  $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$  la función es negativa..

c) Las asíntotas verticales se obtienen igualando a cero el denominador una vez eliminados los posibles factores comunes. Por lo cual tenemos las rectas

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ y } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Para obtener las asíntotas horizontales debemos calcular  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x)$ .

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1} = \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}.$$

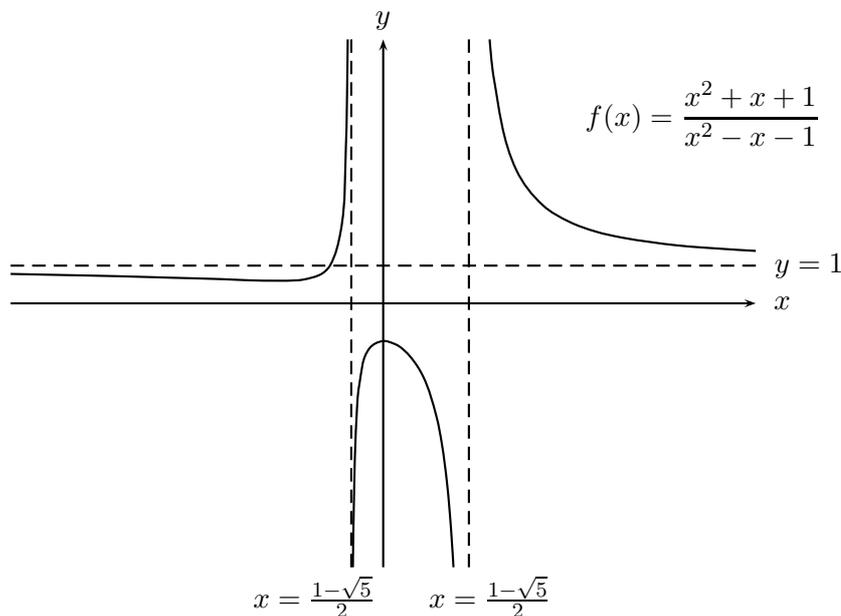
Esto nos dice que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 1$ .

Es decir, la recta  $y = 1$  es una asíntota horizontal.

d) del primer ítem sabemos que

$$x = \frac{y + 1 \pm \sqrt{5y^2 + 2y - 3}}{2(y - 1)}.$$

Haciendo  $y = -1$  nos da  $x = 0$  y si  $y$  toma el valor  $\frac{3}{5}$  tenemos que  $x = -2$ .



Observe que la curva corta a su asíntota  $y = 1$ .

#### 18. Asíntotas oblicuas de un gráfico de una función racional

Dada la función racional

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{2x + 1},$$

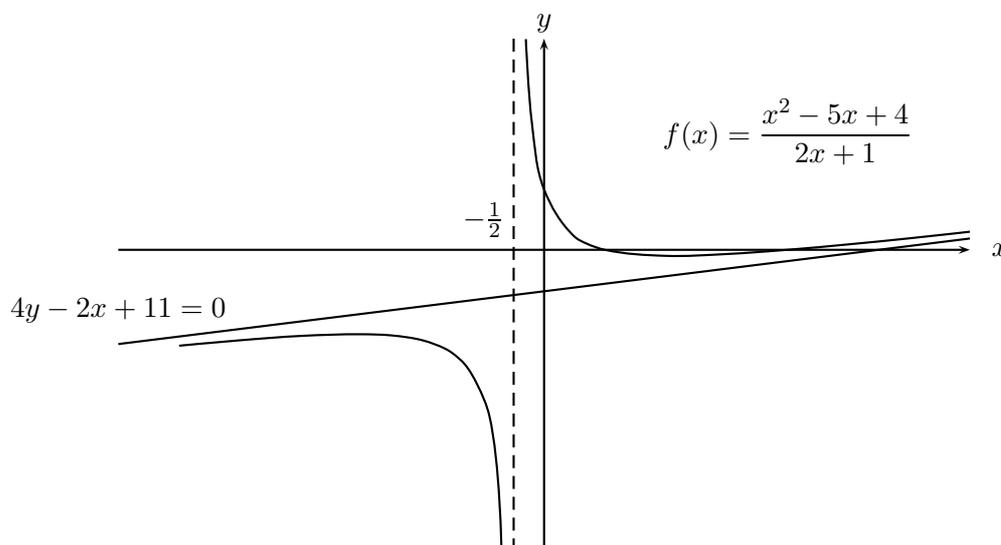
- Encuentre sus asíntotas verticales.
- Encuentre sus asíntotas horizontales.
- Efectuando la división de polinomios entre el numerador y el denominador, demuestre que la recta  $L = 4y - 2x + 11 = 0$ , es una asíntota oblicua, es decir, cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , la diferencia  $|f(x) - L|$  tiende a cero.

**Solución:**

- a)  $2x + 1 = 0$  implica que la recta  $x = -\frac{1}{2}$  es una asíntota vertical.
- b) Según lo visto en el ejemplo 1.4.20,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ , pues el grado del polinomio numerador es mayor que el grado del denominador. Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales.
- c)

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{2x + 1} = \frac{x}{2} - \frac{11}{4} + \frac{27}{4(2x + 1)},$$

implica que  $f(x) - L = \frac{27}{4(2x+1)}$ , así,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - L| = 0$ . Por lo tanto la recta  $L = 4y - 2x + 11 = 0$ , es una asíntota oblicua.



19.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen} x$  no existe.

Si  $x > 0$

$$\operatorname{sen} x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi ; n \in \mathbb{N}$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \iff x = 2n\pi ; n \in \mathbb{N}.$$

Para  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ , cualquiera sea  $M > 0$ . Por la propiedad arquimediana existe  $n$  tal que  $2n\pi > M$  y  $\frac{\pi}{2} + 2n\pi > M$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = L$  existiera, entonces llamando  $f(x) = \sin x$  tenemos:

$$|L - f(2n\pi)| < \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad |L - f(2n\pi + \frac{\pi}{2})| < \frac{1}{3}.$$

Lo que implica :

$$|f(2n\pi) - f(2n\pi + \frac{\pi}{2})| = 1 < |L - f(2n\pi)| + |L - f(2n\pi + \frac{\pi}{2})| < \frac{2}{3}.$$

Contradicción que proviene de suponer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  existe.

### 1.4.7. Ejercicios propuestos

Calcule los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} = 1.$
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x^{p+1} - x^p - x + 1} = \frac{n(n+1)}{2p}.$
3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} = \frac{9}{8}.$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^4+1}} = \sqrt{2}.$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3(4x-5)(x+2)}{x^3(9x+2)(3x-1)}.$
6.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+2}}{x + \sqrt{x^2+1}}.$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x.$
8.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-1}.$
9. Demuestre el teorema 1.4.6 parte (iii).
10. Demuestre el teorema 1.4.11.
11. Demuestre el teorema 1.4.16
12. Demuestre el teorema 1.4.19 parte (ii).

13. Bosquejar el gráfico de  $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x}$ .
14. a) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ .
- b) Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ .
- c) Calcular  $\sqrt{|x|} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ .
- d) Demuestre que si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $|g(x)| < M$  en un intervalo  $(a - r, a + r)$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ .
15. Calcular  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$ .
16. Calcular  $\lim_{x \rightarrow a} \sec x$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \tan x$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{cosec} x$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{cotan} x$ .
17. a) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ .
- b) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}$ .
18. Demuestre, usando la definición, que  $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$ .
19. Sea  $f(x) = a \operatorname{sen} \omega x + b \operatorname{sen} \omega x$  una senoide y  $h(x)$  una función positiva definida en  $\mathbb{R}$ . Bosqueje el gráfico de  $h(x)f(x)$ .  
Indicación: ver ejercicio resuelto 12.
20. Encuentre las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función racional:

$$f(x) = \frac{(x - 3)^2(2x + 3)}{3(x^2 - 1)}.$$

Grafique las asíntotas y deduzca como se ubica el gráfico de  $f$  con respecto a estas asíntotas.

21. Sea

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x + 6)}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}.$$

- a) Escriba el dominio de  $f$  como unión de intervalos.
- b) Analice el comportamiento de  $f$  cuando  $x$  tiende a los extremos de los intervalos que componen el dominio.

- c)* Demuestre que  $f(x) - x - 6 \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow +\infty$  y que  $f(x) + x + 6 \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

Indicación: use el ejercicio resuelto 18

- d)* Deducir que la curva  $f(x)$  tiene dos asíntotas oblicuas y ubicar la curva con respecto a estas asíntotas.

## 1.5. Funciones continuas

### 1.5.1. Definiciones básicas

**Definición 1.5.1** Diremos que una función  $f$  es continua en un punto  $a \in D(f)$  si, dado cualquier  $\epsilon > 0$  existe un número  $\delta > 0$  tal que la desigualdad  $|x - a| < \delta$  implica  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ .

Según lo visto en la sección 1.4, esta definición puede expresarse diciendo que:  $f(x)$  es continua en  $a$  si y sólo si :

- Si  $a$  es un punto aislado del dominio de la función  $f$  ,  
o bien,
- Si  $a$  es un punto de acumulación del dominio, entonces se debe cumplir que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Usando los ejemplos y ejercicios de la sección 1.4, tenemos que las funciones constante, lineal no constante, cuadrática y polinomiales son continuas en cada punto de su dominio.

Si la definición 1.5.1 no se cumple, diremos que la función es discontinua en  $x = a$ . Es decir, una función puede ser discontinua en un punto no aislado del dominio si no existe el límite en el punto , o bien, aun existiendo el límite en el punto este es diferente del valor de la función en dicho punto.

**Ejemplo 1.5.2** 1. La función  $f(x) = \frac{1}{x}$ , si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$  es discontinua en  $x = 0$ , pues  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ .

2. La función  $g(x) = [x]$  es discontinua en  $a = 1$ , porque a pesar que  $g(a) = g(1) = 1$ , el  $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$  no existe, como hemos visto en la sección 1.4. Por la misma razón, esta función es discontinua en cada  $x = n$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ .

3. La función

$$h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es discontinua en el punto  $x = 0$ , porque no se cumple la condición  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , al ser  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$  distinto de  $h(0)$ .

4. La función

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es discontinua en cada punto de su dominio.

**Definición 1.5.3** Diremos que una función  $f$  es:

- Continua a la derecha en un punto  $a \in D(f)$  si, dado cualquier  $\epsilon > 0$  existe un número  $\delta > 0$  tal que la desigualdad  $0 < x - a < \delta$  implica  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ . Esto significa que:

$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad (1.13)$$

- Continua a la izquierda en un punto  $a \in D(f)$  si, dado cualquier  $\epsilon > 0$  existe un número  $\delta > 0$  tal que la desigualdad  $0 < a - x < \delta$  implica  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ . Esto significa que:

$$f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad (1.14)$$

**Ejemplo 1.5.4** 1. Es inmediato que una función continua a la derecha y a la izquierda de un punto  $a$ , es continua.

2. La función  $[x]$  es continua a la derecha en cada valor entero de  $x$ , pero es discontinua a la izquierda de tales puntos.
3. La función 4 del ejemplo 1.5.2 es discontinua a la derecha y a la izquierda en cada punto del dominio.

La idea subyacente de la continuidad es que a pequeñas variaciones de la variable independiente le corresponden pequeñas variaciones de la variable dependiente. Más rigurosamente, dado  $x$ , la variación de ella suele representarse como  $\Delta x$  y la correspondiente variación de  $y$  como  $\Delta y$ , entonces si  $y = f(x)$ ,  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Con estas notaciones la continuidad puede ser expresada como:

$$f \text{ es continua en } x \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x). \quad (1.15)$$

o equivalentemente:

$$\Delta y \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta x \rightarrow 0.$$

Otra notación usada para expresar la misma idea es representar la variación  $\Delta x$  como  $h$ , para hacerla independiente de  $x$ . En este caso, la continuidad queda expresada como:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = f(x) , \quad (1.16)$$

es decir,

$$\text{Dado } \epsilon > 0 , \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que, si } |h| < \delta \text{ entonces } |f(x + h) - f(x)| < \epsilon .$$

Si recordamos que tanto  $x$  como  $y$  son abstracciones de magnitudes físicas, entonces ellas representan su valor exacto (ideal) y  $f(x + h)$  o  $f(x + \Delta x)$  los valores aproximados que

entregan los aparatos de medición con los distintos errores que ellos introducen. En el caso de tener continuidad, podemos trabajar tranquilamente con estos pequeños errores en  $x$ , pues sólo implican pequeños errores, despreciables en la práctica, en la magnitud  $y$ .

**Definición 1.5.5** Diremos que la función  $f$  es:

- (i) continua, si ella es continua en cada punto de su dominio.
- (ii) continua a tramos, si ella es continua excepto en una cantidad finita o en una sucesión de puntos del dominio donde ella es discontinua.

**Ejemplo 1.5.6** 1. Las funciones lineal, cuadrática, polinomial son continuas.

- 2. En virtud del límite relevante 3 de la sección 1.4 tenemos que las funciones  $\sin x$  y  $\cos x$  son continuas en todo  $\mathbb{R}$ .
- 3. La función  $x - [x]$  es continua a tramos, pues es discontinua en cada valor entero de  $x$ .
- 4. La función  $\tan x$  es continua en su dominio que es el conjunto  $\mathbb{R}$  menos los múltiplos impares de  $\frac{\pi}{2}$ .

**Interpretación geométrica.** La continuidad de una función  $f$  en un punto  $a$  nos dice que si estamos a una distancia menor que  $\epsilon$  de  $f(a)$ , existe una distancia  $\delta$  tal que todos los puntos  $x$  que están a una distancia menor que  $\delta$  del punto  $a$ , tienen sus imágenes en la franja  $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ . Por tanto, el gráfico de la función queda dentro del rectángulo  $(a - \delta, a + \delta) \times (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ .

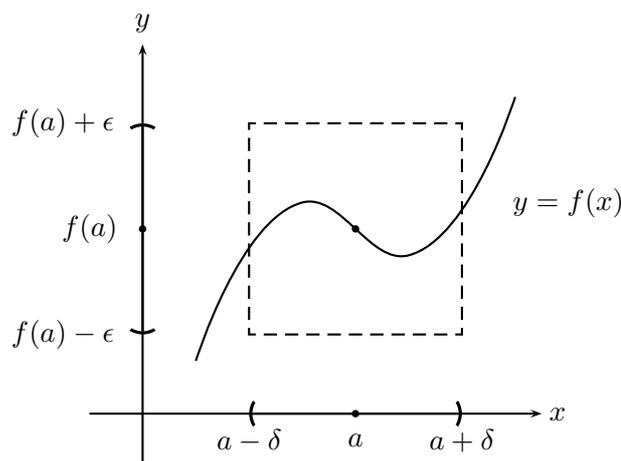


Figura 1.5.1: Interpretación geométrica de la continuidad.

**Observación 1.5.7** Observemos que si  $a$  es un punto aislado de  $D(f) \subset \mathbb{R}$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ . Esto implica que toda sucesión es continua pensada como función de  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  con valores en  $\mathbb{R}$ , pues los números naturales son aislados en  $\mathbb{R}$ . Este hecho nos muestra que no tiene sentido la continuidad para funciones de variable discreta, por esta razón es que nos centraremos en las variables continuas, como ya lo habíamos anunciado.

**Continuidad y sucesiones.** Se puede dar una equivalencia de la definición 1.5.1 a través de sucesiones como lo muestra el siguiente teorema y que a veces es más fácil de utilizar.

**Teorema 1.5.8** Para que una función  $f$  sea continua en un punto  $a$  es necesario y suficiente que para toda sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  se tenga que  $f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ .

**Demostración:**

(i) Supongamos que  $f$  es continua en un punto  $a$ . Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ . Para tal  $\delta$ , existe  $N$  de modo que si  $n \geq N$  se tiene que  $|x_n - a| < \delta$ . Usando la definición de continuidad 1.5.1, se puede concluir que,  $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ . Lo cual nos dice que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ .

(ii) Recíprocamente, supongamos que  $f$  tiene la siguiente propiedad: Dada cualquier sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente hacia  $a$ ,  $f(x_n)$  converge hacia  $f(a)$ .

Usando el teorema 1.4.9, se tiene que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  y, por tanto,  $f$  es continua en  $a$ . ■

### 1.5.2. Continuidad de funciones elementales

Del teorema 1.4.6 se obtiene en forma inmediata el siguiente teorema:

**Teorema 1.5.9** Si las funciones  $f$  y  $g$  son continuas en un punto  $a$ , entonces la suma, la diferencia, el producto y el cociente (cuando  $g(a) \neq 0$ ) de estas funciones son continuas en el punto  $a$ .

**Ejemplo 1.5.10** 1. Todo polinomio es continuo, pues la función constante y la función idéntica son continuas.

2. Toda función racional es continua en todo punto del dominio, es decir, sobre todo  $\mathbb{R}$  menos aquellos puntos que anulan el denominador.

3. Como las funciones  $\sin x$  y  $\cos x$  son continuas, las restantes funciones trigonométricas  $\tan x$ ,  $\cotan x$ ,  $\sec x$ ,  $\operatorname{cosec} x$  son continuas en todo punto  $a$  de  $\mathbb{R}$  que no anulan el denominador.

**Teorema 1.5.11** Si dos funciones  $y = f(x)$ ,  $z = g(y)$  son tales que  $f$  es continua en un punto  $a$  y  $g$  es continua en el punto  $f(a)$ , entonces la función compuesta  $g(f(x))$  es continua en el punto  $a$ .

**Demostración:** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Como  $f$  es continua,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ . Sea  $b = f(a)$  e  $y_n = f(x_n)$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  y usando la continuidad de  $g$  en el punto  $b$ , tenemos que,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(b)$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$ . Lo cual significa la continuidad de la función compuesta  $g(f(x))$  en el punto  $a$ . ■

**Ejemplo 1.5.12** La función  $\sin(x^5 - 4x^2 + 1)$  es continua por ser compuesta de dos funciones continuas sobre todo  $\mathbb{R}$ .

### 1.5.3. Discontinuidades removibles

Observando los diferentes ejemplos de existencia y cálculo de límites podemos constatar que existen dos tipos de discontinuidades: unas que se deben a la no existencia del límite en el punto y otras que, en cambio, tienen límite. Cuando en un punto el límite existe y no coincide con el valor en el punto, se puede redefinir la función en dicho punto dándole como valor el límite. La nueva función es ahora continua en el punto en cuestión. A este último tipo se le llama **discontinuidades removibles**.



Figura 1.5.2: Casos de discontinuidades removibles.

**Ejemplo 1.5.13** 1.  $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 1$  se puede redefinirse de modo que resulte continua en  $x = 0$ . Para ello basta definir  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

2.  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$  puede extenderse de manera que sea continua en  $x = 0$  definiendo  $f(0) = 1$ .

3.  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  no está definida en  $x = 2$ , pero puede definirse  $f(2) = 4$  de modo que la nueva función resulte ser continua en  $x = 2$ .
4. No son removibles las discontinuidades en  $x = 0$  de las funciones  $\frac{1}{x}$  y  $\text{sen } \frac{1}{x}$  (tomando en ambos caso la función en  $x = 0$  como 0), por no existir el límite en el punto considerado.

#### 1.5.4. Propiedades de las funciones continuas

##### Teorema 1.5.14 Teorema de Bolzano - Weierstrass

Si  $f(x)$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  y si  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos contrarios, entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = 0$ .

**Demostración:** Supongamos  $f(a) > 0, f(b) < 0$ . Si  $x_0 \in (a, b)$ , entonces  $f(x_0) = 0$  ó  $f(x_0) < 0$  ó  $f(x_0) > 0$ . Si  $f(x_0) = 0$ , el teorema está demostrado. Si  $f(x_0) > 0$ , entonces nos restringimos al intervalo  $[a_1, b_1]$  con  $a_1 = x_0$  y  $b_1 = b$ . Si  $f(x_0) < 0$ , entonces consideramos el intervalo  $[a_1, b_1]$  con  $a_1 = a$  y  $b_1 = x_0$ , y tenemos igualmente que  $f(a_1) > 0, f(b_1) < 0$ . Repitiendo el mismo procedimiento obtenemos una sucesión de intervalos encajonados  $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \dots \subset [a, b]$  de modo que  $f(a_n) > 0, f(b_n) < 0$ . El método se puede precisar más aún, tomando cada vez el punto medio y así cada intervalo es la mitad del anterior. Por tanto,  $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$  y  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Sea  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , demostraremos que  $f(c) = 0$ . Por ser  $f$  continua  $f(c) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$  y como  $f(a_n) > 0$  tenemos, usando las propiedades del límite que,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq 0$ . Análogamente obtenemos que  $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \leq 0$ . Del hecho que  $f(c) \leq 0$  y  $f(c) \geq 0$  concluimos que  $f(c) = 0$ . ■

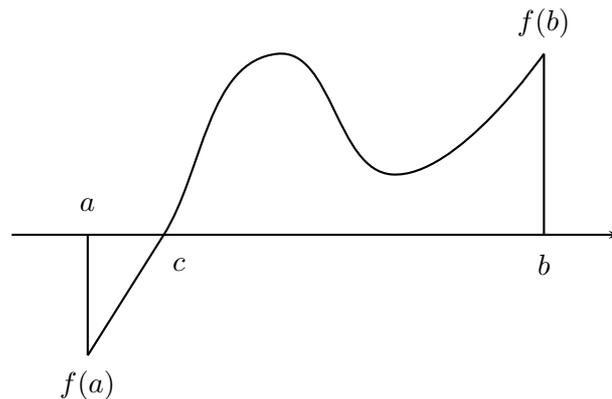


Figura 1.5.3: Teorema de Bolzano - Weierstrass

- Observación 1.5.15** 1. El teorema 1.5.14 es falso cuando  $f$  no es continua, como se puede ver a través de la función  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f(0) = 1$  definida en el intervalo  $[-1, 1]$ . Aunque  $f(-1) < 0$  y  $f(1) > 0$  no existe ningún punto  $c \in [-1, 1]$  tal que  $f(c) = 0$ , lo cual se debe a que la función no es continua en dicho intervalo.
2. Una interesante aplicación del teorema 1.5.14 es la aproximación de raíces no racionales de polinomios que mostraremos en los ejercicios resueltos.

**Teorema 1.5.16 Teorema del valor intermedio o de Darboux**

Una función continua en el intervalo  $[a, b]$  toma todos los valores entre dos valores diferentes. Es decir, si  $f(a) \neq f(b)$ , entonces dado  $y$  entre  $f(a)$  y  $f(b)$  existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = y$ .

**Demostración:** Sea  $g(x) = f(x) - y$ . Supongamos que  $f(a) < f(b)$ , entonces  $y \in (f(a), f(b))$  y tenemos que  $g(a) = f(a) - y < 0$  y  $g(b) = f(b) - y > 0$ . Aplicando el teorema 1.5.14, podemos asegurar la existencia de un punto  $c$  tal que  $g(c) = 0$ , lo que es equivalente a tener que  $f(c) = y$ , y por tanto, se cumple el teorema. ■

- Observación 1.5.17** 1. Si  $f$  no es continua el teorema no se cumple. Consideremos  $f(x) = [x]$  en el intervalo  $[1, 2]$  y démonos  $y = \frac{1}{2}$ . Para este  $y$  no existe ningún  $c$  tal que  $f(c) = \frac{1}{2}$ .
2. El teorema 1.5.16 hace coincidir la intuición geométrica con el concepto analítico de continuidad, es decir, el gráfico de una función continua es una curva continua.
3. La propiedad descrita por el teorema 1.5.16 no caracteriza a todas las funciones continuas, es decir, existen funciones que tienen dicha propiedad sin ser continuas. Por ejemplo, la función  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$  toma todos los valores comprendidos entre  $-1$  y  $1$ , pero como ya hemos visto no es continua.

**Teorema 1.5.18 Teorema de Weierstrass**

Una función continua en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  es acotada y alcanza su valor máximo  $M$  y su valor mínimo  $m$ . Es decir, existen puntos  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tal que  $f(x_1) = M$  y  $f(x_2) = m$ .

**Demostración:** Daremos una demostración con pocos detalles.

Por ser  $f$  continua en  $[a, b]$  es posible, dado  $\epsilon = 1$ , encontrar un  $\delta$  tal que si  $x_1, x_2$  son tales que  $|x_1 - x_2| < \delta$ , entonces  $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$  (\*). Eligiendo  $n$  tal que  $\frac{b-a}{n} < \delta$ , por principio de Arquímedes, tenemos que  $[a, b]$  queda dividido en  $n$  subintervalos  $[a_k, a_{k+1}]$  de longitud menor que  $\delta$ .

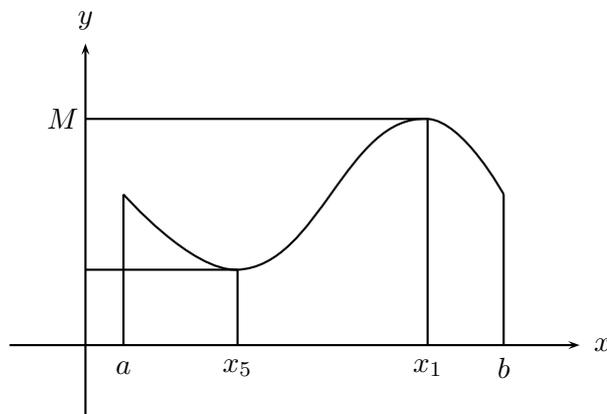


Figura 1.5.4: Teorema de Weierstrass.

Para todo  $x \in [a_k, a_{k+1}]$  se tiene que  $|f(x) - f(a_k)| < 1$ , de donde

$$|f(x)| < 1 + |f(a_k)| \quad ; \quad k = 1, \dots, n.$$

Definiendo  $C = \sup\{|f(a_k)| ; k = 1, \dots, n\}$ , podemos concluir que  $|f(x)| < 1 + C$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Por tanto  $f$  es acotada.

En virtud del axioma del supremo, el conjunto  $H = \{f(x) : x \in [a, b]\}$  tiene supremo  $M$  y tiene ínfimo  $m$ . Demostraremos que  $f$  alcanza el valor  $M$ . Supongamos que no alcanza el valor  $M$ , es decir,  $f(x) \neq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces la función  $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$  es positiva y continua en todo  $[a, b]$ . Usando el resultado de la primera parte de este mismo teorema, tenemos que  $g$  es acotada. Sea  $n$  una cota superior para los valores de  $g$ . Así,  $g(x) < N$ , lo que implica que,

$$M - f(x) > \frac{1}{N}.$$

Por tanto,  $f(x) < M - \frac{1}{N}$  para todo  $x \in [a, b]$ , lo cual nos dice que  $\sup_{x \in [a, b]} f(x) < M$ ,

lo que contradice la definición de  $M$ . Por tanto, debe existir un  $x_1 \in [a, b]$  de modo que  $f(x_1) = M$ . Para ver que la función alcanza su mínimo se procede de forma análoga y se deja de ejercicio. ■

**Observación 1.5.19** La propiedad (\*) usada en la demostración es la de continuidad uniforme que es otra propiedad de las funciones continuas que tienen un intervalo de la forma  $[a, b]$  como dominio.

**Corolario 1.5.20** Conservando las notaciones del teorema 1.5.18, se tiene que el recorrido de una función continua en un intervalo  $[a, b]$  es  $[m, M]$ .

**Demostración:**

Es consecuencia directa de los teoremas 1.5.16 y 1.5.18. ■

**Ejemplo 1.5.21** 1. Como hemos visto en la sección 1.3,  $f(x) = x^2$  definida en  $[0, 2]$  alcanza su mínimo en  $x = 0$  y su máximo valor 4 en  $x = 2$ .

2. Si el dominio no es un intervalo cerrado y acotado, por ejemplo, la misma función anterior con dominio  $[0, 2)$ , la función no alcanza su máximo que sigue siendo 4.

3. Si la función no es continua, por ejemplo,  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(0) = 1$  en  $[-1, 1]$  no es acotada y por tanto no tiene máximo ni mínimo.

Hemos visto a través de  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$  que una función que toma todos los valores de un intervalo no necesariamente es continua. Pero, si además la función es estrictamente creciente (o decreciente), entonces es continua. Es lo que veremos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.5.22** Una función estrictamente creciente (o decreciente) que toma todos los valores comprendidos entre  $f(a)$  y  $f(b)$  es continua en  $[a, b]$ .

**Demostración:**

Supongamos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , es estrictamente creciente. Entonces si  $h > 0$ ,  $f(x) < f(x + h)$ . Manteniendo fijo  $x$ , la función  $g(h) = f(x + h) - f(x)$  es estrictamente creciente en el intervalo  $[0, b - x]$  y como  $f$  toma todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$ ,  $g(h)$  toma todos los valores entre 0 y  $f(b) - f(x)$  en forma creciente. Por tanto,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} g(h) = 0$  y obtenemos la continuidad de  $f$  en  $x$ . Como  $x$  es cualquier punto del dominio,  $f$  es continua en  $[a, b]$ . ■

**Teorema 1.5.23** Si  $y = f(x)$  es continua y estrictamente creciente (o decreciente) en  $[a, b]$ , entonces su inversa  $y = g(x)$  definida sobre el recorrido de  $f$ ,  $R(f) = [m, M]$ , es estrictamente creciente (o decreciente) y continua.

**Demostración:** La demostración es consecuencia directa del teorema 1.5.22 y del ejercicio resuelto 10 de la sección 2.2. ■

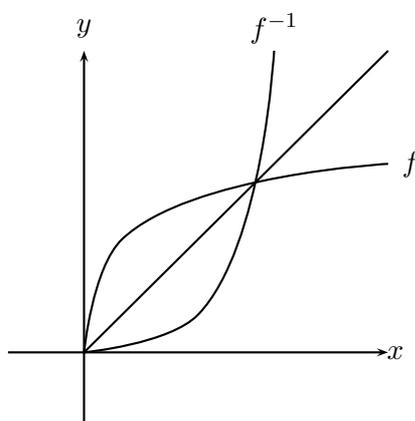
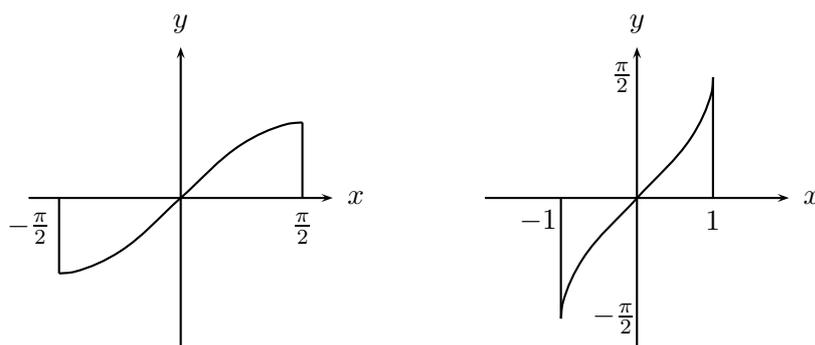


Figura 1.5.5: Continuidad de la inversa

- Ejemplo 1.5.24** 1. Si  $n$  es par,  $f(x) = x^n$  es una función estrictamente creciente, positiva con  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . Por ser continua toma todos los valores entre 0 y  $+\infty$ . Usando el teorema 1.5.23 podemos concluir que su inversa  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  definida en  $[0, +\infty)$  es también estrictamente creciente y continua.
2.  $h(x) = \sin x$ , con  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , es estrictamente creciente y continua. Por teorema del valor intermedio toma todos los valores entre  $-1$  y  $1$ . Por teorema 1.5.23 su inversa  $h^{-1}(x)$  es continua en  $[-1, 1]$ . A la función  $h^{-1}(x)$  se le llama *arcoseno de  $x$*  y se denota  $y = \arcsen x$ .

Figura 1.5.6: La función  $\sin x$  y su inversa.

## 1.5.5. Ejercicios resueltos

1. Dada la función:

$$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2},$$

con  $a_1 \neq 0$  y  $a_2 \neq 0$ . Analice la continuidad.

**Solución:**

- Veamos primero cuál es el dominio de la función. Por ser una función racional su dominio es el conjunto:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : a_2x^2 + b_2x + c_2 \neq 0\}.$$

Para conocer exactamente los puntos que debemos excluir, debemos resolver la ecuación de segundo grado:

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación vemos que,

$$x = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2},$$

entonces,

- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b_2}{2a_2}\right\}$  si  $b_2^2 = 4a_2c_2$ .
  - $D(f) = \mathbb{R} - \{x_1, x_2\}$  si  $b_2^2 - 4a_2c_2 > 0$ .
  - $D(f) = \mathbb{R}$  si  $b_2^2 - 4a_2c_2 < 0$ .
- Si  $D(f) = \mathbb{R}$ , entonces la función es continua en todo punto, pues el denominador no se anula nunca y es cociente de funciones continuas.

Cuando  $b_2^2 - 4a_2c_2 > 0$ , la función es continua en su dominio y no está definida en los puntos  $x_1 = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$  y  $x_2 = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$ .

Si  $b_2^2 = 4a_2c_2$ , entonces  $f$  es continua en su dominio y no está definida en  $x = -\frac{b_2}{2a_2}$ .

2. Analice la continuidad de la función definida mediante un proceso de límite:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n}, \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

**Solución:**

- Si  $x = 0$ , entonces  $f(x) = 1$ .
- Si  $x = 1$ , entonces  $f(x) = \frac{1}{2}$ .
- Si  $x \in (0, 1)$ , entonces  $f(x) = 1$ . Esto se debe a que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$  cuando  $x \in (0, 1)$ .
- Si  $x \in (1, \infty)$ , entonces  $f(x) = 0$ . Esto se debe a que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$  cuando  $x > 1$ .

Por tanto,  $f$  tiene una discontinuidad no removible en  $x = 1$ ; en todos los demás puntos del dominio la función es continua.

3. Encuentre los puntos de discontinuidad de la función **parte entera** de  $x^2$ ,  $[x^2]$ , y bosqueje su gráfico.

**Solución:**  $f(x) = [x^2]$ . Como  $x^2 \geq 0$ , el recorrido de  $f$ ,  $R(f) = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Si  $x \in [0, 1)$ , entonces  $x^2 \in [0, 1)$ , lo que implica que  $[x^2] = 0$ .

Si  $[x^2] = 1$ , entonces  $x^2 \in [1, 2)$ , por consiguiente  $1 \leq x < \sqrt{2}$ .

En general, si  $[x^2] = n$ , entonces  $x^2 \in [n, n+1)$ . De donde deducimos que  $\sqrt{n} \leq x < \sqrt{n+1}$ . Así, podemos apreciar que los puntos de discontinuidad son:  $1, \sqrt{2}, \dots, \dots, \sqrt{n}, \dots$

Por otro lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Esto nos dice que los intervalos donde  $f$  es continua tienen longitud cada vez más pequeña a medida que crece  $n$ .

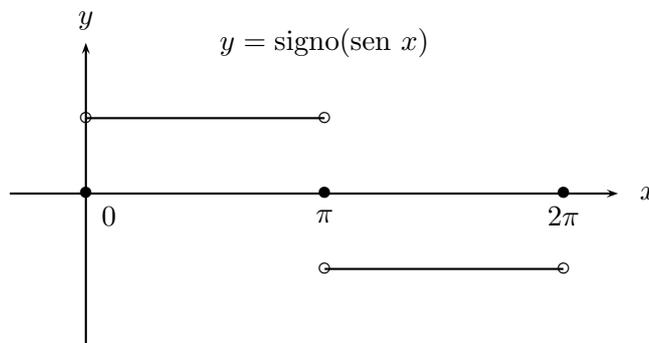
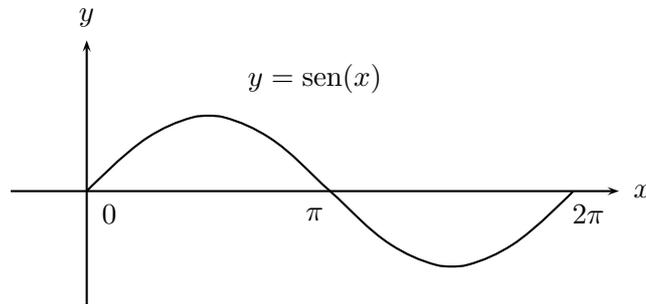
4. Analice la continuidad de

$$f(x) = \text{signo}(\text{sen } x).$$

**Solución:** Por ser  $\text{sen } x$  una función periódica de período  $2\pi$ ,  $f(x+2\pi) = \text{signo}(\text{sen}(x+2\pi)) = \text{signo}(\text{sen } x) = f(x)$ . Entonces, vemos que  $f$  también es una función periódica con período  $2\pi$ , lo que nos permite restringir el análisis al intervalo  $[0, 2\pi]$ .

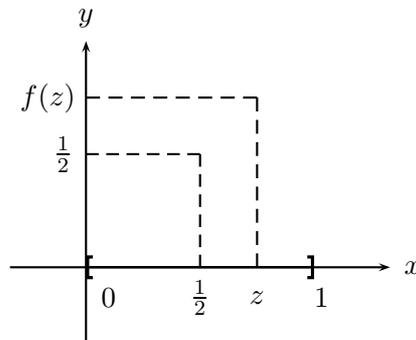
$$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0.$$

Si  $x \in (0, \pi)$ ,  $f(x) = 1$ , en cambio, si  $x \in (\pi, 2\pi)$ ,  $f(x) = -1$ . Por consiguiente, la función es continua en los intervalos  $(k\pi, (k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , y es discontinua en los puntos  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



5. Sea  $f(x)$  una función continua en  $[0, 1]$ . Supongamos que  $f(x) \in \mathbb{Q}$ , para todo  $x$  y que  $f(0,5) = 0,5$ . Demuestre que  $f(x)$  es la función constante con valor 0,5.

**Solución:**



Supongamos por contradicción que existe  $z \in [0, 1]$  tal que  $f(z) \neq \frac{1}{2}$ . Supongamos en particular que  $f(z) > \frac{1}{2}$ , entonces el intervalo  $\left[\frac{1}{2}, f(z)\right]$  contiene infinitos números irracionales  $u$ . Usando el **teorema del valor intermedio**, 1.5.16, tenemos que dado

$u \in \left[\frac{1}{2}, f(z)\right]$ , debe existir  $x \in [0, 1]$  tal que  $f(x) = u$ . Lo cual contradice la hipótesis que  $f$  toma solamente valores racionales. Por lo tanto,  $f(x) = \frac{1}{2}$ , para todo  $x \in [0, 1]$ .

6. Sea  $f(x) = x^2 - 2$  en  $[0, 3]$  y

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{en } [0, 3] \\ L & \text{en } [3, 5], \end{cases}$$

donde  $L$  es la recta  $y = ax + b$ . Calcule  $a$  y  $b$  de modo que:

- $L$  pase por el origen y la función  $h(x)$  sea continua en  $x = 3$ .
- $L$  tenga pendiente  $-2$  y  $h(x)$  sea continua en  $x = 3$ .

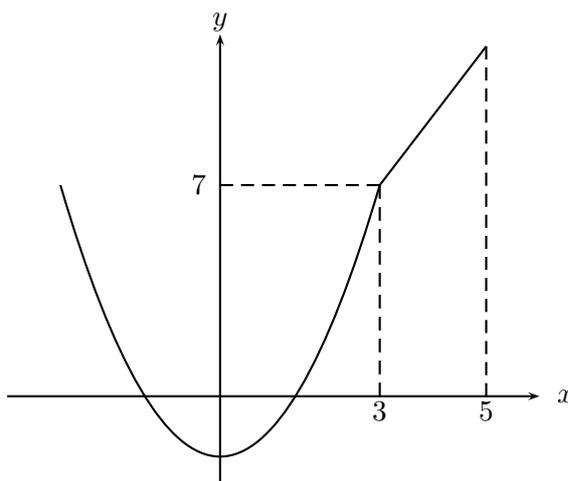
**Solución:**

- Si  $L$  pasa por el origen, entonces  $b = 0$ . Para que  $h(x)$  sea continua en  $x = 3$ , basta que  $L$  pase por el punto  $(3, f(3)) = (3, 7)$ . Por lo tanto,  $a = \frac{7}{3}$ . Entonces tenemos que:

$$h(x) = \begin{cases} (x^2 - 2) & \text{en } [0, 3] \\ \frac{7}{3}x & \text{en } [3, 5], \end{cases},$$

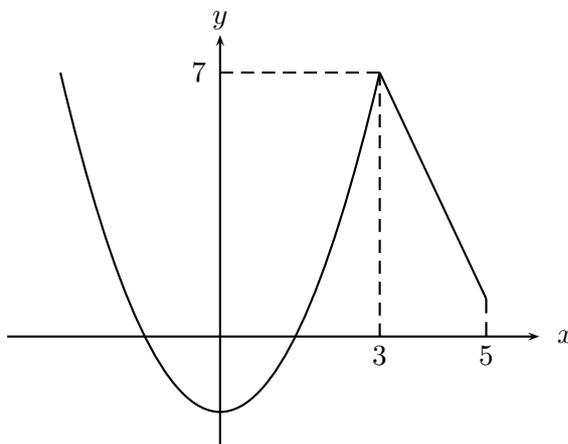
es continua en  $x = 3$ .

Su gráfico es:



- b) En este caso la recta  $L$  pasa por el punto  $(3, f(3)) = (3, 7)$  y tiene pendiente  $-2$ , por lo tanto su ecuación es:  $y - 7 = -2(x - 3)$ , es decir,  $y = -2x + 13$ .

Su gráfico es:



7. Sea  $f(x)$  una función continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  que satisface la relación:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

- a) Calcule  $f(0)$ ,  $f(n)$  con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(k)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f(r)$  con  $r \in \mathbb{Q}$ .  
 b) Si  $f$  es continua, calcule  $f(x)$  donde  $x$  es un número irracional.  
 c) Demuestre que  $f(x) = cx$ , donde  $c$  es una constante.

**Solución:**

- a)  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ , lo que implica  $f(0) = 0$ .

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1).$$

$$f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 2f(1) + f(1) = 3f(1).$$

En general, tenemos que  $f(n) = nf(1)$ , cuando  $n$  es un número natural.

Ahora calcularemos  $f(-n)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .  $f(0) = f(1 - 1) = f(1) + f(-1) = 0$ , entonces  $f(-1) = -f(1)$ . Esto nos permite calcular  $f(-n) = -nf(1)$ .

Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$ , inductivamente se tiene que  $f(nx) = nf(x)$ .

$$f(1) = f\left(n \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right), \text{ implica } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1).$$

Sea  $r$  un número racional,  $r = \frac{p}{q}$ , entonces

$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p\frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = p\frac{1}{q}f(1) = rf(1).$$

b) Si  $x$  es un número irracional, entonces  $x$  es el límite de una sucesión de números racionales:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n, \quad r_n \in \mathbb{Q}.$$

Así,

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right).$$

Como  $f$  es una función continua, el teorema 1.5.8, permite escribir

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(1) = f(1)x.$$

c) De los cálculos hechos en los items anteriores se tiene que

$$f(x) = f(1)x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

lo cual puede ser expresado como

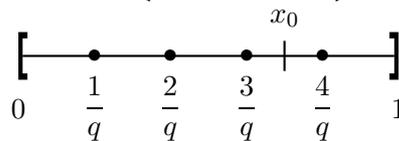
$$f(x) = cx, \quad \text{con } c = f(1).$$

8. Analizar la continuidad de la función definida en el ejercicio resuelto 5 la sección 1.3:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional,} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, p \text{ y } q \text{ son primos relativos.} \end{cases}$$

**Solución:** Esta función es continua para todos los irracionales y discontinua en todos los racionales. En efecto,

a) Sea  $x_0$  un número irracional en  $[0, 1]$ , entonces  $f(x_0) = 0$ . Dado  $\epsilon > 0$ , consideremos el conjunto finito  $F = \left\{ q \in \mathbb{N} : q \leq \frac{1}{\epsilon} \right\}$ .



Dejando  $q \in F$  fijo, de las fracciones  $\frac{p}{q}$ , con  $p \in \{0, \dots, q-1\}$  tomemos  $p^*$ , el mayor natural que satisface  $\frac{p^*}{q} < x_0$ . Como  $F$  es finito, existe la mayor de las fracciones  $\frac{p^*}{q}$ , para todo  $q \in F$ . Entonces existe  $r' = \frac{p'}{q'}$  la mayor fracción con denominador en  $F$  menor que  $x_0$ .

Del mismo modo podemos encontrar  $r'' = \frac{p''}{q''}$ , la menor fracción con denominador en  $F$ , tal que  $x_0 < \frac{p''}{q''}$ .

Esto nos dice que el intervalo  $(r', r'')$  no contiene números racionales con denominador en  $F$ .

Escribiendo  $\delta = \min\{x_0 - r', r'' - x_0\}$  tenemos que, si  $0 < \left| \frac{p}{q} - x_0 \right| < \delta$ , entonces  $\frac{p}{q}$  no pertenece al conjunto  $F$ , lo que implica  $q > \frac{1}{\epsilon}$ . Es decir,

$$\left| f(x_0) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{1}{q} \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto,  $f$  es continua en el número irracional  $x_0$ .

- b) Sea  $x_0 \in \mathbb{Q}$ , entonces  $x_0 = \frac{p_0}{q_0}$ . Dado cualquier  $\delta > 0$ , en  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , existen infinitos irracionales  $x$  para los cuales se tiene

$$|f(x_0) - f(x)| = |f(x_0)| = \frac{1}{q_0} > \epsilon.$$

Por lo cual  $f$  no puede ser continua en ningún número racional.

9. a) Demuestre que  $f(x) = |x|$  es continua en cada punto  $x \in \mathbb{R}$ .  
 b) Analice la continuidad de  $g(x) = \frac{x}{|x|}$  cuando  $x \neq 0$ , y  $g(0) = 0$ .

**Solución:** Sea  $x_0$  un número real cualquiera.

- a) Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \epsilon$  tal que, si  $|x - x_0| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta = \epsilon$ .  
 b) Si  $x \neq 0$ , el cociente de funciones continuas  $\frac{x}{|x|}$  es continuo, según teorema 1.5.9. Si  $x = 0$ , debemos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-x} = -1.$$

Como los límites laterales son distintos,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe, y por consiguiente,  $g$  es discontinua en  $x = 0$ .

10. Sea

$$h(x) = \frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}.$$

- a) Analice la continuidad de  $h$  en cada punto de su dominio.  
 b) ¿ Es posible extender  $h$  a  $x = 0$ , de modo que sea continua ?

**Solución:**

- a) Debemos notar que  $h(x)$  es un número real si y sólo si  $x \neq 0$  y  $25 - x^2 \geq 0$ , es decir,

$$D(h) = [-5, 0) \cup (0, 5].$$

En virtud del teorema 1.5.9,  $h$  es continua en todo punto del dominio.

- b) Si  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  existe, entonces la función  $h$  puede extenderse continuamente al intervalo  $[-5, 5]$ .

Transformando algebraicamente la expresión tenemos,

$$\frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x} = \frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x} \cdot \frac{5 + \sqrt{25 - x^2}}{5 + \sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{5 + \sqrt{25 - x^2}}.$$

Esto implica que  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ . Por esta razón es posible extender el dominio de la función, definiendo  $h(0) = 0$  y la función extendida es continua sobre  $[-5, 5]$ .

11. Calcule  $a, b$  de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

sea continua en todo punto de su dominio.

**Solución:** Por teorema 1.5.9 y ejemplo 1.5.24,  $f(x)$  es continua en  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 2)$  y  $(2, +\infty)$ . Los puntos a analizar son  $x = 0$  y  $x = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2} = 2.$$

Esto nos dice que la recta  $y = ax + b$  debe pasar por el punto  $(0, 2)$ .

En el punto  $x = 2$  tanto el numerador como el denominador se anulan, una posibilidad de evitar esta indeterminación es transformar algebraicamente la expresión amplificando por las expresiones conjugadas del numerador y del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} &= \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3} \cdot \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} \\ &= \frac{[x^2 - (x+2)](\sqrt{4x+1}+3)}{[(4x+1)-9][x + \sqrt{x+2}]} = \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x + \sqrt{x+2})} \end{aligned}$$

entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \frac{9}{8}.$$

Por esta razón la recta  $y = ax + b$  debe pasar por el punto  $\left(2, \frac{9}{8}\right)$ . Así, vemos que

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2 - \frac{9}{8}}{0 - 2} = -\frac{7}{16}.$$

$$b = 2$$

$$\text{Así, } f(x) = -\frac{7}{16}x + 2, \text{ sobre } [0, 2].$$

12. a) Encuentre el máximo de  $y = x^2(4x^2 - x^2)$  cuando  $x$  varía en  $[0, 2a]$ .  
 b) Encontrar el mínimo de  $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}$ , con  $x \in (-a, a)$ :

**Solución:**

- a)  $y(x) = x^2(4a^2 - x^2)$  es continua en  $[0, 2a]$ . Por teorema de Weierstrass, teorema 1.5.18, existe  $x_1$  tal que  $y(x_1) = M$  es el máximo valor de la función  $y$ . Usando que un producto de dos factores variables cuya suma es constante, toma su valor máximo cuando los dos factores son iguales.

La suma de los factores es  $x^2 + 4a^2 - x^2 = 4a^2$ , entonces debemos resolver la ecuación:

$$x^2 = 4a^2 - x^2, \text{ que tiene por solución } x = a\sqrt{2}.$$

El máximo valor que toma  $y$  es  $y(a\sqrt{2}) = 2a^2(4a^2 - 2a^2) = 4a^2$ .

- b) Usando un resultado análogo al anterior tenemos que una suma de dos factores con producto constante es mínima cuando ambos factores son iguales, tenemos que siendo  $\frac{a+x}{a-x} \frac{a-x}{a+x} = 1$ , la solución al problema la obtenemos resolviendo la ecuación:  $\frac{a+x}{a-x} = \frac{a-x}{a+x}$ , lo que implica  $x = 0$ .

13. Encuentre el máximo y mínimo valor, si es que existen, que toma la función:

$$y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}.$$

**Solución:** Estudiemos previamente el recorrido de la función. Despejando la variable  $x$  en la ecuación que define la función tenemos,

$$yx^2 - 2yx + y - x^2 + 6x - 8 = 0,$$

lo que nos da los valores

$$x = \frac{3 - y \pm \sqrt{3y + 1}}{1 - y}.$$

Como  $x$  debe ser un número real  $3y + 1 \geq 0$ , de donde  $y \geq -\frac{1}{3}$ . Entonces  $y \in [-\frac{1}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$ . Por consiguiente su mínimo valor es  $-\frac{1}{3}$  que lo alcanza en  $x = \frac{5}{2}$ .  $y$  no tiene valor máximo pues,  $y$  toma valores entre  $(1, +\infty)$ .

14. Considere las sinusoides  $\varphi_1(x) = a_1 \sin \omega_1 x + b_1 \cos \omega_1 x$ , si  $x < 0$  y  $\varphi_2(x) = a_2 \sin \omega_2 x + b_2 \cos \omega_2 x$ , si  $x > 0$ . ¿Cuáles deben ser sus amplitudes para que ellas definan una función continua en  $\mathbb{R}$ ? ¿Es la nueva función una senoide?

**Solución:**

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi_1(x) = b_1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_2(x) = b_2$ , entonces si  $b_1 = b_2 = b$ , la función:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \varphi_2(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es continua en  $\mathbb{R}$ . Si  $A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$  es la amplitud de  $\varphi_i(x)$  debemos tener  $A_1^2 - a_1^2 = A_2^2 - a_2^2$ . Si  $\varphi(x)$  fuese una senoide debería ser de la forma  $a \sin \omega x + b \cos \omega x$ , entonces como:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \text{ para } x < 0 \text{ y } \varphi(x) = \varphi_2(x) \text{ para } x > 0,$$

debemos tener  $a_1 = a_2$  y  $\omega_1 = \omega_2$  (además  $b_1 = b_2$ ). Por tanto, genéricamente el acoplamiento de senoideas no es una senoide.

15. Probar que el polinomio  $p(x) = x^4 - x^3 - 1$  tiene a lo más dos raíces reales. Localice estas raíces aproximadamente.

**Solución:**

$p(x)$  es una función continua en  $\mathbb{R}$ , entonces si existen  $x_1 < x_2$  tal que  $p(x_1) \cdot p(x_2) < 0$ , aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass, se tiene que existe al menos un punto  $c$ ,  $x_1 < c < x_2$  con  $p(c) = 0$ .

Apliquemos este criterio. Como los coeficientes de  $p(x)$  son cercanos a 0, busquemos las raíces en el mismo rango.

$$p(-1) = 1, p(0) = -1, p(1) = -1, p(2) = 7.$$

Entonces entre  $-1$  y  $0$  y entre  $1$  y  $2$  debe haber soluciones de  $p(x) = 0$ . Busquemos la raíz  $c$  entre  $-1 < c < 0$ .

$$\begin{array}{llll} p(-0,5) & = -0,8125 & \implies & -1 < c < -0,5 \\ p(-0,75) & = -0,2616 & \implies & -1 < c < -0,75 \\ p(-0,80) & = -0,0784 & \implies & -1 < c < -0,80 \\ p(-0,90) & = 0,3851 & \implies & -0,90 < c < -0,80 \\ p(-0,85) & = 0,1361 & \implies & -0,85 < c < -0,80 \\ p(-0,83) & = 0,0463 & \implies & -0,83 < c < -0,80 \\ p(-0,82) & = 0,0034 & \implies & -0,82 < c < -0,80 \\ p(-0,81) & = -0,003 & \implies & -0,82 < c < -0,81 \\ p(-0,815) & = -0,0174 & \implies & -0,820 < c < -0,815 \\ p(-0,818) & = -0,04 & \implies & -0,820 < c < -0,818 \\ p(-0,819) & = -0,0007 & . & \end{array}$$

Podemos seguir si queremos una aproximación mayor, pero con este error del orden de  $10^{-4}$  es más que suficiente para una gran gama de problemas de ingeniería.

Concluimos que existe  $c \approx -0,819$  tal que  $p(c) = 0$ . De igual forma encontramos  $p(1,3804) = 0,0005$ , entonces otra raíz es aproximadamente  $1,3804$ .

16. Encuentre los  $x \in \mathbb{R}$  que satisfacen la desigualdad:

$$\frac{(x - 3)(x + 1)^2(x^2 + 4x + 4)}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$$

**Solución:**

Sea  $f(x) = \frac{(x - 3)(x + 1)^2(x^2 + 4x + 4)}{x^2 - 3x + 2}$ . El numerador y el denominador son funciones continuas en  $\mathbb{R}$ ; por lo tanto, sólo en sus raíces reales pueden cambiar de signo.

Sea  $p(x) = (x - 3)(x + 1)^2(x^2 + 4x + 4)$ , entonces las raíces reales de  $p(x)$  son  $x = 3$  y  $x = -1$ . Por otro lado,  $q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ , se anula en  $x = 1$  y  $x = 2$ , por lo tanto, estos puntos no pertenecen al dominio de  $f$ . Veamos los signos de  $f(x)$  en la siguiente tabla:

	$-\infty$	$-1$		$1$		$2$		$3$	$+\infty$
$p$	$-$	$0$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$q$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$f$	$-$	$0$	$-$	$\times$	$+$	$\times$	$-$	$0$	$+$

Tabla de signos.

Luego  $f(x) \geq 0$  en  $\{-1\} \cup (1, 2) \cup [3, +\infty)$ . Observemos que el análisis de desigualdades por este método sólo tiene sentido si las funciones involucradas son continuas.

17. Solucione gráficamente el siguiente problema: Si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que asume cada uno de sus valores exactamente dos veces, entonces  $f$  no puede ser continua.

**Solución:**

Supongamos que  $f$  es continua. Entonces sean  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ , dos puntos donde ella asume el supremo. Graficando tenemos:

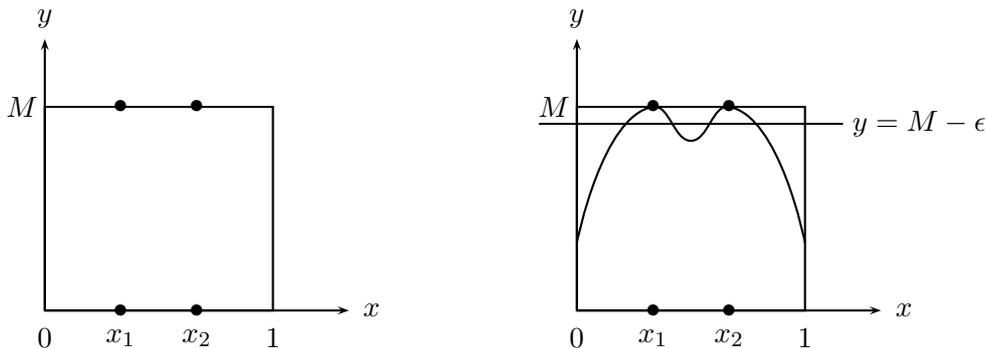


Figura 1.5.7

Vemos que no podemos completar el gráfico, pues cualquier recta  $y = M - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  pequeño, cortaría al menos en cuatro partes el gráfico, lo que contradiría la hipótesis de asumir exactamente dos veces. Esto es posible sólo si  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 1$ , como en la figura 1.5.8.

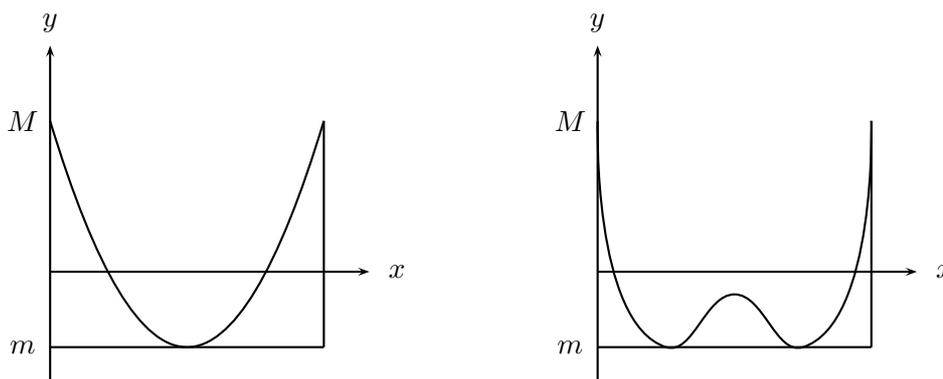


Figura 1.5.8

Pero, como podemos ver, el mínimo sólo se alcanza una vez, y si lo alcanzara dos veces se tendría el mismo problema anterior. Por tanto,  $f$  no puede ser continua.

18. Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pruebe que:

- (i)  $f$  es inyectiva en  $[0, 1]$ .
- (ii)  $f(f(x)) = x$ , para todo  $x \in [0, 1]$ . Es decir,  $f = f^{-1}$ .
- (iii)  $f$  sólo es continua en  $x = \frac{1}{2}$ .

**Solución:**

- (i) Si  $x_1 \neq x_2$  y si  $f(x_1) = f(x_2)$  entonces, si  $x_1$  y  $x_2$  son racionales tendríamos  $x_1 = x_2$ , lo que no puede ser. Si ambos son irracionales, entonces  $1 - x_1 = 1 - x_2$  lo cual tampoco puede suceder. Si  $x_1$  es racional y  $x_2$  es irracional tendríamos  $x_1 = 1 - x_2$ , lo que no puede ser pues  $1 - x_2$  es irracional. Luego  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

- (ii) Si  $x \in \mathbb{Q}$ , entonces  $f(f(x)) = f(x) = x$ .  
 Si  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , entonces  $f(f(x)) = f(1-x) = 1 - (1-x) = x$ .
- (iii) Sea  $a = \frac{1}{2}$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $|x - \frac{1}{2}| < \delta = \varepsilon$ . Si  $x \in \mathbb{Q}$ , entonces  $|f(x) - \frac{1}{2}| = |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ .

Si  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , entonces  $|f(x) - \frac{1}{2}| = |1 - x - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2} - x| = |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ .

Si  $a \neq \frac{1}{2}$ . Supongamos, por ejemplo,  $a \in \mathbb{Q}$  y  $a < \frac{1}{2}$ , entonces si  $f$  es continua en  $a$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $|x - a| < \delta$  se tiene  $|f(x) - f(a)| = |f(x) - a| < \varepsilon$ . Sea  $\varepsilon = \frac{1-2a}{2} = \frac{1}{2} - a$  y sea  $x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  tal que  $x_n \rightarrow a$ . sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  si  $|x_n - a| < \delta$ , entonces

$$|f(x_n) - a| = |1 - x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2} - a.$$

Luego  $1 - x_n - a < \frac{1}{2} - a$  implica  $x_n > \frac{1}{2}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Lo que es absurdo. De manera similar se prueban los otros casos.

### 1.5.6. Ejercicios propuestos

1. Analice la continuidad en cada punto del dominio de las siguientes funciones:

a)  $\sqrt{x - [x]}$ .

b)  $[x] + \sqrt{x - [x]}$ .

c)  $\left[ \frac{1}{x} \right]$ .

d)  $\frac{1}{\left[ \frac{1}{x} \right]}$ .

2. Sea  $f(x)$  = signo de  $x$ , que se define como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad de  $f$  en cada punto de su dominio.  
 b) Clasifique las discontinuidades en removibles y no removibles de cada una de las siguientes funciones:

- 1)  $f(x)$ .
- 2)  $g(x) = f^2(x)$ .
- 3)  $h(x) = 1 - f^2(x)$ .
- 4)  $i(x) = \frac{1}{f^2(x)}$ .
- 5)  $k(x) = \frac{1}{1 - f^2(x)}$ .

c) Bosqueje el gráfico de cada una de las funciones dadas en (b).

3. Analice la continuidad de cada una de las siguientes funciones y clasifique las discontinuidades.

a)  $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ .

b)  $g(x) = \frac{1}{1 - x^2}$ .

c)  $h(x) = \frac{1 - x}{1 - x^2}$ .

4. Encontrar el máximo valor, si es que existe, de

$$y(x) = (3 + x^2)(11 - x^2), \text{ en } [-\sqrt{11}, \sqrt{11}].$$

5. Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es continua solamente en  $x = 0$ .

6. Demuestre que

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3},$$

no tiene máximo ni mínimo en su dominio. ¿Contradice esto el teorema de Weierstrass?

7. Analice la continuidad de

$$g(x) = \begin{cases} -4x + \frac{8x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

8. Analice la continuidad en cada punto del dominio de la función

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{18x - 2x^2}{|9 - x^2|} & \text{si } x \neq 3, -3 \\ 11 & \text{si } x = 3 \\ 7 & \text{si } x = -3. \end{cases}$$

9. Analice la continuidad de

$$h(x) = x + [2x].$$

10. Calcular  $a$  y  $b$  de modo que la siguiente función resulte continua

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < -3 \\ ax + b & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \\ |4 - x^2| & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

Grafique  $g$ .

11. Calcular  $a$  y  $b$  de modo que la siguiente función resulte continua

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{16 - x^2} - 4} & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Grafique  $h$ .

12. Analice la continuidad de las siguientes funciones. Para los puntos de discontinuidad, diga si son removibles o no.

a)  $j(x) = \frac{1+x}{1-x},$

b)  $k(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}.$

13. Demuestre que si  $f(x)$  y  $g(x)$  son continuas, entonces  $s(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$  y  $i(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$ . Indicación: ver ejercicio propuesto 10 de la sección 1.5.

14. Analice sobre qué parte del dominio existe la función inversa de cada una de las siguientes funciones. Estudie las propiedades de la inversa y bosqueje sus gráficos.

a)  $\cos x.$

b)  $\tan x.$

- c)  $\operatorname{cosec} x$   
d)  $\operatorname{cotan} x$ .
15. a) Demuestre que si  $f$  es continua en un punto  $x_0$  y  $g$  es discontinua en  $x_0$ , entonces  $f + g$  es discontinua en  $x_0$ .  
b) ¿Puede  $f + g$  ser continua en un punto cuando  $f$  y  $g$  son discontinuas en él ?
16. Localice aproximadamente dos raíces reales de  $p(x) = x^4 - 2,42x^2 + 1,4641$ .
17. Considere la senoide  $f(x) = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$  definida para  $x < 0$ . ¿Cómo debe ser la amplitud y el desfase para que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en  $\mathbb{R}$  ?

18. Encuentre los  $x \in \mathbb{R}$  que satisfacen la desigualdad:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2 + 6x - 4} \leq 0.$$

19. Analice la continuidad de la siguiente función definida mediante un doble proceso de límite:

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^n.$$

## Capítulo 2

# La derivada y sus aplicaciones

### 2.1. Introducción

En 1604 Galileo formuló la ley de la caída de los cuerpos : *la caída de los cuerpos es un movimiento uniformemente acelerado*. Matemáticamente se expresa diciendo que el espacio  $s(t)$  recorrido es proporcional al cuadrado del tiempo:

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2$$

Pero esto no satisfizo a Galileo, quien deseaba comprender la esencia del movimiento de la caída y fue aquí donde se equivocó, al igual que otros grandes del pensamiento científico como Leonardo y Descartes. Él creyó que el principio era: *la velocidad del cuerpo en caída libre es proporcional a la distancia recorrida*. Ahora, con el cálculo diferencial e integral no es difícil demostrar que este principio no conduce a la ley ya establecida. Mucho se ha escrito sobre este famoso error, de preferir formular la ley como la velocidad proporcional al espacio. Algunos historiadores de la ciencia lo atribuyen, además de la ausencia del cálculo, al rol jugado por la geometría en los albores de la ciencia moderna.

*El proceso del cual salió la física clásica consistió en un esfuerzo para racionalizar, o dicho de otra forma, para geometrizar el espacio y matematizar las leyes de la naturaleza. A decir verdad, se trata del mismo esfuerzo, pues geometrizar el espacio no quiere decir otra cosa que aplicar al movimiento leyes geométricas. ¿Y cómo -antes de Descartes- se podía matematizar algo si no es geometrizándolo?*<sup>1</sup>

Para llegar a comprender la esencia del movimiento, era necesario llegar a la idea física realmente difícil de *velocidad instantánea*. Sea

$$s = f(t)$$

---

<sup>1</sup>A. Koyré: Estudios Galileanos. Siglo veintiuno, 1988.

una función que nos da la posición de un móvil en el instante  $t$ . Para encontrar la velocidad  $v$  en un instante  $t = t_0$ , consideremos el intervalo de tiempo transcurrido entre  $t_0$  y  $t_0 + h$ ,  $h \neq 0$ . El camino recorrido en el intervalo dado es

$$\Delta s = f(t_0 + h) - f(t_0).$$

La velocidad promedio  $\bar{v}$  es

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

para obtener la velocidad instantánea  $v$  es necesario hacer el intervalo de tiempo tan pequeño como queramos, es decir,

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Este límite corresponde a la derivada de una función y dice la rapidez con que está variando la función. Fue Newton en 1665 quien llegó a este concepto llevando el problema físico a una formulación geométrica, que establece la equivalencia entre la existencia del límite  $v$  y el problema de trazar la recta tangente en un punto  $t_0$  al gráfico de la función  $f$ .

En primera instancia, no es claro qué es la tangente a una curva plana en un punto dado, pues no es equivalente al caso de la geometría elemental de la circunferencia, en que la tangente es la recta que tiene sólo un punto común con ella. Para una curva cualquiera esto pierde sentido.

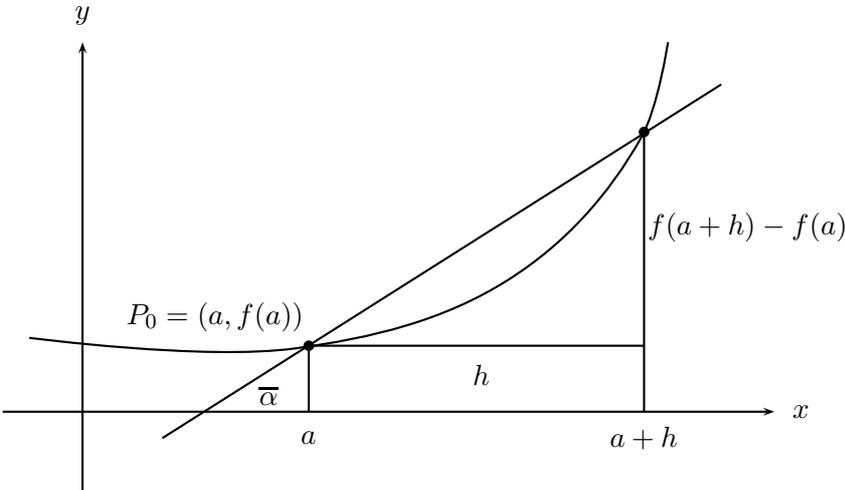
Consideremos la curva  $y = f(x)$  y sobre ella un punto  $P_0$  de abscisa  $a$ . Para definir la tangente en el punto  $P_0$  consideremos otro punto  $P$  de abscisa  $a + h$  y tracemos la secante  $P_0P$  que forma un ángulo  $\bar{\alpha}$  con el eje  $X$ . Entonces, la recta tangente en el punto  $P_0$  es la recta que se obtiene como caso límite de estas secantes cuando el punto  $P$  se acerca indefinidamente a  $P_0$ . La tangente del ángulo  $\bar{\alpha}$  es:

$$\tan \bar{\alpha} = \frac{QP}{P_0Q} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Para tener la inclinación de la recta tangente debemos pasar al límite y obtenemos que:

$$\tan \alpha = \lim_{P \rightarrow P_0} \tan \bar{\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Con los conocimientos de geometría analítica sabemos que conociendo un punto y la inclinación de la recta, ella está completamente determinada.



## 2.2. Definición y fórmulas básicas de la derivada

### 2.2.1. Definiciones básicas

**Definición 2.2.1** Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto  $a$ . Llamaremos la **derivada** de la función  $f$  en el punto  $a$  al límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (2.1)$$

cuando existe. En tal caso lo denotaremos por  $f'(a)$  ó  $\frac{df}{dx}(a)$  ó  $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$ .

**Ejemplo 2.2.2** 1. Si  $f(x) = c$ ; donde  $c$  es una constante, entonces  $f'(a) = 0$ . Ya que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0; \text{ para todo } h \neq 0.$$

2. Si  $f(x) = mx + p$ , con  $m$  y  $p$  números fijos, entonces  $f'(a) = m$ . Ya que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{m(a+h) + p - (ma + p)}{h} = \frac{mh}{h} = m; \text{ para todo } h \neq 0.$$

Por tanto,  $f'(a) = m$ .

3. Si  $f(x) = x^2$ , entonces  $f'(a) = 2a$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= 2a + h. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a.$$

4. Si  $f(x) = \frac{1}{x}$ , entonces  $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ , cuando  $a \neq 0$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{a - (a+h)}{ha(a+h)} \\ &= \frac{-h}{ha(a+h)} \\ &= \frac{-1}{a(a+h)} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

5. Si  $f(x) = |x|$ , entonces  $f$  no tiene derivada en  $x = 0$ . Esto es consecuencia de la no existencia del límite 2.1 que define la derivada:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Cuando  $h > 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$ . Cuando  $h < 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$ .

6. Si  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , entonces  $f$  no tiene derivada en  $x = 0$ . Como

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}},$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$ . Por tanto  $f'(0)$  no existe.

7. Si  $f(x) = \cos x$ , entonces  $f'(a) = -\operatorname{sen} a$ . Esto es consecuencia del límite relevante 6 de la sección 1.4, que nos dice que

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\operatorname{sen} a.$$

**Observación 2.2.3** Según lo visto en la sección 1.5, el límite que define la derivada puede escribirse como:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}.$$

**Interpretación geométrica de la derivada.** Consideremos la curva  $y = f(x)$ . Tracemos la recta secante a la curva que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(a+h, f(a+h))$  tomando  $h$  positivo y fijo. Esta recta forma un ángulo  $\alpha(h)$  con la parte positiva del eje  $X$ , cuya tangente es:

$$\tan \alpha(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cuando hacemos tender  $h$  a 0, la recta secante va transformándose en una recta que tiende a tocar a la curva solamente en el punto  $(a, f(a))$ . La pendiente de esta recta es por tanto,

$$\tan \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

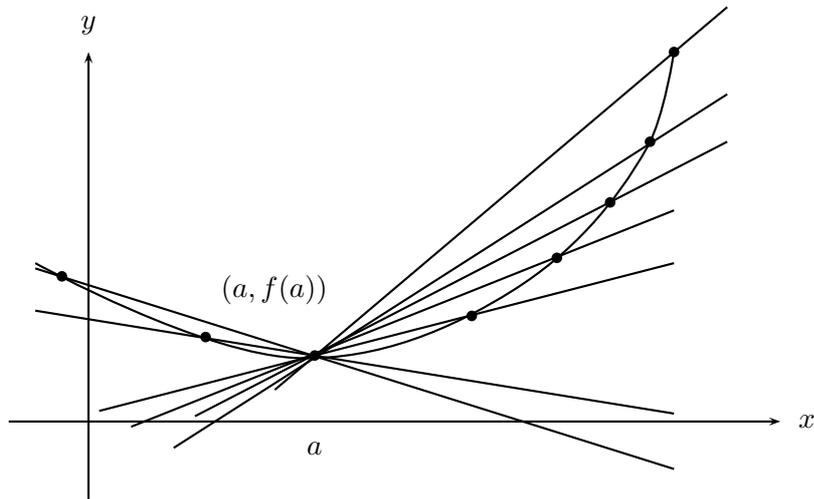


Figura 2.2.1: Interpretación geométrica de la derivada.

**Definición 2.2.4** (i) Si  $f$  es una función con derivada en  $x = a$ , llamaremos recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  a la recta que pasa por el punto  $(a, f(a))$  y cuya pendiente es  $f'(a)$ . Esta recta tiene por ecuación:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \quad (2.2)$$

(ii) Si  $f'(a) = \infty$ , entonces la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  es  $x = a$ .

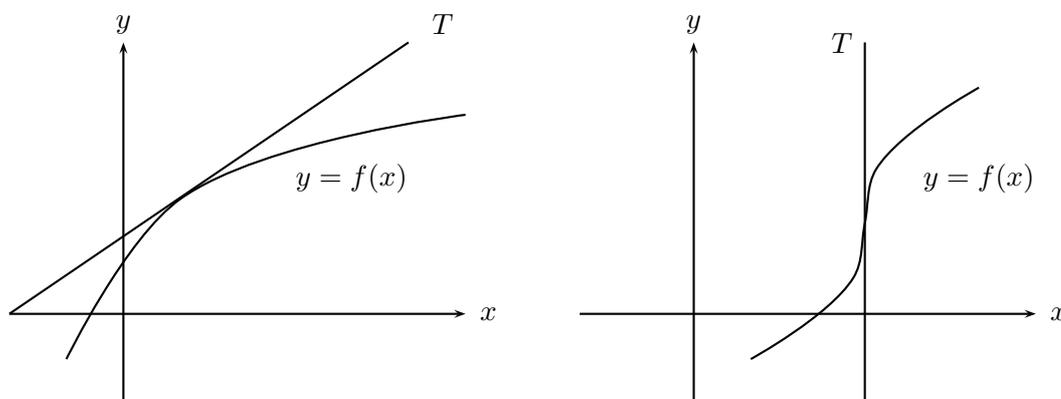


Figura 2.2.2: Recta tangente.

**Ejemplo 2.2.5** 1. La recta tangente a  $f(x) = x^2$  en  $x = 1$  es, según ejemplo 2.2.2 parte 3:

$$y = 2(x - 1) + 1$$

$$y = 2x - 1.$$

2. La recta tangente a  $f(x) = \cos x$  en  $x = \frac{\pi}{6}$  es, según ejemplo 2.2.2 parte 7:

$$y = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos \frac{\pi}{6}$$

$$y = -\frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. La recta tangente a  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  en  $x = 0$  es, según ejemplo 2.2.2 parte 6:

$$x = 0.$$

**Definición 2.2.6** ■ Si  $f$  es una función con derivada en  $x = a$  distinta de 0, llamaremos **recta normal** al gráfico de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  a la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto y que pasa por él. Es decir, es la recta cuya ecuación es:

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a) \quad (2.3)$$

- Si  $f'(a) = 0$ , entonces la **recta normal** al gráfico de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  es  $x = a$ .
- Si  $f'(a) = \infty$ , entonces la **recta normal** al gráfico de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  es  $y = f(a)$ .

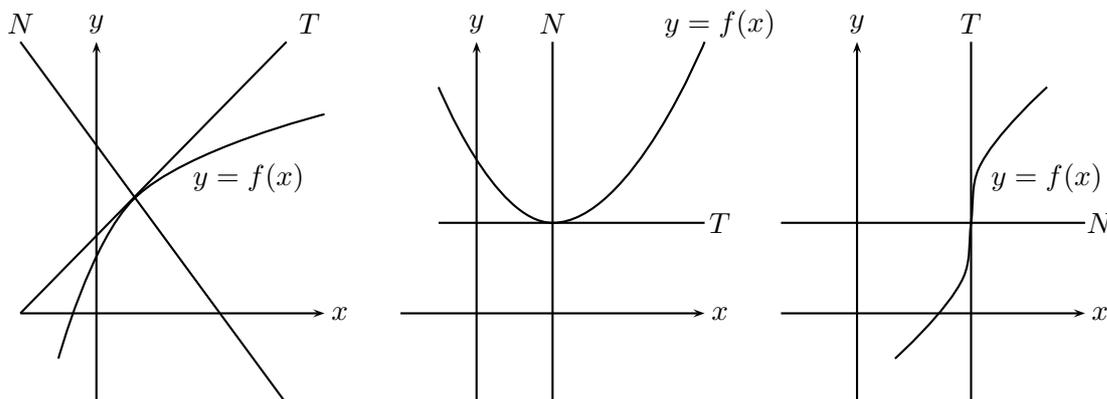


Figura 2.2.3: Recta normal.

**Ejemplo 2.2.7** 1. La recta normal a  $f(x) = x^2$  en  $x = 1$  es, según ejemplo 2.2.2 parte 3:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x - 1) + 1 \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ 2y &= -x + 3. \end{aligned}$$

2. La recta normal a  $f(x) = \cos x$  en  $x = \frac{\pi}{6}$  es, según ejemplo 2.2.2 parte 7:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{-\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}(x - \frac{\pi}{6}) + \cos \frac{\pi}{6} \\ y &= -\frac{1}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= 2(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= 2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

3. La recta normal a  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  en  $x = 0$  es, según ejemplo 2.2.2 parte 6:

$$y = 0.$$

**Definición 2.2.8** Diremos que una función  $f$  es **derivable o diferenciable** en un intervalo abierto  $I$  si existe la derivada en cada punto del intervalo. En este caso podemos definir la **función derivada**  $f'$  cuyo dominio es  $I$  y su valor en cada punto  $x$  es  $f'(x)$ .

**Ejemplo 2.2.9** 1. La función lineal y cuadrática son derivables en cualquier intervalo abierto, según ejemplo 2.2.2, partes 2 y 3.

2. Las funciones valor absoluto y raíz cúbica no son derivables en ningún intervalo abierto que contiene al cero, pues ellas no son derivables en  $x = 0$ . Ver ejemplo 2.2.2, parte 6.

**Derivadas laterales.** Para poder extender la definición 2.2.12 a un intervalo cerrado y acotado en algún extremo, es necesario definir las derivadas laterales tomando el límite a la derecha o a la izquierda del punto en la expresión que define a la derivada, según sea el caso.

**Definición 2.2.10** (i) Llamaremos **derivada a la derecha** del punto  $x = a$  al límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (2.4)$$

y lo denotaremos  $f'_+(a)$ .

(ii) Llamaremos **derivada a la izquierda** del punto  $x = a$  al límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (2.5)$$

y lo denotaremos  $f'_-(a)$ .

**Observación 2.2.11** Es consecuencia inmediata de las propiedades de límite que si las derivadas a la derecha y a la izquierda de un punto son iguales, entonces existe la derivada en el punto.

**Definición 2.2.12** Diremos que una función  $f$  es **derivable o diferenciable** en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  si existe la derivada en cada punto del intervalo abierto  $(a, b)$ , existe la derivada a la derecha en  $x = a$  y existe la derivada a la izquierda en  $x = b$ .

**Ejemplo 2.2.13** La función  $f(x) = |x|$  es derivable en intervalos de la forma  $[0, b]$ ,  $[a, 0]$ , con  $a < 0$  y  $b > 0$ .

### 2.2.2. Fórmulas elementales

Ahora comenzaremos a estudiar las propiedades básicas de la derivada.

**Teorema 2.2.14** Si una función es derivable en un punto  $a$ , entonces ella es continua en ese punto.

**Demostración:** Para demostrar que  $f$  es continua en  $a$ , basta demostrar, según la ecuación 1.16 de la sección 1.5 que  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] = 0$ . Como,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h.$$

Entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] = f'(a) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = 0. \blacksquare$$

**Observación 2.2.15** Como puede verse fácilmente del ejemplo 2.2.2, una función continua en un punto puede no tener derivada en él, como sucede con  $|x|$ ,  $\sqrt[3]{x}$  en  $x = 0$ .

**Teorema 2.2.16** Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $a$ . Entonces:

- (i)  $f \pm g$  es derivable en  $a$  y  $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ .
- (ii)  $f \cdot g$  es derivable en  $a$  y  $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ .
- (iii)  $\frac{f}{g}$  es derivable en  $a$  si  $g(a) \neq 0$  y se tiene:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

**Demostración:**

(i)

$$\begin{aligned} (f+g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= f'(a) + g'(a). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a) + f(a+h) \cdot g(a) - f(a+h) \cdot g(a)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a+h)[g(a+h) - g(a)] + g(a)[f(a+h) - f(a)]}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + g(a) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= f(a)g'(a) + g(a)f'(a).
\end{aligned}$$

(iii) Para probar la fórmula de la derivada de un cociente probaremos primero que:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{(g(a))^2} \cdot g'(a).$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)} \right] \\
&= -\frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h)} \cdot \frac{1}{g(a)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= -\frac{1}{(g(a))^2} \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

Ahora, escribiendo  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$  aplicamos la fórmula del producto y se obtiene sin dificultad la fórmula buscada. ■

**Ejemplo 2.2.17** Si  $f(x) = \frac{1}{x}$  y  $g(x) = x^2$ , entonces:

1.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f+g)(x) &= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2} + 2x \\
&= \frac{2x^3 - 1}{x^2}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) &= x^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x^2) \\ &= x^2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} 2x \\ &= 1. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{f}{g} \right) &= \frac{x^2 \left( -\frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{x} 2x}{x^4} \\ &= -\frac{3}{x^4} \\ &= -3x^{-4}. \end{aligned}$$

**Corolario 2.2.18** (i) Si  $f(x) = cg(x)$ , entonces  $f'(x) = cg'(x)$ , donde  $c$  es una constante.

(ii) Si  $f(x) = x^n$ , entonces  $f'(x) = nx^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(iii) Si  $f(x) = x^{-n}$ , entonces  $f'(x) = -nx^{-n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración:** Por ser aplicaciones directas del teorema 2.2.16 se deja como ejercicio. ■

**Ejemplo 2.2.19** 1.  $\frac{d}{dx}(x^{100}) = 100x^{99}$ .

2.  $\frac{d}{dx}(x^{-100}) = -100x^{-101}$ .

3.  $\frac{d}{dx}(x^7 + 9x^6 - 7x^3 + 10) = 7x^6 + 54x^5 - 21x^2$ .

4.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1} \right) &= \frac{(3x^2 + 2)(x^2 - 1) - (x^3 + 2x) 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 5x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

**Teorema 2.2.20** Si  $f(x) = x^{\frac{1}{q}}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ . Entonces  $f'(x) = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1}$ .

**Demostración:**  $f(x) = x^{\frac{1}{q}}, f(x+h) = (x+h)^{\frac{1}{q}}, \frac{\Delta f}{h} = \frac{(x+h)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{h}$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{h}$$

Para calcular este límite debemos racionalizar el numerador”, usando la fórmula de factorización:

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}).$$

Tomando  $a = (x+h)^{\frac{1}{q}}, b = x^{\frac{1}{q}}, m = q$ , amplifcamos por:

$$a^{q-1} + a^{q-2}b + \dots + ab^{q-2} + b^{q-1},$$

y nos queda que:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{h} &= \frac{(x+h)^{\frac{1}{q}} - x^{\frac{1}{q}}}{h} \cdot \frac{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \dots + x^{\frac{q-1}{q}}}{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \dots + x^{\frac{q-1}{q}}} \\ &= \frac{[(x+h) - x]}{h} \cdot \frac{1}{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \dots + x^{\frac{q-1}{q}}} \\ &= \frac{1}{(x+h)^{\frac{q-1}{q}} + (x+h)^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \dots + x^{\frac{q-1}{q}}} \end{aligned}$$

Entonces, cuando  $h \rightarrow 0$ , se tiene que,

$$\frac{\Delta f}{h} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{q-1}{q}} + x^{\frac{q-2}{q}} x^{\frac{1}{q}} + \dots + x^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{qx^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q} - 1} \blacksquare$$

**Ejemplo 2.2.21**  $\frac{d}{dx} \left( x^{\frac{1}{100}} \right) = \frac{1}{100} x^{\frac{1}{100} - 1} = \frac{1}{100} x^{-\frac{99}{100}}$ .

**Regla de la cadena.** La regla de la cadena es la fórmula que permite derivar funciones compuestas y es uno de los teoremas más importantes del cálculo. Para poder demostrarlo necesitaremos algunos resultados intermedios.

**Teorema 2.2.22** Si  $f$  tiene derivada en el punto  $x = a$ , entonces

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + G(h),$$

donde  $G$  es una función tal que  $G \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

**Demostración:** Por hipótesis existe el número  $f'(a)$ , por tanto, si  $h \neq 0$  podemos definir la función:

$$G(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

Es inmediato de la definición de derivada que

$$G(h) \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0,$$

y además cumple con la propiedad del enunciado. ■

**Corolario 2.2.23** (i) La función  $G$  definida en el teorema anterior se puede extender para  $h = 0$  definiéndola como  $G(0) = 0$  y además resulta continua en este punto.

(ii)  $\Delta f(x) = [f'(x) + G(h)]h$  o equivalentemente,  $\Delta f(x) = [f'(x) + G(\Delta x)]\Delta x$ .

**Teorema 2.2.24 Regla de la cadena** Sean  $f, g, u$  funciones tales que  $f(x) = g(u(x))$ ,  $g$  y  $u$  derivables. Entonces,  $f$  es derivable y  $f'(x) = g'(u(x))u'(x)$ .

**Demostración:** Como  $f(x) = g(u(x))$  y

$$\begin{aligned} f(x+h) &= g(u(x+h)) \\ &= g(u(x+h) + u(x) - u(x)) \\ &= g(u + \Delta u)(x). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Delta f(x) = g(u + \Delta u)(x) - f(x) = g(u + \Delta u) - g(u(x)).$$

Por corolario 2.2.23, podemos escribir:

$$\Delta f = [g'(u) + G(\Delta u)]\Delta u.$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta f}{h} = [g'(u) + G(\Delta u)] \cdot \frac{\Delta u}{h}.$$

En virtud del teorema 2.2.22  $G(\Delta u) \rightarrow 0$  cuando  $\Delta u \rightarrow 0$  y por definición de derivada  $\frac{\Delta u}{h} \rightarrow u'(x)$  cuando  $h \rightarrow 0$ , tenemos que:

$$\frac{\Delta f}{h} \rightarrow g'(u(x))u'(x) \text{ cuando } h \rightarrow 0. \blacksquare$$

**Corolario 2.2.25** (i) Si  $f(x) = x^r$  con  $r \in \mathbb{Q}$ , entonces  $f'(x) = rx^{r-1}$ .

(ii) Si  $f(x) = [u(x)]^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f'(x) = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$ .

**Ejemplo 2.2.26** 1.  $\frac{d}{dx} \left( x^{\frac{7}{8}} \right) = \frac{7}{8} \left( x^{\frac{7}{8}-1} \right) = \frac{7}{8} x^{-\frac{1}{8}}$ .

2.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sqrt{3x^2 - 5x + 2} &= \frac{d}{dx} (3x^2 - 5x + 2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (3x^2 - 5x + 2)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dx} (3x^2 - 5x + 2) \\ &= \frac{1}{2} (3x^2 - 5x + 2)^{-\frac{1}{2}} (6x - 5) \\ &= \frac{(6x - 5)}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}}. \end{aligned}$$

### 2.2.3. Las derivadas de las funciones trigonométricas

**Teorema 2.2.27** (i) Si  $f(x) = \text{sen } x$ , entonces  $f'(x) = \text{cos } x$ .

(ii) Si  $f(x) = \text{cos } x$ , entonces  $f'(x) = -\text{sen } x$ .

(iii) Si  $f(x) = \text{tan } x$ , entonces  $f'(x) = \text{sec}^2 x$ .

(iv) Si  $f(x) = \text{cotan } x$ , entonces  $f'(x) = -\text{cosec}^2 x$ .

(v) Si  $f(x) = \text{sec } x$ , entonces  $f'(x) = \text{sec } x \text{tan } x$ .

(vi) Si  $f(x) = \text{cosec } x$ , entonces  $f'(x) = -\text{cosec } x \text{cotan } x$ .

#### Demostración:

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \cdot \text{sen } \frac{h}{2} \cdot \cos \left( x + \frac{h}{2} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{h}{2} \right) \\ &= \text{cos } x. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{h} \cdot \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cdot \operatorname{sen} \left( x + \frac{h}{2} \right) \\
 &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen} \left( x + \frac{h}{2} \right) \\
 &= - \operatorname{sen} x.
 \end{aligned}$$

(iii) Usando la definición de la función  $\tan x$  y la fórmula para derivar cuocientes, tenemos:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \frac{1}{\cos^2 x} \left( \cos x \cdot \frac{d \operatorname{sen} x}{dx} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{d \cos x}{dx} \right) \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x}.
 \end{aligned}$$

Las partes (iv), (v) y (vi) se hacen de manera análoga y se dejan como ejercicios. ■

#### 2.2.4. Las derivadas de orden superior

La derivada de una función en un punto, como ya hemos visto, es una medida de la inclinación de la recta tangente en el punto considerado. Ahora necesitamos medir cuán **separado** está el gráfico de la función de su recta tangente. Por ejemplo, las tangencias de las curvas  $y = x^2$ ,  $y = x^3$  o  $y = x^4$  con la recta  $y = 0$  son muy diferentes. Lo que realmente queremos medir es cómo se **curva** el gráfico de  $f$  en una vecindad del punto de tangencia.

**Definición 2.2.28** (i) Diremos que una función  $f$  es dos veces derivable en un punto  $a$  si  $f'$  tiene derivada en  $a$ . A este número lo llamaremos **segunda derivada de  $f$  en  $a$**  y lo denotaremos  $f''(a)$ . Es decir,

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}. \quad (2.6)$$

(ii) Diremos que la función  $f$  es dos veces diferenciable en  $I \subset \mathbb{R}$ , si  $f$  es dos veces derivable en todo punto de  $I$ .

Otras notaciones usadas son:

$$f''(a) = \frac{d^2 f}{dx^2}(a) = \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=a}.$$

- (iii) Análogamente podemos definir para  $n \geq 2$ , la **derivada de orden  $n$  en el punto  $a$**  como la derivada de  $f^{(n-1)}$  en el punto  $a$ . Las notaciones usadas para este caso son:

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a) = \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=a}.$$

**Ejemplo 2.2.29** Si  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , entonces  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\operatorname{sen} x$ ,  $f^{(3)}(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$ , etc.

En general,  $f^{(4n+1)}(x) = \cos x$ ;  $f^{(4n+2)}(x) = -\operatorname{sen} x$ ,  $f^{(4n+3)}(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4n+4)}(x) = \operatorname{sen} x$ ,  $f^{(4n)}(x) = \operatorname{sen} x$ ,  $n \neq 0$ .

**Definición 2.2.30** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es continua diremos que es de clase  $C^{(0)}$  en  $(a, b)$ ; si  $f'$  es continua diremos que  $f$  es de clase  $C^{(1)}$  en  $(a, b)$ ; en general, diremos que  $f$  es de clase  $C^{(n)}$  en  $(a, b)$  si  $f^{(n)} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

**Ejemplo 2.2.31** Sea  $f(x) = x^k \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ . Entonces, si

- $k = 0$ ,  $f$  es discontinua en 0.
- $k = 1$ ,  $f$  es de clase  $C^{(0)}$ , pero no es diferenciable en 0.
- $k = 2$ ,  $f$  es diferenciable, pero no de clase  $C^{(1)}$ .

### 2.2.5. Ejercicios resueltos

1. Dada la función  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ :
  - a) Usando la definición, calcule  $\frac{df}{dx}(x)$ .
  - b) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(1, 6)$ .
  - c) Encuentre la ecuación de la recta normal al gráfico de  $f$  en el punto  $(1, 6)$ .
  - d) ¿Existe otro punto sobre la curva  $f$  donde su tangente sea paralela a la tangente en  $(1, 6)$ ?

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{((x+h)^2 + 3(x+h) + 2) - (x^2 + 3x + 2)}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h + 2 - x^2 - 3x - 2}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + 3 + h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + 3 + h) \\
 &= 2x + 3.
 \end{aligned}$$

b) Si  $x = 1$ , entonces  $f'(1) = 2x + 3|_{x=1} = 5$ . Esto nos dice que la recta tangente en el punto  $(1, 6)$  tiene pendiente 5 y por tanto su ecuación es:

$$\begin{aligned}
 y &= 5(x - 1) + 6 \\
 y &= 5x + 1.
 \end{aligned}$$

c) La pendiente de la recta normal en el punto  $(1, 6)$  es  $-\frac{1}{5}$  y su ecuación es :

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{1}{5}(x - 1) + 6 \\
 5y &= 31 - x.
 \end{aligned}$$

d) Para que una recta sea paralela a la tangente en el punto  $(1, 6)$ , su pendiente debe ser 5. Sea  $(z, f(z))$  un punto sobre la curva donde la tangente tiene pendiente 5, entonces se debe tener:

$$f'(z) = 2z + 3 = 5.$$

Lo que implica  $z = 1$ . Por tanto, no existe sobre la curva otro punto en el cual la recta tangente tenga pendiente 5.

2. Dada la función  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ :

- Usando la definición calcule  $\frac{df}{dx}(x)$ .
- Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(1, 3)$ .
- Encuentre la ecuación de la recta normal al gráfico de  $f$  en el punto  $(1, 3)$ .
- ¿Existe otro punto sobre la curva  $f$  donde su tangente sea paralela a la tangente en  $(1, 3)$  ?

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{((x+h)^3 + 3(x+h)^2 - 1) - (x^3 + 3x^2 - 1)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3 + 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - x^3 - 3x^2 + 1}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3xh + h^2 + 3h + 3x^2 + 6x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3xh + h^2 + 3h + 3x^2 + 6x) \\ &= 3x^2 + 6x. \end{aligned}$$

b) Cuando  $x = 1, f'(1) = 3x^2 + 6x|_{x=1} = 9$ . Lo que nos dice que la recta tangente en el punto  $(1, 3)$  tiene pendiente 9 y por tanto su ecuación es:

$$\begin{aligned} y &= 9(x - 1) + 3 \\ y &= 9x - 6. \end{aligned}$$

c) La recta normal en el punto  $(1, 3)$  tiene ecuación:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{9}(x - 1) + 3 \\ 9y &= 28 - x. \end{aligned}$$

d) Sea  $(z, f(z))$  un punto sobre la curva donde la tangente tiene pendiente 9, entonces se debe tener que  $f'(z) = 9$ . Es decir,

$$\begin{aligned} 3z^2 + 6z &= 9 \\ 3z^2 + 6z - 9 &= 0 \\ z^2 + 2z - 3 &= 0 \\ (z - 1)(z + 3) &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación que tiene dos soluciones  $z = 1$  y  $z = -3$ . Por tanto en el punto  $(-3, f(-3)) = (-3, -1)$  la recta tangente es paralela a la recta tangente en  $(1, 3)$ .

3. Se dice que dos curvas son tangentes en un punto  $P$  si ellas se intersectan en  $P$  y sus rectas tangentes en  $P$  son iguales. Considere la función  $h(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$ . Demuestre que los gráficos de  $h(x)$  y  $f(x) = \pm \frac{1}{x}$  son tangentes en todos los puntos de contacto.

**Solución:**

Supongamos  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Entonces  $x_0$  es un punto de contacto entre los gráficos si y sólo si  $f(x_0) = h(x_0)$ , es decir,  $\frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0} \sin x_0$ , lo que implica  $\sin x_0 = 1$ , por tanto,  $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ .

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{4}{(4k+1)^2\pi^2} \text{ y por otro lado,}$$

$h'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} \sin x_0 + \frac{1}{x_0} \cos x_0 = -\frac{4}{(4k+1)^2\pi^2}$ . Se procede de modo análogo para la función  $f(x) = -\frac{1}{x}$ , en que los puntos de intersección son  $x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ .

4. Dada la función polinomial de grado 3

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

encuentre  $a, b, c, d$ , de modo que se satisfagan las siguientes condiciones:

- La curva pasa por  $(0, 0)$ .
- En  $(0, 0)$  la recta tangente forma un ángulo de 60 grados con la parte positiva del eje  $X$ .
- En  $x = 1$  y  $x = -1$  la curva es paralela al eje  $X$ .

**Solución:** Si la curva pasa por el punto  $(0, 0)$ , entonces  $y(0) = 0$  lo cual implica que  $d = 0$ . Si la pendiente de la recta tangente en el origen es  $\tan \frac{\pi}{3}$ , entonces tenemos la ecuación:  $y'(0) = \sqrt{3}$ . Como  $y'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ , tenemos que  $y'(0) = c = \sqrt{3}$ . Que la curva sea paralela al eje  $X$  en un punto, quiere decir que en ese punto su recta tangente es paralela al eje  $X$ , lo que a su vez implica que en ese punto su derivada es nula. Por tanto, tenemos dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} y'(1) &= 3a + 2b + c \\ y'(-1) &= 3a - 2b + c \end{aligned}$$

La resolución de este sistema nos da los valores de  $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  y  $b = 0$ .

Así, tenemos que el polinomio que satisface las condiciones pedidas es:

$$y(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^3 + \sqrt{3}x.$$

5. Calcule la derivada de la función  $\text{sen } x^\circ$  expresada en grados.

**Solución:**

Como  $x^\circ$  no es un número real, debemos expresar la función  $\text{sen}$  en radianes antes de derivarla,  $\text{sen } x^\circ = \text{sen } \frac{\pi x}{180}$ . Por tanto tenemos la función  $f(x) = \text{sen } \frac{\pi x}{180}$ , la cual se deriva usando la regla de la cadena con función  $u(x) = \frac{\pi x}{180}$ , obteniéndose que

$$f'(x) = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180}.$$

6. Derive las siguientes funciones usando las fórmulas de derivación:

a)  $(x+1)^2(x-3)^5$

b)  $\sqrt{x^2+1}$

c)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

d)  $\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}}$

e)  $x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

f)  $(8x-3)^{\frac{8}{9}}$

g)  $\frac{1}{(4x-1)^5}$

h)  $\text{sen}(4x-3)$

i)  $\cos(4x-3)^2$

j)  $x^2 \tan \frac{1}{x}$

**Solución:**

a) Si  $f(x) = (x+1)^2(x-3)^5$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)(x-3)^5 + (x+1)^2 5(x-3)^4 \\ &= (x+1)(x-3)^4(2(x-3) + 5(x+1)) \\ &= (x+1)(7x-1)(x-3)^4 \end{aligned}$$

b) Si  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

c) Si  $f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}}$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{x-5}{x+5} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{x-5}{x+5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x-5}{x+5} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{10}{(x+5)^2} \\ &= \frac{5}{(x+5)^{\frac{3}{2}}(x-5)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

d) Si  $f(x) = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{2} \left( \frac{a-x}{a+x} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \left( \frac{a-x}{a+x} \right) + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \\ &= x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \left[ \frac{-a}{(a+x)^2} \right] + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \\ &= \frac{-ax}{(a+x)^2} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \end{aligned}$$

e) Si  $f(x) = (8x-3)^{\frac{8}{9}}$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{8}{9} (8x-3)^{-\frac{1}{9}} \cdot 8 \\ &= \frac{64}{9(8x-3)^{\frac{1}{9}}} \end{aligned}$$

f) Si  $f(x) = \frac{1}{(4x-1)^5}$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5 \left( \frac{1}{4x-1} \right)^4 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{4x-1} \right) \\ &= -\frac{20}{(4x-1)^6}. \end{aligned}$$

g) Si  $f(x) = \text{sen}(4x-3)$ , entonces  $f'(x) = 4 \cos(4x-3)$ .

h) Si  $f(x) = \cos(4x-3)^2$ , entonces  $f'(x) = -8(4x-3) \text{sen}(4x-3)^2$ .

i) Si  $f(x) = x^2 \tan \frac{1}{x}$ , entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \tan \frac{1}{x} + x^2 \frac{d}{dx} \left( \tan \frac{1}{x} \right) \\ &= 2x \tan \frac{1}{x} + x^2 \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \\ &= 2x \tan \frac{1}{x} - \sec^2 \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

7. Determine los puntos donde la derivada de las siguientes funciones no existe.

a)  $|\operatorname{sen} x|$

b)  $\sqrt[3]{\cos x}$

c)  $\left| \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right|$

d)  $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

**Solución:**

a) Aplicando la regla de la cadena y el ejemplo 2.2.2, parte 5, sabemos que  $|\operatorname{sen} x|$  es derivable en todos los puntos en que  $\operatorname{sen} x \neq 0$ , es decir, la derivada no existe en los múltiplos pares de  $\frac{\pi}{2}$ .

b) La regla de la cadena y el ejemplo 2.2.2, parte 6, nos dicen que el único punto en que la derivada no existe es para aquellos valores que anulan el coseno. Es decir, si  $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ .

c) es fácil ver que esta función es derivable en cada punto de su dominio  $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ .

d) En la sección 1.5, hemos dicho que esta función es discontinua en todos sus puntos, por tanto no puede ser derivable en ningún punto.

8. Pruebe que si  $f(x)$  es una función polinomial de grado  $n$ , entonces:

a)  $f^{(n)}(x)$  es una constante independiente de  $x$ .

b)  $f^{(n+1)}(x) = 0$ , para todo  $x$ .

**Solución:** Si  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , con  $a_n \neq 0$ , entonces  $f'(x)$  es a lo más un polinomio de grado  $n - 1$ . En efecto,

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1,$$

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \dots + a_2.$$

Podemos observar que en cada etapa de derivación va desapareciendo el término constante, por tanto, al derivar  $n$  veces nos queda:

$$f^{(n)}(x) = n!a_n.$$

Esta función ya no depende de  $x$  y por consiguiente su derivada, o la derivada de orden  $(n+1)$  del polinomio inicial, es la función constante 0.

9. Calcule:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} \right).$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left( x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} \right) &= \frac{d}{dx} \left( x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \\ &= x^3 \frac{d^4 y}{dx^4} + 3x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + 6x \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} \\ &= x^3 \frac{d^4 y}{dx^4} + 6x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + 6x \frac{d^2 y}{dx^2}. \end{aligned}$$

10. Demuestre que si  $y = 3 \cos 2x + \sin 2x$ , entonces  $y'' + 4y = 0$ .

**Solución:**

$$y' = -6 \sin 2x + 2 \cos 2x, \text{ entonces } y'' = -12 \cos 2x - 4 \sin 2x = -4y.$$

### 2.2.6. Ejercicios propuestos

1. Dada la función  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ :

- Usando la definición, calcule  $\frac{df}{dx}(x)$ .
- Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(-1, 1)$ .
- Encuentre la ecuación de la recta normal al gráfico de  $f$  en el punto  $(-1, 1)$ .
- ¿Existe otro punto sobre la curva  $f$  donde su tangente sea paralela a la tangente en  $(-1, 1)$ ?

2. Usando la definición de derivada, analice la existencia de la derivada en el origen para las funciones:

- a)  $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$   
 b)  $y = \cos \sqrt{x}$
3. Derive las siguientes funciones usando las fórmulas de derivadas:
- a)  $\frac{3x^5 - 4x^3 + 2x - 6}{x^2 - 3x + 9}$ .  
 b)  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .  
 c)  $\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ .  
 d)  $\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$ .  
 e)  $\operatorname{sen}(4x^4 + 3x^2 - 6)$ .  
 f)  $\sqrt{\frac{6}{\operatorname{sen} x \cos 5x}}$ .  
 g)  $\cos \tan(x^2 - 5x + 1)$ .  
 h)  $\tan(x^2 + 1)^\circ$ , la función está expresada en grados.
4. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes y normales a la curva  $y(x)$  en el punto  $(x_0, y_0)$ .
- a)  $y(x) = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ ;  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .
5. Encuentre los puntos de tangencia entre las curvas:
- a)  $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$ .  
 b)  $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  y  $g(x) = -\frac{1}{x}$ .
6. Dada la función  $y_n(x) = x^n$ :
- a) Grafique en un mismo diagrama  $y_2$ ,  $y_3$  e  $y_4$ .  
 b) Calcule  $y'_n(x)$ .  
 c) La tangente en el punto  $(1, 1)$  a la curva  $y_n$  corta al eje de las abscisas en  $(z, 0)$ , calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(z)$ .  
 d) ¿ Para qué punto  $(x_n, y_n)$  de la curva  $y_n$  su tangente es paralela a la secante que pasa por  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  ?

- e) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .
7. Determine una función polinomial de grado seis de modo que en los puntos  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$  la tangente sea horizontal y que además pase por el origen.
8. Dada la función  $y(x) = x \sqrt[n]{\cos x}$ , calcule:  $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0)$ .
9. Dada una parábola  $y = ax^2 + bx + c$ .
- a) ¿Desde qué puntos se puede trazar dos tangentes a la curva?
- b) ¿Desde qué puntos puede trazarse solamente una tangente a la curva?
- c) ¿Desde qué puntos no se puede trazar ninguna tangente a la curva?
10. Dada la función:
- $$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2},$$
- con  $a_1 \neq 0$  y  $a_2 \neq 0$ .
- a) ¿En qué puntos la función  $f$  no es derivable? (ver ejercicios resueltos de la sección 3.4).
- b) ¿En qué puntos la función  $f$  tiene tangente paralela al eje  $X$ ?
11. Sea  $k \in \mathbb{N}$  y  $f(x) = |x|^k$ . Demuestre que  $f(x)$  es de clase  $C^{(n)}$  si  $n < k$ , pero  $f(x)$  no es clase  $C^{(n)}$  si  $n > k$ . ¿Qué sucede para  $n = k$ ?

## 2.3. Propiedades de las funciones derivables

### 2.3.1. Teoremas principales

Según el teorema 1.5.18 de la sección 1.5, las funciones continuas cuyo dominio es un intervalo cerrado y acotado tienen la importante propiedad de alcanzar sus valores máximo y mínimo. Pero este teorema es de aquellos llamados de **existencia**, pues asegura la existencia de puntos donde la función alcanza sus valores extremos, pero no nos dice cómo encontrar tales puntos. Para determinar estos importantes puntos y obtener mayor información sobre el comportamiento de la función podemos usar ciertas propiedades de la derivada, como veremos en los siguientes teoremas.

**Teorema 2.3.1** Supongamos que  $f$  es continua en un intervalo  $I$  y alcanza su máximo (mínimo) valor en un punto  $x_0$  en el interior del intervalo  $I$ . Si  $f'(x_0)$  existe, entonces  $f'(x_0) = 0$ .

**Demostración:** Si  $f$  tiene un máximo en  $x_0$  entonces,

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0), \text{ para todo } h \text{ tal que } x_0 + h \in I.$$

Por tanto,  $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ .

Así, si  $h > 0$  tenemos que  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$ , y en consecuencia,

$$f'(x_0) \leq 0 \tag{2.7}$$

Si  $h < 0$  tenemos que  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ , y en consecuencia,

$$f'(x_0) \geq 0. \tag{2.8}$$

De las desigualdades 2.7 y 2.8 tenemos que  $f'(x_0) = 0$ .

La demostración para el caso que en  $x_0$  hay un mínimo es similar y se deja como ejercicio. ■

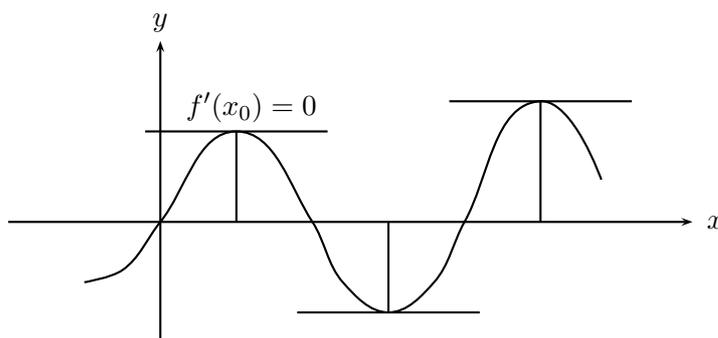


Figura 2.3.1

**Observación 2.3.2** 1. Es interesante darse cuenta de la importancia que  $x_0$  sea un punto interior del intervalo, pues si no lo fuera, no podríamos tomar  $h < 0$  y  $h > 0$  en la demostración del teorema 2.3.1.

2. Si el máximo o mínimo se alcanza en un punto frontera del intervalo, entonces la derivada en ese punto no necesariamente se anula. Por ejemplo,  $f(x) = x^2$  en  $[1, 2]$  alcanza su máximo  $f(2) = 4$  en  $x = 2$  pero,  $f'(2) = 4 \neq 0$ .
3. Podemos usar el teorema 2.3.1 para encontrar candidatos a máximos y/o mínimos interiores. Por ejemplo si  $f(x) = x^3 - x$ . Entonces  $f'(x) = 3x^2 - 1$ , luego  $f'(x) = 0$  si y sólo si  $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ . Estos puntos son los candidatos a máximos y mínimos.
4. Si  $f'(x_0) = 0$  no necesariamente  $x_0$  es un máximo o un mínimo. Por ejemplo,  $f(x) = x^3$ ,  $f'(0) = 0$ , pero 0 no es máximo ni mínimo.
5. Una función continua puede alcanzar su máximo o mínimo y puede que no tenga derivada en el punto. Por ejemplo, la función  $f(x) = |x|$  tiene un mínimo en  $x = 0$ , pero  $f'(0)$  no existe.

### Teorema 2.3.3 Teorema de Rolle

Supongamos que  $f$  es una función continua en  $[a, b]$  y que  $f'(x)$  existe para todo  $x \in (a, b)$ . Si  $f(a) = f(b)$ , entonces existe al menos un punto  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $f'(x_0) = 0$ .

**Demostración:** Analizaremos las tres posibilidades siguientes:

1. Si  $f(x) = f(a)$  para todo  $x \in (a, b)$ . Entonces, por ser  $f$  constante, su derivada  $f'$  es nula sobre  $(a, b)$ , por lo que el teorema se cumple trivialmente.
2. Si  $f(x) > f(a)$  para algún  $x \in (a, b)$ . Por teorema 1.5.18 existe  $x_0 \in (a, b)$  donde  $f$  alcanza valor máximo. En virtud del teorema 2.3.1,  $f'(x_0) = 0$ .
3. Si  $f(x) < f(a)$  para algún  $x \in (a, b)$ . Entonces, existe  $x_0 \in (a, b)$  donde  $f$  alcanza su valor mínimo. Por teorema 2.3.1,  $f'(x_0) = 0$ . ■

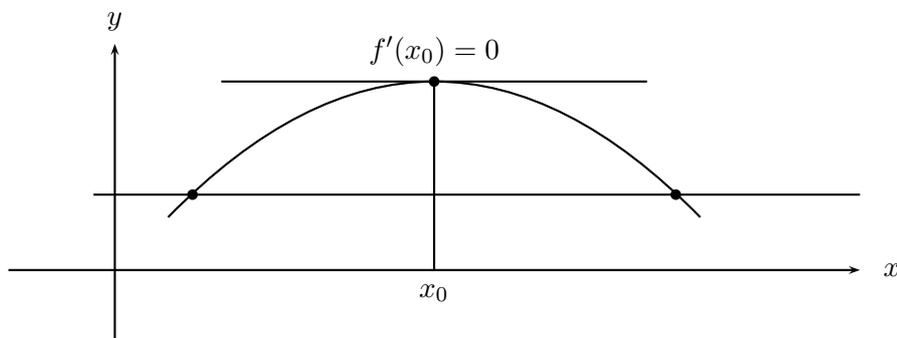


Figura 2.3.2: Teorema de Rolle.

**Observación 2.3.4** El teorema de Rolle puede ser interpretado geoméricamente diciendo que: si una función continua y derivable cruza dos veces una recta paralela al eje  $X$ , entonces existe entre los dos cruces consecutivos un punto donde la tangente al gráfico es paralela al eje  $X$ .

### Teorema 2.3.5 Teorema del valor medio de Lagrange

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y derivable en  $(a, b)$ . Entonces, existe un punto  $x_0 \in (a, b)$  tal que :

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.9)$$

**Demostración:** Definamos una nueva función  $F$  mediante la relación:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Esta función es continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y además cumple que  $F(a) = F(b)$ . Por tanto, podemos aplicar el teorema de Rolle y obtener la existencia de un punto  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $F'(x_0) = 0$ . Calculando  $F'$  tenemos que existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $F'(x_0) = 0$ . Es decir, existe  $x_0 \in (a, b)$  tal que la ecuación 2.9 se satisface. ■

### Observación 2.3.6 1. Interpretación física del teorema del valor medio.

Interpretando la variable  $x$  como el tiempo  $t$  y  $f(t)$  como la posición de un objeto en el instante  $t$ , podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Es posible que la velocidad del objeto alcance en algún momento su valor promedio? En realidad la respuesta no es obvia, salvo que apliquemos el teorema del valor medio y en ese caso la respuesta es afirmativa. Existe un instante  $t_0$  en que la velocidad instantánea  $f'(t)$  es igual a la velocidad promedio  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  en el intervalo de tiempo  $[a, b]$ .

## 2. Interpretación geométrica del teorema del valor medio.

El primer miembro de la ecuación 2.9 puede ser interpretado como la pendiente de la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $x_0$ ; el segundo miembro puede ser visto como la pendiente de la recta secante al gráfico de  $f$  que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ . Como la ecuación 2.9 dice que ambas pendientes son iguales, quiere decir que existe un punto  $(x_0, f(x_0))$  donde la recta tangente y la recta secante son paralelas.

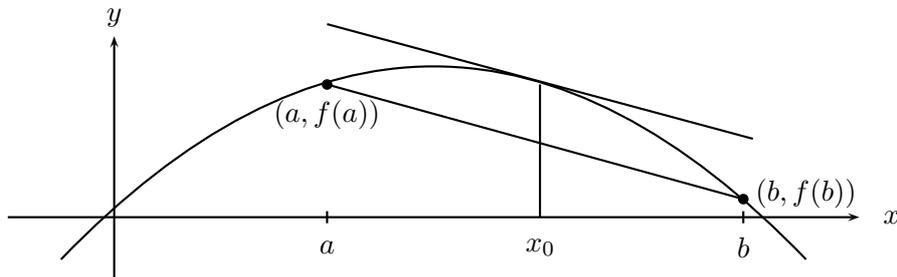


Figura 2.3.3: Interpretación geométrica del teorema del valor medio.

### Teorema 2.3.7 Teorema del valor medio para dos funciones o Teorema del valor medio de Cauchy.

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones derivables cuyas derivadas no se anulan simultáneamente en el intervalo  $[a, b]$  y si  $g(a)$  no es igual a  $g(b)$ , entonces existe un número  $c \in (a, b)$  para el cual

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (2.10)$$

#### Demostración:

Si definimos la función

$$h(x) = f(a) - f(x) + [g(x) - g(a)] \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

vemos que ella satisface las hipótesis del teorema de Rolle:

- $h(a) = h(b) = 0$ .
- $h'(x) = -f'(x) + g'(x) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .

Por tanto, existe un  $c \in (a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$ , lo que es equivalente a decir que  $c$  satisface la ecuación (2.10). ■

**Observación 2.3.8** Este teorema tiene una importante aplicación en la llamada **regla de L'Hôpital** que sirve para calcular límites de formas indeterminadas, como veremos en la próxima sección de aplicaciones.

**Teorema 2.3.9** Si  $f$  es una función tal que  $f'(x)$  es positiva para cada  $x$  perteneciente a un intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f$  es estrictamente creciente en  $(a, b)$ .

**Demostración:** Dados  $x_1$  y  $x_2$  en  $(a, b)$  tal que  $x_1 < x_2$ , podemos aplicar el teorema del valor medio a la función  $f$  en el intervalo  $[x_1, x_2]$ .

Así, existe un punto  $x_0 \in (x_1, x_2)$  tal que :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) \text{ ,con } x_0 \in (x_1, x_2).$$

Como  $x_1 < x_2$  implica que  $x_2 - x_1 > 0$  y por hipótesis  $f'(x_0) > 0$ , tenemos que  $f(x_2) - f(x_1) > 0$  y entonces,  $f(x_2) > f(x_1)$ . Lo que nos dice que  $f$  es creciente. ■

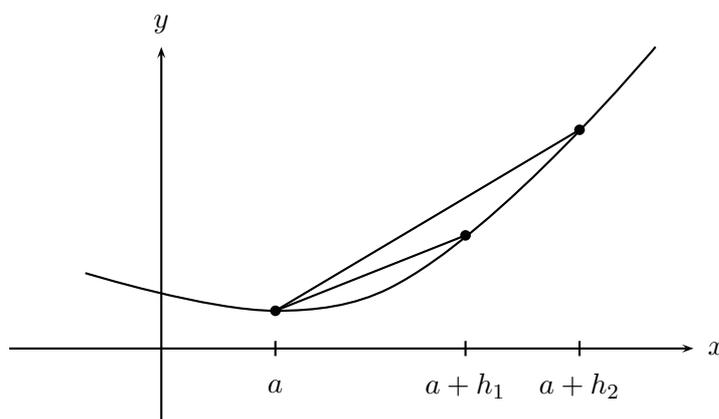


Figura 2.3.4: Función con derivada positiva.

**Corolario 2.3.10** Si  $f$  es una función tal que  $f'(x)$  es negativa para cada  $x$  perteneciente a un intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f$  es estrictamente decreciente en  $(a, b)$ .

**Demostración:**  $f'(x) < 0$  implica que  $-f'(x) > 0$ . Aplicando el teorema 2.3.9 a  $-f$  obtenemos que  $-f$  es estrictamente creciente y por consiguiente  $f$  es estrictamente decreciente. ■

**Teorema 2.3.11** Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $[a, b]$ .

- (i) Si  $f$  es estrictamente creciente en algún intervalo  $(a, x_0)$  y es estrictamente decreciente en algún intervalo  $(x_0, b)$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $x_0$ .

- (ii) Si  $f$  es estrictamente decreciente en algún intervalo  $(a, x_0)$  y es estrictamente creciente en algún intervalo  $(x_0, b)$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $x_0$ .

**Demostración:** Es consecuencia directa de la definición de máximo y de mínimo relativo. ■

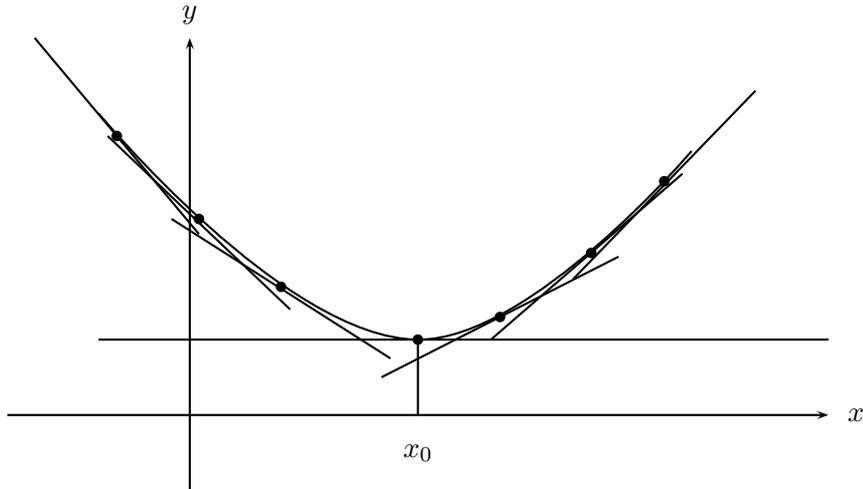


Figura 2.3.5: Mínimo de una función.

**Corolario 2.3.12 Criterio de la primera derivada para detectar máximos y mínimos**

Sea  $f$  una función derivable en un intervalo  $[a, b]$  tal que  $f'$  es continua en  $[a, b]$ .

- (i) Si  $f'$  es positiva en algún intervalo  $(a, x_0)$  y es negativa en algún intervalo  $(x_0, b)$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $x_0$ .
- (ii) Si  $f'$  es negativa en algún intervalo  $(a, x_0)$  y es positiva en algún intervalo  $(x_0, b)$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $x_0$ .

**Demostración:** Es consecuencia directa de los teoremas 2.3.9, 2.3.11 y 2.3.10. ■

**Definición 2.3.13** Llamaremos **punto crítico** de una función  $f$  derivable a  $x$  tal que  $f'(x) = 0$ .

**Ejemplo 2.3.14** 1. Todo punto donde una función derivable alcanza máximos y mínimos relativos o locales, son puntos críticos.

2. Existen puntos críticos que no son máximos ni mínimos, como por ejemplo  $x = 0$  para la función  $y = x^3$ .

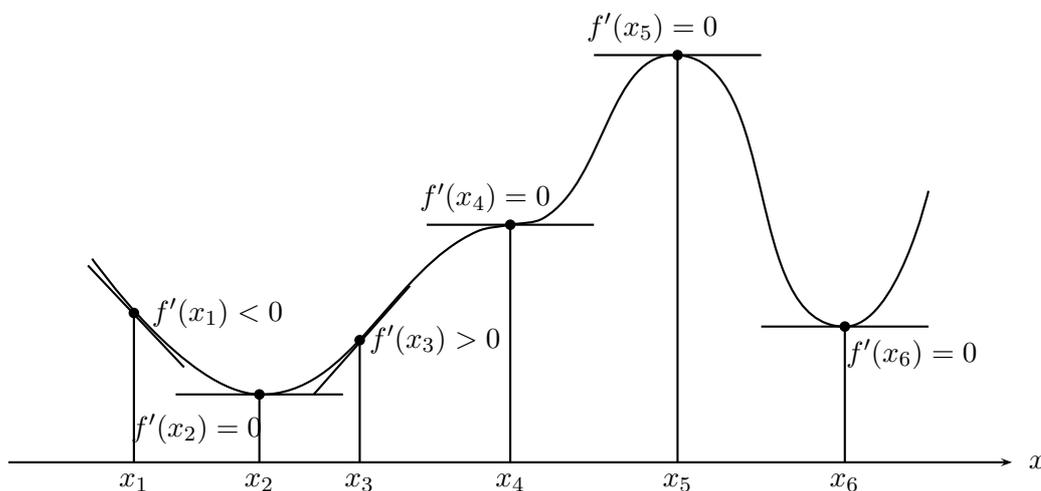


Figura 2.3.6: Significado geométrico del signo de la derivada.

**Definición 2.3.15** Diremos que una función es **convexa o cóncava hacia arriba** sobre un intervalo  $I$  si su gráfico queda sobre el gráfico de su recta tangente en cada punto de  $I$ . Si su gráfico queda bajo el de su recta tangente, diremos que la función es **cóncava o cóncava hacia abajo** en  $I$ .

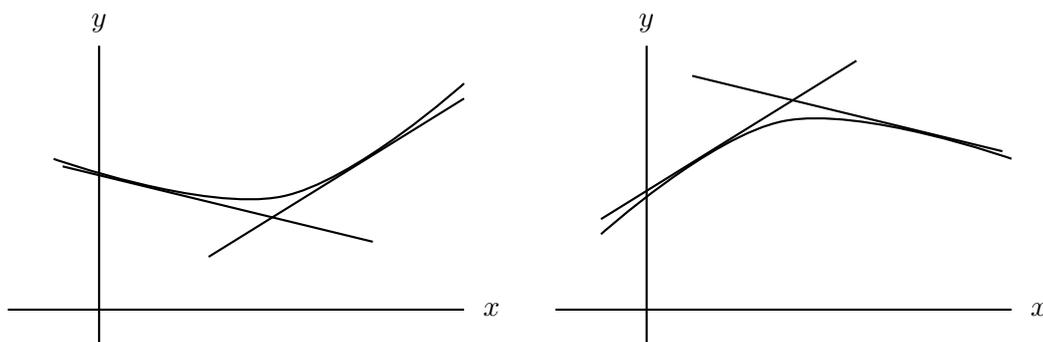


Figura 2.3.7: Funciones convexas (a) y funciones cóncavas (b).

**Teorema 2.3.16** Sea  $f$  una función dos veces derivable en un intervalo  $I$ .

(i) Si  $f''(x) > 0$  para todo  $x$  interior a  $I$ , entonces  $f$  es convexa en  $I$ .

(ii) Si  $f''(x) < 0$  para todo  $x$  interior a  $I$ , entonces  $f$  es cóncava en  $I$ .

**Demostración:** Sea  $x_0$  un punto interior de  $I$ . La ecuación de la recta tangente al gráfico de  $f$  en  $x_0$  tiene ecuación:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Para demostrar que  $f$  es convexa, debemos probar que para todo  $x \in I$ ,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.11)$$

Si  $x = x_0$ , entonces la desigualdad 2.11 se cumple trivialmente. Si  $x \neq x_0$ . Llamemos  $x_1$  al valor de  $x$ , entonces podemos aplicar el teorema del valor medio a  $f$  en el intervalo  $(x_0, x_1)$  ó  $(x_1, x_0)$  según sea el caso, obteniendo la existencia de un punto  $\bar{x}$  entre  $x_0$  y  $x_1$ , de modo que:

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad (2.12)$$

Si en particular  $x_1 > x_0$ , despejando  $f(x_1)$  en la ecuación 2.12, tenemos que

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(\bar{x})(x_1 - x_0). \quad (2.13)$$

$f'$  es una función estrictamente creciente en  $I$  debido a la hipótesis que  $f''$  es positiva. Por tanto,  $f'(\bar{x}) > f'(x_0)$ , lo que implica:

$$f'(\bar{x})(x_1 - x_0) > f'(x_0)(x_1 - x_0). \quad (2.14)$$

Usando 2.14 en 2.13, obtenemos la desigualdad 2.11 con  $x = x_1$ . Por consiguiente,  $f$  es convexa.

La demostración de (ii) se hace análogamente. ■

**Corolario 2.3.17 Criterio de la segunda derivada para detectar máximos y mínimos.**

Sea  $f$  una función con segunda derivada continua y sea  $x_0$  un punto crítico de  $f$ .

(i) Si  $f''(x_0) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $x_0$ .

(ii) Si  $f''(x_0) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $x_0$ .

(iii) Si  $f''(x_0) = 0$ , entonces no hay información.

**Ejemplo 2.3.18** Sea  $f(x) : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que  $x \mapsto \sin x(1 + \cos x)$ .

Para encontrar los posibles a máximos y mínimos debemos resolver la ecuación  $f'(x) = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \cos x(1 + \cos x) + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos x(1 + \cos x) - \sin^2 x \\ &= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \frac{df}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0$$

$$(2\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \quad \text{ó} \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Así tenemos que } (x = \pi) \quad \text{ó} \quad \left(x = \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{ó} \quad \left(x = \frac{5\pi}{3}\right)$$

Para analizar la naturaleza de los puntos críticos encontrados, usaremos el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\sin x + 4\cos x \cdot -\sin x = -\sin x(1 + 4\cos x)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=\frac{\pi}{3}} = f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\sin \frac{\pi}{3}(1 + 4\cos \frac{\pi}{3}) \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{3}(1 + 4 \cdot \frac{1}{2}) < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en  $x = \frac{\pi}{3}$  la función tiene un máximo relativo.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=\frac{5\pi}{3}} = f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= -\sin \left(\frac{5\pi}{3}\right) \cdot \left(1 + 4\cos \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3} \cdot \left(1 + \frac{4}{2}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en  $x = \frac{5\pi}{3}$  la función tiene un mínimo relativo.  
El máximo se localiza en el punto

$$\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

y el mínimo se localiza en el punto

$$\left(\frac{5\pi}{3}, f\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=\pi} = f''(\pi) = 0 \cdot (1 + 4 \cos \pi) = 0.$$

En este caso no tenemos información.

**Definición 2.3.19** Diremos que en  $x_0$  hay un **punto de inflexión** de la función  $f$  si  $f''(x_0) = 0$  y además hay cambio de concavidad en él.

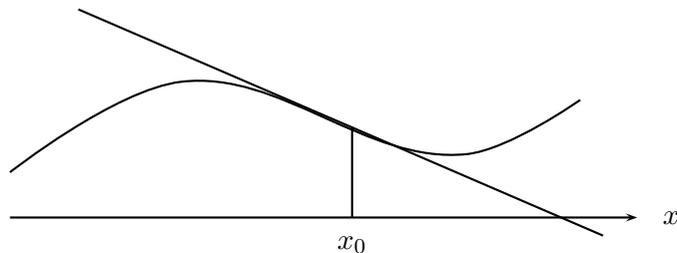


Figura 2.3.8: Puntos de inflexión.

**Ejemplo 2.3.20** Considerando la misma función del ejemplo 2.3.18, tenemos que

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x(1 + 4 \cos x).$$

Los posibles puntos de inflexión se encuentran resolviendo la ecuación  $f''(x) = 0$ .

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x(1 - 4 \cos x) = 0 \Leftrightarrow .$$

$$\begin{aligned} (-\operatorname{sen} x = 0) & \quad \acute{o} \quad (1 + 4 \cos x = 0) \\ (\operatorname{sen} x = 0) & \quad \acute{o} \quad \left(\cos x = -\frac{1}{4}\right) \\ (x = 0) & \quad \acute{o} \quad (x = \pi) \acute{o} \quad x = \cos\left(-\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Analizaremos el caso  $x = 0$ . Como  $f''$  es continua, ella no cambia de signo entre ceros consecutivos. Considerando el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2)$  que contiene un único cero de  $f''$ ,  $x = 0$ , para saber si hay cambio de signo de  $f''$  en  $x = 0$ , evaluamos  $f''$  en  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Entonces, en  $x = 0$  se anula la segunda derivada y  $f''$  cambia de signo, por lo tanto, en  $x = 0$  la función  $f$  tiene un punto de inflexión.

**Ejemplo 2.3.21** La función  $\varphi(x) = x^4$  no tiene un punto de inflexión en  $x = 0$ , a pesar de tener  $\varphi''(0) = 0$ , pues no hay cambio de concavidad en 0.

### Teorema 2.3.22 Teorema de la función inversa

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable sobre  $[a, b]$  tal que  $f'(x) \neq 0$  y es continua para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces,  $f^{-1}$  existe y es diferenciable sobre el recorrido de  $f$  y se tiene la siguiente fórmula:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{para todo } x \in [a, b]. \quad (2.15)$$

**Demostración:** Como  $f'$  es continua y distinta de cero, ella no cambia de signo; por tanto  $f$  es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. En particular, es inyectiva.

Por otro lado, tenemos que  $f$  es continua en  $[a, b]$ ; aplicando el corolario 1.5.20 el recorrido de  $f$  es un intervalo del tipo  $[m, M]$ .

Por consiguiente, existe  $f^{-1} : [m, M] \rightarrow [a, b]$ .

Calculemos su derivada en un punto cualquiera de su dominio. Sea  $y_0 \in [m, M]$  y  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = y_0$ . Como

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 (f^{-1})'(f(x_0)) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\
 &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\
 &= \frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Observación 2.3.23** La ecuación 2.15 puede escribirse como :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \quad (2.16)$$

O mejor aún, usando como siempre el símbolo  $x$  como la variable independiente:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (2.17)$$

Otra alternativa de escritura es usando la notación de Leibniz escribiendo  $y$  en vez de  $f(x)$  y  $\frac{dy}{dx}$  en vez de  $f'(x)$ ,  $x$  en vez de  $f^{-1}(y)$  y  $\frac{dx}{dy}$  en vez de  $(f^{-1})'(y)$ . Entonces, la ecuación 2.16 queda en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}. \quad (2.18)$$

**Ejemplo 2.3.24** 1. Sea  $f(x) = x^2$ ,  $x \geq 0$ , por tanto

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}.$$

Es decir,  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ , entonces  $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{2x}$  o bien  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ , o bien  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

2. Sea  $f(x) = \sqrt{1 - x^{-1}}$ ,  $x \in \mathbb{R} - [0, 1)$ , por lo tanto

$$y = \sqrt{1 - x^{-1}} \implies x = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Como  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^{-1}}} \cdot \frac{1}{x^2}$ , entonces

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1-y^2}\right)^{-1}}} \cdot \left(\frac{1}{1-y^2}\right)^2} = \frac{2y}{(1-y^2)^2}.$$

### 2.3.2. Derivadas de las inversas de las funciones trigonométricas

La obtención de las fórmulas para las derivadas de las funciones inversas de las funciones trigonométricas es una aplicación del teorema de la función inversa.

#### 1. La función arcoseno

$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  es la función inversa de  $\operatorname{sen} x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  como hemos visto en el ejemplo 1.5.24 de la sección 1.5. Ahora, en virtud del teorema de la función inversa demostraremos que es derivable y calcularemos su derivada.

Como la derivada de  $\operatorname{sen} x$  es la función  $\cos x$ , que es distinta de cero en  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , podemos aplicar el teorema de la función inversa, que nos asegura la existencia de la derivada y nos dice cómo calcularla:

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \iff x = \operatorname{sen} y$$

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{dx} &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

La raíz tiene el signo + porque  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

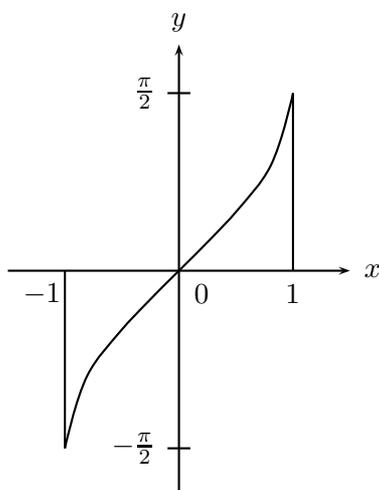


Figura 2.3.9: Gráfico de  $f(x) = \arcsen x$ .

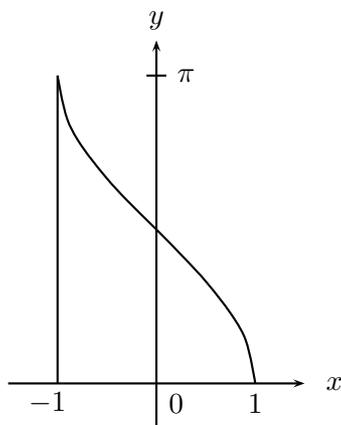
## 2. La función arcocoseno

$y = \arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  es la función inversa de  $\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ , tal que

$$y = \arccos x \iff x = \cos x.$$

Nuevamente se satisfacen las hipótesis del teorema de la función inversa y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d \arccos x}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{sen} y} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Figura 2.3.10: Gráfico de  $f(x) = \arccos x$ .

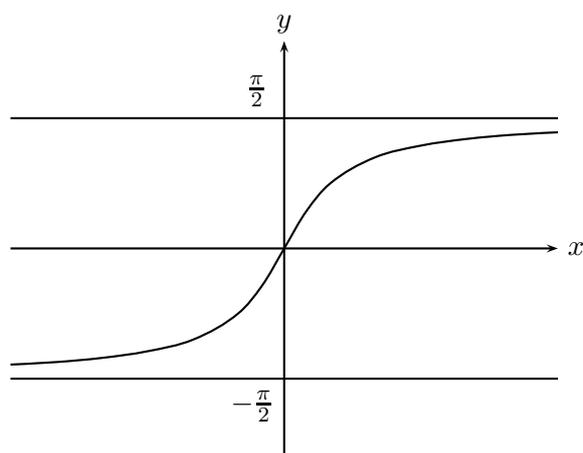
### 3. La función arcotangente

$y = \arctan x : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  es la función inversa de  $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir,

$$y = \arctan x \iff x = \tan y.$$

En virtud del teorema de la función inversa, tenemos:

$$\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Figura 2.3.11: Gráfico de  $f(x) = \arctan x$ .

#### 4. La función arcocotangente

$y = \operatorname{arctan} x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$  es la función inversa de  $\cotan x : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$y = \operatorname{arccotan} x \iff x = \cotan x.$$

Aplicando el teorema de la función inversa, tenemos:

$$\frac{d \operatorname{arccotan} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

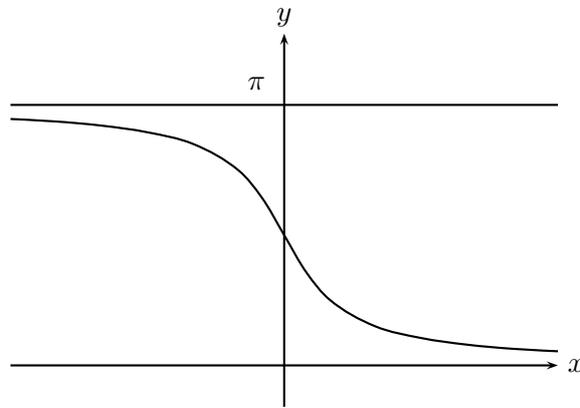


Figura 2.3.12: Gráfico de  $f(x) = \operatorname{arccotan} x$ .

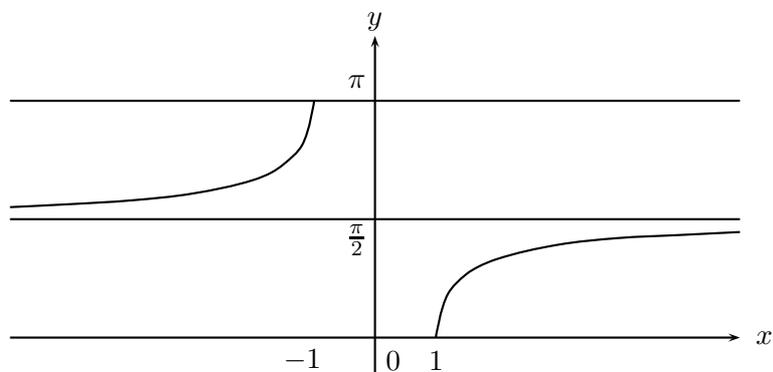
#### 5. La función arcosecante

$y = \operatorname{arcsec} x : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$  es la función inversa de  $\sec x : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ , tal que

$$y = \operatorname{arcsec} x \iff x = \sec y.$$

Aplicando el teorema de la función inversa, tenemos:

$$\frac{d \operatorname{arcsec} x}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Figura 2.3.13: Gráfico de  $f(x) = \operatorname{arcsec} x$ .

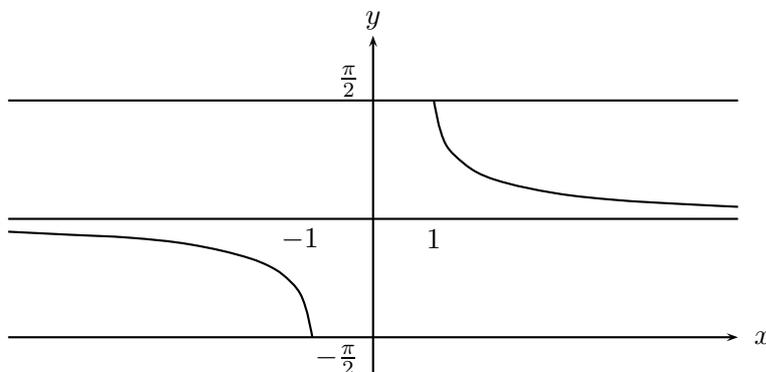
#### 6. La función arcocosecante

$y = \operatorname{arccosec} x : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$  es la función inversa de  $\operatorname{cosec} x : [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ , tal que

$$y = \operatorname{arccosec} x \iff x = \operatorname{cosec} y.$$

Aplicando el teorema de la función inversa, tenemos:

$$\frac{d \operatorname{arccosec} x}{dx} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Figura 2.3.14: Gráfico de  $f(x) = \operatorname{arccosec} x$ .

### 2.3.3. Ejercicios resueltos

1. a) Pruebe que si  $f(x)$  es una función continua en un intervalo  $I$  de modo que  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in I$ . Entonces,  $f(x)$  es constante en  $I$ .
- b) Demuestre que si dos funciones tienen derivadas iguales, entonces ellas difieren en una constante.

**Solución:**

- a) Sean  $x_1, x_2$  dos valores cualesquiera en el intervalo  $I$ , aplicando el teorema 2.3.5 (teorema del valor medio) en  $[x_1, x_2]$ , tenemos que existe un  $c \in [x_1, x_2]$  tal que :

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(c).$$

Como  $f'(c) = 0$ , obtenemos que  $x_2 = x_1$ , para todo  $x_1, x_2 \in I$ . Por tanto, podemos concluir que  $f$  es constante en  $I$ .

- b) Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones tales que  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x$  en algún intervalo  $I$ . Si definimos la función  $h(x) = f(x) - g(x)$ , entonces  $h'(x) = 0$  para todo  $x \in I$ . Por la parte recién demostrada podemos concluir que  $h(x)$  es constante en  $I$ ; por tanto, las funciones  $f$  y  $g$  difieren en una constante.

2. Encuentre máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función racional:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

**Solución:**

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Entonces,

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0.$$

Por tanto, los candidatos a máximos y mínimos son:  $x = \pm 1$ . Para saber que son realmente cada uno de estos puntos, calcularemos la segunda derivada de  $f$ :

$$f''(x) = \frac{2x^5 - 4x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^4}.$$

Podemos observar que el signo de  $f''$  lo determina su numerador, pues el denominador es siempre positivo.

Un cálculo directo nos da  $f''(1) < 0$  y  $f''(-1) > 0$ . Por tanto, en  $x = 1$  la función tiene un máximo y en  $x = -1$  tiene un mínimo.

Veamos ahora los puntos de inflexión.

$$f''(x) = 0 \iff 2x(x^4 - 2x^2 - 3) = 0.$$

La resolución de esta ecuación de quinto grado nos da:  $x = 0$  o  $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ . Resolviendo la ecuación de cuarto grado como una ecuación de segundo grado en  $x^2$ , obtenemos:  $x^2 = 3$  y  $x^2 = -1$ . Como la última ecuación no tiene soluciones reales, tenemos que como candidatos a puntos de inflexión tenemos:  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{3}$  y  $x = -\sqrt{3}$ . Para saber cuáles de estos puntos son puntos de inflexión y considerando que  $f''$  es continua, basta calcular  $f''$  en un valor menor y en un valor mayor que el candidato a punto de inflexión para saber si ella cambia de signo:

- Para  $x = 0$ . Nos sirven los valores ya calculados de  $f''$  en  $\pm 1$ , lo que nos dice que ella cambia de signo en  $x = 0$ , por tanto es punto de inflexión.
- Eligiendo  $1 \in (0, \sqrt{3})$  y  $2 \in (\sqrt{3}, \infty)$ , vemos que  $f''(1) < 0$  y  $f''(2) > 0$ . Por tanto  $x = \sqrt{3}$  es otro punto de inflexión de  $f$ .
- Eligiendo  $-2 \in (-\infty, -\sqrt{3})$  y  $-1 \in (-\sqrt{3}, 0)$ , vemos que  $f''(-2) < 0$  y  $f''(-1) > 0$ . Por tanto,  $x = -\sqrt{3}$  es un punto de inflexión de  $f$ .

3. Encuentre máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función racional:

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

**Solución:**

Procediendo de manera análoga al ejercicio anterior, obtenemos que la función  $g$  tiene un mínimo en  $(0, 0)$  y puntos de inflexión en  $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{4})$ .

4. Demuestre que la ecuación  $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$  tiene sólo dos soluciones:

**Solución:**

Sea  $f(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x - x^2$ . Entonces  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(-\pi) = -1 - \pi^2 < 0$  y  $f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$ , por tanto,  $f(x)$  tiene al menos dos ceros. Por otro lado,  $f'(x) = x \cos x - 2x$  se anula en  $x = 0$  y  $\cos x = 2$  (lo que no puede ser), por lo tanto el único punto crítico es  $x = 0$  y como  $f''(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x - 2$  se tiene  $f''(0) = -1 < 0$ . Luego  $f$  en  $x = 0$  tiene un máximo, lo que implica que  $f(x)$  tiene sólo dos ceros. Porque si tuviera un tercer cero, como la función es continua, tendría, según el teorema de Rolle, otro punto donde se anula la derivada.

5. Demuestre que las sinusoides  $\varphi(x) = a \operatorname{sen} \omega x + b \cos \omega x$  y  $\phi(x) = a \cos \omega x - b \operatorname{sen} \omega x$  tienen ceros alternados.

**Solución:**

Como  $\varphi'(x) = \omega \phi(x)$ , entonces si  $x_1 < x_2$  son ceros consecutivos de  $\varphi(x)$ , es decir,  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$  y  $\varphi(x) \neq 0$ ,  $x_1 < x < x_2$ . Entonces, en virtud del teorema de Rolle, existe  $x_0$  tal que  $x_1 < x_0 < x_2$  y cumple que  $\varphi'(x_0) = \phi(x_0) = 0$ . Como ambas sinusoides tienen el mismo período, estos ceros son alternados.

Este método puede aplicarse en forma más general. Si  $g(x) = f'(x)$ , entonces entre dos ceros de  $f(x)$  existe al menos un cero de  $g(x)$ .

6. Compruebe que la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

satisface  $f'(0) = 1 > 0$ , sin embargo esta función no es creciente en ninguna vecindad de 0. ¿Contradice esta función el teorema 2.3.9 ?

**Solución:** Observemos que:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h} \left[ h + 2h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} \right] \rightarrow 1 \text{ cuando } h \rightarrow 0.$$

Lo cual dice que  $f'(0) = 1$ . Por otra parte,  $f$  es derivable en cualquier intervalo de la forma  $(0, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , con  $f'$  dada por:

$$f'(x) = 1 + 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}.$$

Si consideramos la sucesión  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$  que converge a 0, tenemos  $f'(x_n) = 1 - 2 < 0$ . Si  $f$  fuese creciente en alguna vecindad de cero tendríamos  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in (0, \varepsilon)$ , luego  $f$  no es creciente cerca del cero. Esto no contradice el teorema 2.3.9, pues  $f'$  no es continua en cero, y por lo tanto el ser positiva en  $x = 0$ , no da ninguna información cerca del 0.

7. Calcular aproximadamente  $\sqrt{304}$ .

**Solución:**

Sea  $f(x) = \sqrt{x}$ . Para aplicar el teorema del valor medio busquemos una raíz exacta menor y más cercana a 304. Sean  $a = 289$  y  $b = 304$ , entonces tenemos:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{304} - 17}{15},$$

para algún  $x_0$  en  $(289, 304)$ .

Como  $f(x) = \sqrt{x}$  es una función creciente, se tiene:

$$17 < \sqrt{x_0} < \sqrt{304},$$

acotando tenemos:

$$17 < \sqrt{x_0} < \sqrt{304} < \sqrt{324} = 18.$$

Luego,

$$\frac{15}{2 \cdot 18} < \sqrt{304} - 17 < \frac{15}{2 \cdot 17},$$

así

$$17,416 < \sqrt{304} < 17,441$$

Lo que es una aproximación bastante razonable, si no se tiene calculadora.

8. Usando el teorema del valor medio, demuestre las siguientes desigualdades:

- a)  $-x \leq \sin x \leq x$ , para todo  $x \geq 0$ .  
 b) Si  $\alpha > 1$ , entonces  $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ , para todo  $x > -1$ . Esta es la desigualdad de Bernoulli que está demostrada en un caso particular, cuando  $\alpha \in \mathbb{N}$ , en el desarrollo del ejemplo 1.2.34 de la sección 1.2.

**Solución:**

- a) Sea  $f(x) = \sin x$ . Apliquemos el teorema del valor medio con  $a = 0$ ,  $b = x$ . Así obtenemos:

$$\frac{\sin x - 0}{x} = \cos x_0$$

pero,  $-1 \leq \cos x_0 \leq 1$ . Luego,  $-x \leq \sin x \leq x$  para  $x \geq 0$ .

b) Sea  $f(x) = (1+x)^\alpha$  con  $\alpha > 1$ .

Si  $x > 0$ , aplicamos el teorema del valor intermedio en  $[0, x]$ , obtenemos:

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha(1+x_0)^{\alpha-1} \quad 0 < x_0 < x.$$

Como  $x_0 > 0$  y  $\alpha - 1 > 0$ , entonces  $(1+x_0)^{\alpha-1} > 1$ , lo que implica que

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x.$$

Si  $-1 < x < 0$  el teorema del valor medio se aplica en  $[x, 0]$  y obtenemos el mismo resultado.

Si  $x = 0$  obtenemos la igualdad.

9. Si

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

demuestre que la ecuación  $P_n(x) = 0$  no tiene raíces reales cuando  $n$  es par y tiene exactamente una raíz cuando  $n$  es impar.

**Solución:**

Para demostrar este ejercicio usaremos inducción.

Si  $n = 1$ , entonces  $P_1(x) = 1 + x$  y la ecuación  $P_1(x) = 0$  tiene exactamente una raíz. Por tanto, en este caso se verifica la afirmación.

Supongamos que la propiedad vale para  $n$  y demostremos su validez para  $n + 1$ .

- Si  $n$  es par, por hipótesis de inducción  $P_n(x)$  no tiene raíces reales.

Sea  $P_{n+1}(x) = 0$ ; como  $P'_{n+1}(x) = P_n(x)$ , entonces  $P'_{n+1}$  no se anula y, por tanto, la función  $P_{n+1}(x)$  es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Pero,  $n + 1$  es impar, así cuando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $P_{n+1}$  toma valores negativos y toma valores positivos cuando  $x \rightarrow +\infty$ . Por ser función continua  $P_{n+1}$  debe cruzar el eje  $X$ , es decir, existe una raíz real de  $P_{n+1}$ .

Veamos ahora que no puede tener más de una raíz. Si tuviera una segunda raíz podríamos aplicar el teorema de Rolle, obteniendo que existe un punto donde su derivada se anula, pero su derivada es  $P_n(x)$  que no tiene raíces según nuestra hipótesis. En síntesis, sólo existe una única raíz para  $P_{n+1}(x)$ .

- Supongamos  $n$  es impar, por hipótesis de inducción  $P_n(x)$  tiene exactamente una raíz real  $r$ ,  $r \neq 0$ .

Debemos demostrar que  $P_{n+1}(x)$  no tiene raíces. Como  $P'_{n+1}(x) = P_n(x)$ , entonces  $P'_{n+1}(r) = 0$ . Por lo cual  $r$  es el único posible punto de máximo o mínimo.

Por ser  $(n+1)$  par  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_{n+1}(x)$  es positivo, lo que a su vez nos dice que  $r$  es un mínimo.

Por otro lado,

$$P_{n+1}(r) = \left(1 + r + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \dots + \frac{r^n}{n!}\right) + \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Por ser  $(n+1)$  par  $P_{n+1}(r) > 0$ . Por tanto,  $P_{n+1}$  no se anula nunca.

### 2.3.4. Ejercicios propuestos

1. Pruebe que si  $f(x)$  es una función continua tal que  $f'(x) = 4$  para todo  $x$  en algún intervalo  $I$ , entonces  $f$  es de la forma  $f(x) = 4x + b$ , para alguna constante  $b$  y para todo  $x \in I$ .
2. La función  $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$  con  $0 \leq x \leq 2\pi$ , ha sido parcialmente estudiada en el ejemplo 2.3.18. Demuestre que en su dominio ella tiene tres puntos de inflexión. Encuéntrelos y haga el gráfico de  $f$ .
3. Demuestre que para  $x \geq 0$  y  $0 < \alpha < 1$  se tiene

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha).$$

Sugerencia: Aplique el teorema del valor medio a  $f(x) = \alpha x - x^\alpha$ .

Deduzca que  $a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$  si  $a, b$  son números positivos.

4. Encuentre los puntos críticos y de inflexión de las siguientes funciones:

- a)  $y = x - \frac{x^3}{3!}$ .
- b)  $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ .
- c)  $y = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$ .
- d)  $y = \frac{2}{\cos x}$ .
- e)  $y = \tan x \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ .

5. Demuestre que  $f(x) = x^2 \ln x$  satisface la ecuación diferencial  $2f(x) - xf'(x) + x^2 = 0$ .

6. Sea  $p(x)$  un polinomio. El número  $x_0$  se dice una raíz de multiplicidad  $m$  si

$$p(x) = (x - x_0)^m q(x),$$

con  $q(x) \neq 0$ . Demuestre:

- a) Si tiene  $r$  raíces en  $[a, b]$ , entonces  $p'(x)$  tiene por lo menos  $r - 1$  raíces, y en general, la derivada de orden  $k$  de  $p(x)$ ,  $p^{(k)}(x)$  tiene por lo menos  $r - k$  raíces en  $[a, b]$ . (Las raíces se cuentan tantas veces como su multiplicidad).
- b) Si  $p^{(k)}(x)$  tiene exactamente  $r$  raíces en  $[a, b]$ , ¿qué puede decir del número de raíces de  $p(x)$  en  $[a, b]$  ?
7. Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reales y se define  $f(x)$  en  $\mathbb{R}$  por:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i - x)^2.$$

Encuentre el único punto de mínimo de  $f$ .

8. Suponga que  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones derivables en  $\mathbb{R}$  tal que  $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Pruebe que los ceros de estas funciones son alternados. Sugereencia: Suponga que la tesis es falsa y aplique el teorema de Rolle a  $\frac{f}{g}$  y a  $\frac{g}{f}$ .
9. Considere el polinomio cúbico  $p(x) = x^3 + px + q$  con  $p \geq 0$ . Demuestre que existe  $p^{-1}(x)$ , calcule  $(p^{-1})'(x)$  y encuentre una expresión explícita para esta inversa.
10. Demuestre que la derivada de una función impar es par.
11. Deduzca una fórmula para la derivada de  $\operatorname{arccotan} x$ ,  $\operatorname{arcsec} x$  y  $\operatorname{arccosec} x$ .

## 2.4. Aplicaciones I: La regla de L'Hôpital

El teorema del valor medio de Cauchy tiene una importante aplicación en un teorema que permite calcular límites de algunos tipos de formas indeterminadas, como por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ cuando } f(a) = g(a) = 0.$$

Este tipo de expresión suele llamarse **forma indeterminada del tipo  $\frac{0}{0}$** .

**Teorema 2.4.1** (i) Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones continuas en un intervalo  $I$  tal que  $f(a) = g(a) = 0$ ,  $f'(a)$ ,  $g'(a)$  existen y  $g'(a) \neq 0$ ,  $a \in I$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \quad (2.19)$$

(ii) Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones continuas y derivables en un intervalo  $I$  tal que  $f(a) = g(a) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (2.20)$$

**Demostración:**

(i) Como  $f(a) = g(a) = 0$ , tenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}, \quad x \neq a.$$

Si hacemos tender  $x \rightarrow a$  obtenemos la igualdad de (i).

(ii) Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy, teorema 2.3.7, sabemos que existe un  $c$  entre  $a$  y  $x$  tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Si  $x \rightarrow a$ , entonces  $c \rightarrow a$ , por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \blacksquare$$

**Ejemplo 2.4.2** 1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^2}{-2x} = \frac{3}{2}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^3}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(1-x)^2}{-3x^2} = \frac{0}{-3} = 0$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{6}$ . Observe que en este último caso aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital.

4.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cotan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} = -1$ .

**Observación 2.4.3** 1. La fórmula 2.20 vale cuando se toma límite a la derecha o a la izquierda de  $a$ .

2. Si  $f'(x)$  y  $g'(x)$  son continuas en el punto  $a$  y si  $g'(a) \neq 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

3. Si  $g'(a) = 0$ , pero  $f'(a) \neq 0$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

4. Si  $g'(a) = f'(a) = 0$ , entonces se debe aplicar nuevamente la regla a la función  $f'$  si se satisfacen las hipótesis, como hicimos en el ejemplo 2.4.2 parte 3.

5. La fórmula 2.20 vale también en el caso que  $a = \infty$  como veremos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.4** Si  $f$  y  $g$  son funciones derivables tales que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  y

si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (2.21)$$

**Demostración:** Haciendo  $x = \frac{1}{t}$  y definiendo las funciones  $F$  y  $G$  por las relaciones:

$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$  si  $t \neq 0$ ,  $F(0) = 0$ ,  $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$  si  $t \neq 0$ ,  $G(0) = 0$ , tenemos que:  $F$  y  $G$

son continuas para todo  $t \neq 0$ , por ser compuestas de funciones continuas. Además,  $F$  es continua a la derecha de 0, ya que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = F(0).$$

Por el mismo argumento,  $G$  también es continua a la derecha de 0. Usando la regla de la cadena:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{df\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right), \quad \text{si } t \neq 0.$$

Análogamente obtenemos que:

$$\frac{dG(t)}{dt} = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right), \quad \text{si } t \neq 0.$$

Por tanto, en virtud del teorema 2.4.1, podemos escribir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacksquare$$

**Ejemplo 2.4.5** El siguiente ejemplo muestra una forma del tipo  $\frac{0}{0}$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan x + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2 + 1}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.$$

**Formas indeterminadas del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ .** Estas consisten en expresiones de la forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{cuando} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Estas pueden reducirse a una expresión del tipo  $\frac{0}{0}$ , usando el siguiente recurso.

Definiendo  $F(x) = \frac{1}{f(x)}$  y  $G(x) = \frac{1}{g(x)}$ , tenemos que,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{G(x)}{F(x)},$$

y como además

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} G(x) = 0,$$

tenemos una forma del tipo  $\frac{0}{0}$ .

**Formas indeterminadas del tipo  $0 \cdot \infty$ .** Estas consisten en expresiones de la forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) \quad \text{cuando} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Definiendo  $G(x) = \frac{1}{g(x)}$ , estas pueden ser reducidas a una del tipo  $\frac{0}{0}$ .

**Ejemplo 2.4.6**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cotan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-1}{-\operatorname{cosec}^2 x} = 1.$

**Formas indeterminadas del tipo  $\infty - \infty$ .** Diremos que una forma indeterminada es del tipo  $\infty - \infty$  si tenemos  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$  cuando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ . Definiendo nuevamente  $F$  y  $G$  como los inversos multiplicativos de  $f$  y  $g$  respectivamente, podemos observar que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{G(x) - F(x)}{F(x) \cdot G(x)},$$

siendo el segundo miembro de la última igualdad una forma indeterminada del tipo  $\frac{0}{0}$ .

### Ejercicios resueltos

1. Calcular  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2}\right) + \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x + \cos x}$ .

**Solución:** La expresión:

$$\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2}\right) + \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x + \cos x}$$

evaluada en  $x = \pi$  da una forma indeterminada del tipo  $\frac{0}{0}$ . Aplicando regla de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}$$

Esta expresión también es una forma indeterminada del tipo  $\frac{0}{0}$ , por lo cual nuevamente debe aplicarse la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{4} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2}\right) - \cos x}{2 \cos 2x - \cos x} = \frac{-\frac{1}{4} + 1}{2 - (-1)} = \frac{1}{4}$$

2. Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cotan x - \frac{1}{x} \right)$ .

**Solución:** Este límite corresponde a una forma indeterminada del tipo  $\infty - \infty$ .

$$\cotan x - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sen x} - \frac{1}{x} = \frac{x \cos x - \sen x}{x \sen x},$$

esta última expresión es una forma del tipo  $\frac{0}{0}$  y aplicamos el teorema 2.4.1 obteniendo:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-x \sen x}{\sen x + x \cos x} = \frac{-x}{1 + \frac{x}{\sen x} \cos x}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cotan x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{1 + \frac{x}{\sen x} \cos x} = 0.$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - x^2 - 1}{(x^2 - 1)(x - 1)} = -\frac{1}{2}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sen x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sen x}{x \sen x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sen x + x \cos x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + \cos x - x \sen x} = 0$ .
5. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \tan x}$

**Solución:**

Evaluando  $\frac{1 - \cos^2 x}{x \tan x}$  en  $x = 0$ , se obtiene una forma indeterminada del tipo  $\frac{0}{0}$ , por lo cual se debe aplicar regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x (-\sen x)}{\tan x + x \sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sen x}{\tan x + x \sec^2 x}$$

Evaluando la última expresión se obtiene una forma  $\frac{0}{0}$ . Aplicando nuevamente la regla de L'Hôpital.:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sen^2 x + 2 \cos^2 x}{\sec^2 x + \sec^2 x + 2x \sec^2 x \tan x} = 1.$$

6. Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\pi - 2 \arctan \sqrt{x})$ .

**Solución:** El cálculo directo de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\pi - 2 \arctan \sqrt{x})$  conduce a una forma indeterminada de tipo  $0 \cdot +\infty$ .

Para aplicar la regla de L' Hôpital se debe transformar en una forma de tipo  $\frac{0}{0}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\pi - 2 \arctan \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\pi - 2 \arctan \sqrt{x})}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 2.$$

7. Calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \arcsen \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right))$ .

**Solución:** La evaluación directa de este límite da lugar a una forma indeterminada de tipo  $\infty \cdot 0$ , por lo tanto se debe transformar en una del tipo  $\frac{0}{0}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \pi - 2 \arcsen \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arcsen \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + 1}}} \cdot \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} \right)}{\frac{-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2. \end{aligned}$$

### Ejercicios propuestos

1. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1}$ .

2. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen 4x}{\sen 7x}$ .

3. Demuestre que la regla de L'Hôpital falla al intentar aplicarla para calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sen x}{x - \sen x} \cdot \frac{x}{\tan x - \sen x} = +\infty$ .

4. Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - 2ax + a}{bx^2 - 2bx + b} = \frac{a}{b}$ .

5. Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .
6. Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}$ .
7. Demuestre que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{\frac{1}{2}h^2} = f''(a)$ .
8. Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(2 \arctan x^2 - \pi) = -2$ .

## 2.5. Aplicaciones II: Gráficos de funciones

Todos los teoremas de la sección 2.3 encuentran directa o indirectamente aplicación en el análisis del comportamiento de funciones numéricas y en la construcción de sus gráficos.

De gran utilidad es conocer las asíntotas a una curva en una dirección cualquiera. En el capítulo de límites sólo podíamos definir las asíntotas paralelas a los ejes; ahora, con el concepto de derivada, podemos ampliar este concepto.

**Definición 2.5.1** Diremos que la recta  $y = ax + b$  es una **asíntota** de la curva  $y = f(x)$  si

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \quad \text{y} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax].$$

Podemos observar que la dirección de una asíntota es la dirección límite a la que tiende la dirección de la tangente a la curva en el punto  $(x, f(x))$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Para poder hacer un gráfico que refleje fielmente el comportamiento de una función  $f$ , seguiremos el siguiente esquema:

1. Determinar el dominio de la función.
2. Encontrar los ceros de la función.
3. Determinar el signo de  $f$ .
4. Encontrar los puntos críticos de  $f$ .
5. Determinar el signo de  $f'$ .
6. Encontrar los puntos que anulan  $f''$  y clasificación de los puntos críticos.
7. Determinar el signo de  $f''$ .
8. Analizar la existencia de asíntotas y cálculos de límites complementarios.
9. Bosquejar el gráfico de  $f$ .

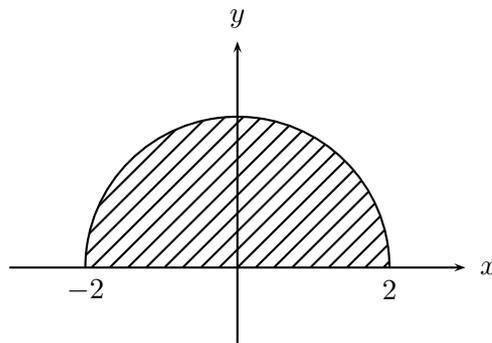
### Ejercicios resueltos

1. Analizar el comportamiento de  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ .

**Solución:**

- $f(x) \in \mathbb{R} \iff 4 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-2, 2] \iff D(f) = [-2, 2]$ .
- $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$ . Por tanto,  $f'(x) = 0 \iff x = 0$ .

- $f'(x) > 0$  si  $x < 0$  y  $f'(x) < 0$  si  $x > 0$ . Lo que nos dice que en  $x = 0$  la función alcanza su máximo valor  $f(0) = 2$ .
- $f''(x) = \frac{-4}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ , por lo cual ella es siempre negativa y la curva es cóncava.
- Su gráfico es la parte superior de una semicircunferencia con centro en el origen y radio dos, lo cual lo sabemos de la geometría analítica.

Figura 2.4.1: Gráfico de  $\sqrt{4-x^2}$ .

2. Analizar el comportamiento de  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ .

**Solución:**

Observando que esta función corresponde al inverso multiplicativo de la anterior podemos utilizar lo ya estudiado para hacer más rápido el análisis.

- $D(f) = [-2, 2]$ .
- La curva tiene dos asíntotas verticales  $x = 2$  y  $x = -2$  pues  $\lim_{x \rightarrow \pm 2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \infty$ .  
El punto de máximo de la función anterior es en este caso un mínimo que toma el valor  $f(0) = \frac{1}{2}$ .

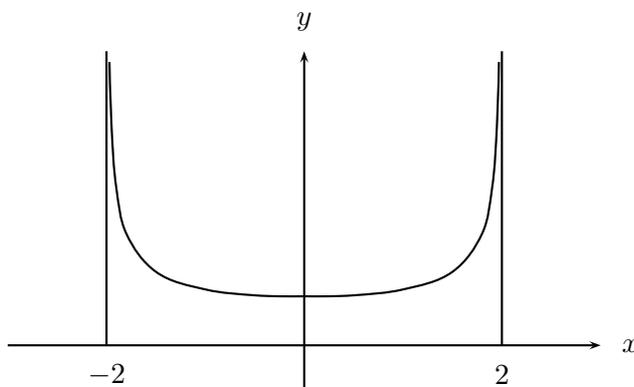


Figura 2.4.2: Gráfico de  $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ .

3. Analizar el comportamiento de la función parcialmente estudiada en los ejercicios de la sección 2.3:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

**Solución:**

- Como el denominador no se anula para ningún  $x$ , el dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}$ .

- 

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Por tanto, en  $x = 0$  el gráfico corta al eje  $X$ .

- 

$$f(x) > 0 \iff x > 0.$$

Por tanto  $f$  es positiva para valores positivos de  $x$  y es negativa para valores negativos de  $x$ . Por tanto, el gráfico se ubica en el primer y tercer cuadrante.

- Los puntos críticos fueron calculados en el ejercicio de la sección 2.3 y tenemos que:

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1.$$

- Como  $f'$  es continua, para conocer su signo basta calcular su valor en un punto de cada intervalo :  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, +\infty)$ . Tenemos que:  $f'(-2) = f'(2) < 0$ ,  $f'(0) = 1 > 0$ .

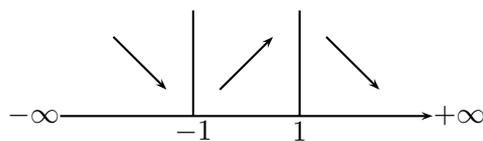


Figura 2.4.3: Crecimiento de la curva.

- En  $(-1, -\frac{1}{2})$  la función tiene un mínimo. En  $(1, \frac{1}{2})$  la función tiene un máximo.

■

$$f''(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3} \text{ ó } x = 0.$$

- Nuevamente usando la continuidad de  $f''$  para conocer su signo, basta calcular su valor en un punto de cada intervalo:  $(-\infty, -\sqrt{3})$ ,  $(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $(0, \sqrt{3})$ ,  $(\sqrt{3}, \infty)$ :  $f''(-2) < 0$ ,  $f''(-1) > 0$ ,  $f''(1) < 0$ ,  $f''(2) > 0$ .

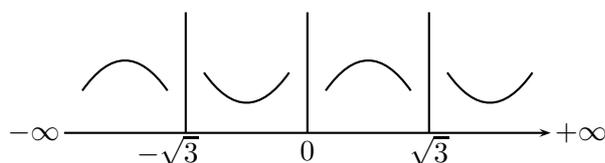
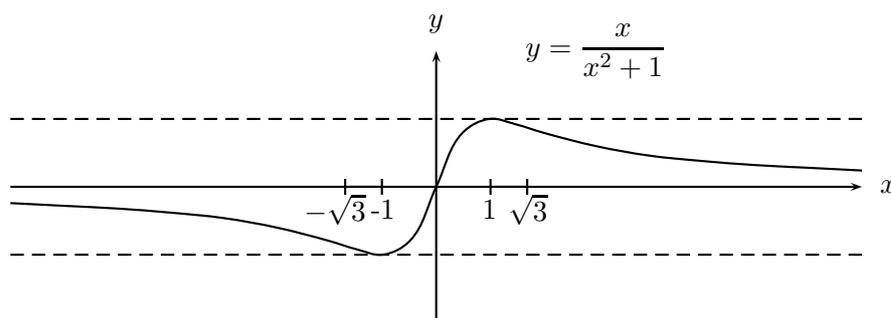


Figura 2.4.4: Concavidad de la curva.

- Por no haber indeterminaciones en el denominador no hay asíntotas verticales.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$ . Por tanto, la recta  $y = 0$  es una asíntota horizontal.

Figura 2.4.5: Gráfico de  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

4. Analizar el comportamiento de  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ .

**Solución:**

- Dominio de  $f = \mathbb{R}$ .
- La función tiene un cero en  $x = 0$ .
- $f$  es siempre positiva.
- Tiene un mínimo en  $(0, 0)$ .
- Sus puntos de inflexión son :  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4})$ .
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ , por tanto, la recta  $y = 1$  es una asíntota horizontal de  $f$ .
- Su gráfico es:

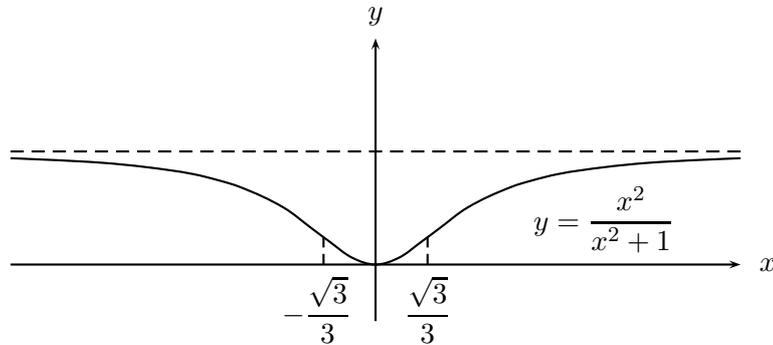


Figura 2.4.6: Gráfico de  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ .

5. Analice el comportamiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 15}.$$

Determinando:

- a) El dominio de  $f$ .
- b) Las asíntotas verticales.
- c) Los ceros y el signo de  $f$ .
- d) El crecimiento de  $f$  y sus máximos y mínimos.
- e) Las asíntotas horizontales.
- f) La concavidad y puntos de inflexión de  $f$ .

**Solución:**

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 15} = \frac{1}{(x-3)(x+5)}$$

- a) Dominio de  $f = \mathbb{R} - \{3, -5\}$   
 b) Para analizar la existencia de asíntotas verticales se debe calcular :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x).$$

En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)(x+5)} = \left(\frac{1}{8}\right) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)} = \frac{1}{8}(-\infty) = -\infty.$$

Haciendo cálculos similares se obtiene que:

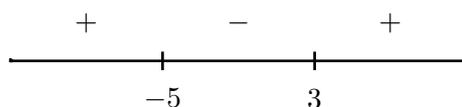
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty$$

Por lo tanto, las rectas  $x = -5$  y  $x = 3$  son asíntotas verticales.

- c) El signo de  $f$  depende del signo del denominador  $(x+5)(x-3)$ .



Por lo tanto,

- 1)  $f$  es positiva en  $] -\infty, -5[$ .
- 2)  $f$  es negativa en  $] -5, 3[$ .
- 3)  $f$  es positiva en  $]3, \infty[$ .
- 4)  $f$  no tiene ceros, pues el numerador no se anula por ser constante.

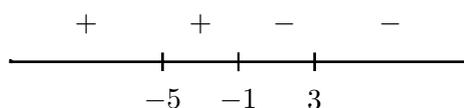
$$d) \quad f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x^2+2x-15)^2}$$

Por ser el denominador positivo, el signo de  $f'$  es igual al signo del numerador.

$$f'(x) > 0 \iff -2(x+1) > 0 \iff x+1 < 0 \iff x < -1.$$

$$f'(x) < 0 \iff x > -1$$

$$f'(x) = 0 \iff x = -1$$



Considerando el signo de  $f'$  y los puntos que no pertenecen al dominio de la función, se tiene que :

- 1)  $f$  es creciente en  $] -\infty, -5[$ .
- 2)  $f$  es creciente en  $] -5, -1[$ .
- 3)  $f$  es decreciente en  $] -1, 3[$ .
- 4)  $f$  es decreciente en  $]3, +\infty[$ .

Como  $f'(-1) = 0 \iff x = -1$ ; en  $x = -1$  la función puede alcanzar un máximo o un mínimo. Aplicando el criterio de la primera derivada, se tiene que en  $x = -1$ ,  $f$  alcanza un máximo local y este es  $f(-1) = -\frac{1}{16}$ .

La función no tiene otros máximos, ni mínimos.

- e) Para estudiar la existencia de asíntotas horizontales, se debe calcular  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{15}{x^2}\right)} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{15}{x^2}\right)} = 0.$$

Por lo tanto,  $y = 0$  es una asíntota horizontal del gráfico de  $f$ .

- f) La concavidad puede deducirse del crecimiento de  $f$  y los límites calculados anteriormente.
- 1)  $f$  es convexa en  $] -\infty, -5[$ .

- 2)  $f$  es cóncava en  $] - 5, 3[$ .
- 3)  $f$  es convexa en  $]3, \infty[$ .

Alternativamente, puede usarse el signo de la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 19)}{(x^2 + 2x - 15)^3}$$

El numerador no tiene raíces reales y el denominador tiene potencia impar, por lo tanto el signo de  $f''$  es igual al signo de  $f$ . Así, se tiene que:

- 1)  $f''$  es positiva en  $] - \infty, -5[$ .
- 2)  $f''$  es negativa en  $] - 5, 3[$ .
- 3)  $f''$  es positiva en  $]3, \infty[$ .

Como los cambios de signo de  $f''$  se producen en los puntos no pertenecientes al dominio de la función, se concluye que  $f$  no tiene puntos de inflexión.

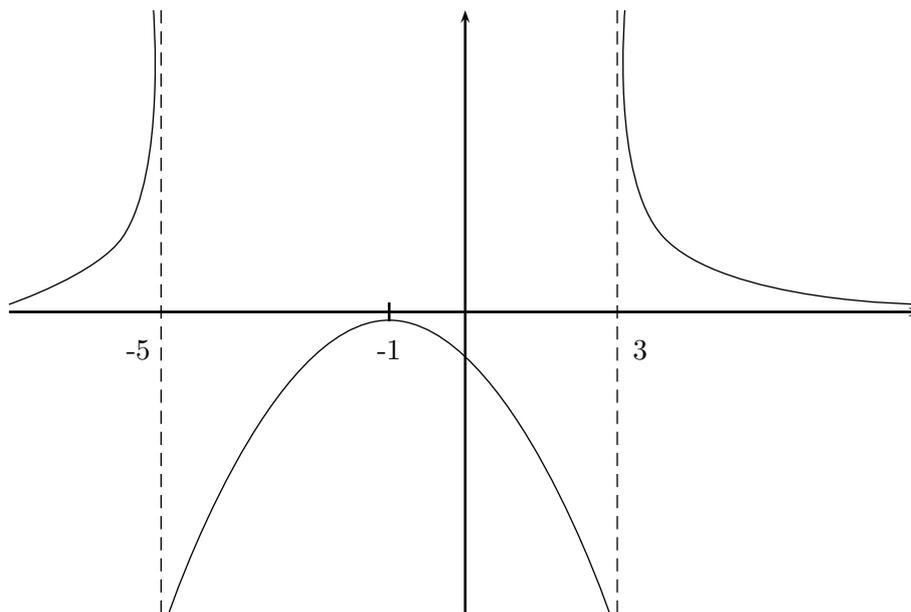


Figura 2.4.7 : Gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 15}$ .

6. Analizar el comportamiento y bosquejar el gráfico de:  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$ .

**Solución:**

- Como  $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x-2)}$ ,  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ .
- $f(x) = 0 \iff x = 0$ .
- Como el numerador cambia de signo en  $x = 0$  y el denominador en  $x = -1$  y  $x = 2$  y  $f$  es continua en su dominio, para conocer el signo de  $f$  basta calcular un valor de  $f$  en cada subintervalo determinado por los puntos antes señalados. En  $(-\infty, -1)$  la función es negativa, pues  $f(-2) < 0$ . En  $(-1, 0)$  la función es positiva, pues  $f(-\frac{1}{2}) > 0$ . En  $(0, 2)$  la función es negativa, pues  $f(\frac{1}{2}) < 0$ . En  $(2, \infty)$  la función es positiva, pues  $f(3) > 0$ .

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 2x - 6)}{((x+1)(x-2))^2}.$$

Por tanto,

$$f'(x) = 0 \iff x^2(x^2 - 2x - 6) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Estos tres valores son los puntos críticos de la función.

- De la expresión de  $f'$  vemos que su signo depende del signo de  $(x^2 - 2x - 6)$ , es decir, los cambios de signo pueden producirse en  $x = 1 + \sqrt{7} \approx 3,65$  ó en  $x = 1 - \sqrt{7} \approx -1,65$ .
  - En  $(-\infty, 1 - \sqrt{7})$ ,  $f'$  es positiva.
  - En  $(1 - \sqrt{7}, 0) \cup (0, 1 + \sqrt{7})$ ,  $f'$  es negativa.
  - En  $(1 + \sqrt{7}, \infty)$ ,  $f'$  es positiva.

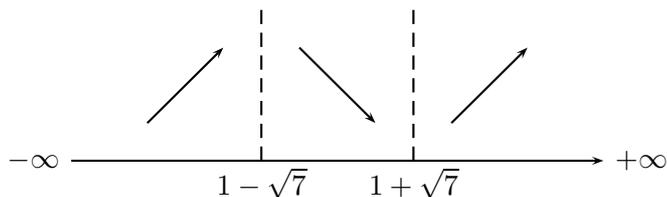


Figura 2.4.8: Crecimiento de la función

- $f''(x) = \frac{6x(x^2 + 2x + 4)}{(x+1)^3(x-2)^3}$ .

- Como  $x^2 + 2x + 4$  no tiene raíces reales, esta expresión es siempre positiva,

$$f''(x) = 0 \iff x = 0.$$

- $f''$  es negativa en  $(-\infty, -1)$ ,  $f''$  es positiva en  $(-1, 0)$ ,  $f''$  es negativa en  $(0, 2)$ ,  $f''$  es positiva en  $(2, \infty)$ . Entonces  $(0, 0)$  es el único punto de inflexión. En  $(1 - \sqrt{7}, -1, 9)$  la función tiene un máximo local y en  $(1 + \sqrt{7}, 6, 34)$  tiene un mínimo local.

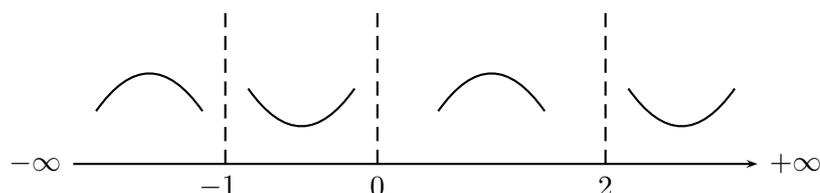


Figura 2.4.9: Concavidad de la función

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1, \text{ por tanto, } a = 1.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3}{x^2 - x - 2} - x \right] = 1$ . Así, la recta  $y = x + 1$  es una asíntota al gráfico de  $f$ .

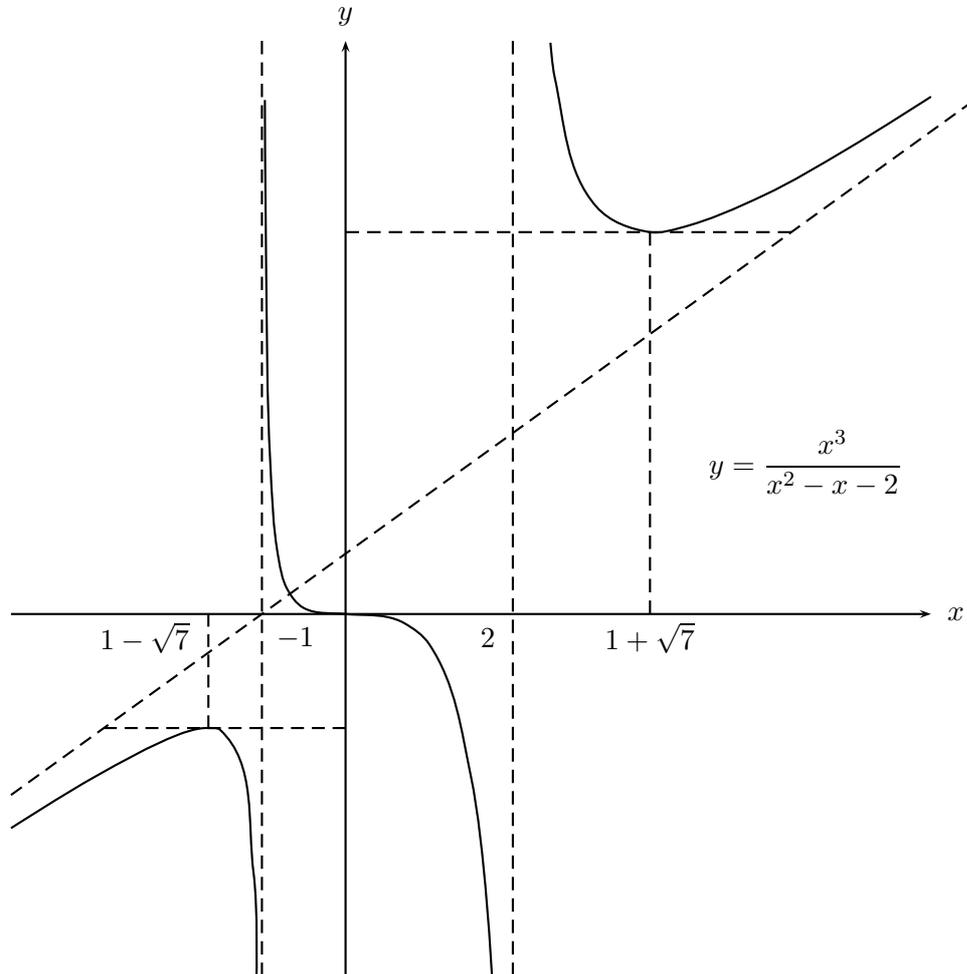


Figura 2.4.10: Gráfico de  $\frac{x^3}{x^2 - x - 2}$ .

7. Analizar el comportamiento de  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ .

**Solución:**

- $D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ .
- $f(x) > 0$  para todo  $x \in D(f)$ . Además es una función par, por lo cual su gráfico es simétrico con respecto al eje Y.

- $f'(x) = \frac{x(x^2 - 8)}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}}$ , así  $f'(x) = 0 \iff x(x^2 - 8) = 0 \iff x = 0, x = \pm 2\sqrt{2}$ .  
 Pero como 0 no pertenece al dominio de la función, sólo debemos considerar  $x = \pm 2\sqrt{2}$ .
- $f'(x) > 0$  en  $(-2\sqrt{2}, -2)$  y en  $(2\sqrt{2}, \infty)$ ,  $f'(x) < 0$  en  $(-\infty, -2\sqrt{2})$  y en  $(2, 2\sqrt{2})$ .

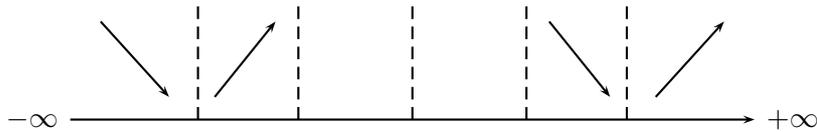


Figura 2.4.11: Crecimiento de la función

- $f''(x) = \frac{4x^2 + 32}{\sqrt{(x^2 - 4)^5}}$ . Podemos observar que  $f''$  es siempre positiva, por tanto, la curva es convexa. Los puntos críticos corresponden a mínimos.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \infty$ .

$\lim_{x \rightarrow \pm 2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \infty$ , lo que implica que  $x = -2$  y  $x = 2$  son asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x^2 - 8)}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}} = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2(x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 - 4} [x^2 + x\sqrt{x^2 - 4}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 4} [x^2 + x\sqrt{x^2 - 4}]} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, la recta  $y = x$  es una asíntota de la curva y por simetría también lo es  $y = -x$ .

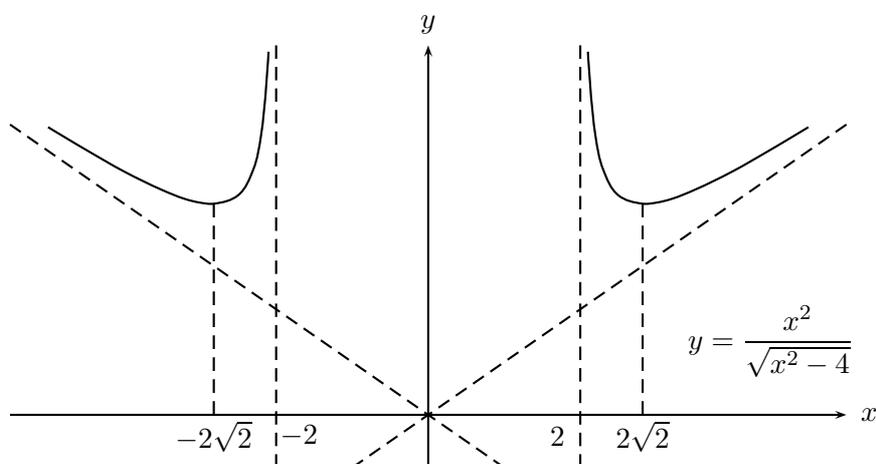


Figura 2.4.12: Gráfico de  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ .

8. Analizar el comportamiento de la función  $f(x) = 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + 3$ .

**Solución:**

- $D(f) = \mathbb{R}$ . Como la función es de período  $2\pi$ , por tanto basta analizarla en  $[0, 2\pi]$ .
- $f(x) = 0 \iff \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + 3 = 0$ . Pero el polinomio  $2z^2 - 2z + 3$  no tiene raíces reales, por lo tanto,  $f(x)$  no tiene ceros.
- $f'(x) = 4 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \cos x = 2 \cos x (2 \operatorname{sen} x - 1)$ , por tanto,  $f'(x) = 0 \iff \cos x = 0$  o  $(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0$ . Entonces  $f'$  se anula para  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{5\pi}{6}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  y  $x = \frac{3\pi}{2}$ .
- $f'$  es positiva en  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$  y en  $(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$ .

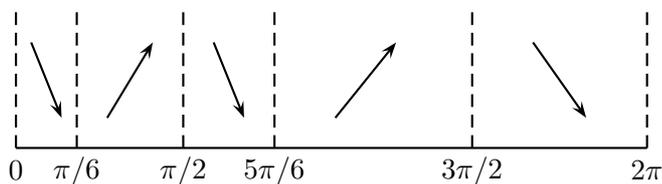


Figura 2.4.13: Crecimiento de la función.

- $f''(x) = 4 \cos^2 x - 4 \sin^2 x + 2 \sin x = 4 + 2 \sin x - 8 \sin^2 x$ .  $f''$  se anula para  $\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ , lo que nos da aproximadamente los ángulos de 57, 123, 217 y 323 grados.
- Para conocer el signo de la segunda derivada entre ceros consecutivos basta calcular:  $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 > 0$ ,  $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 < 0$ ,  $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 > 0$ ,  $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -6 < 0$ . Así, podemos concluir que la función tiene mínimos en  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{2}\right)$  y  $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{2}\right)$ . Máximos en  $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$  y  $\left(\frac{3\pi}{2}, 7\right)$ . Los cuatro ángulos que anulan la segunda derivada son puntos de inflexión.

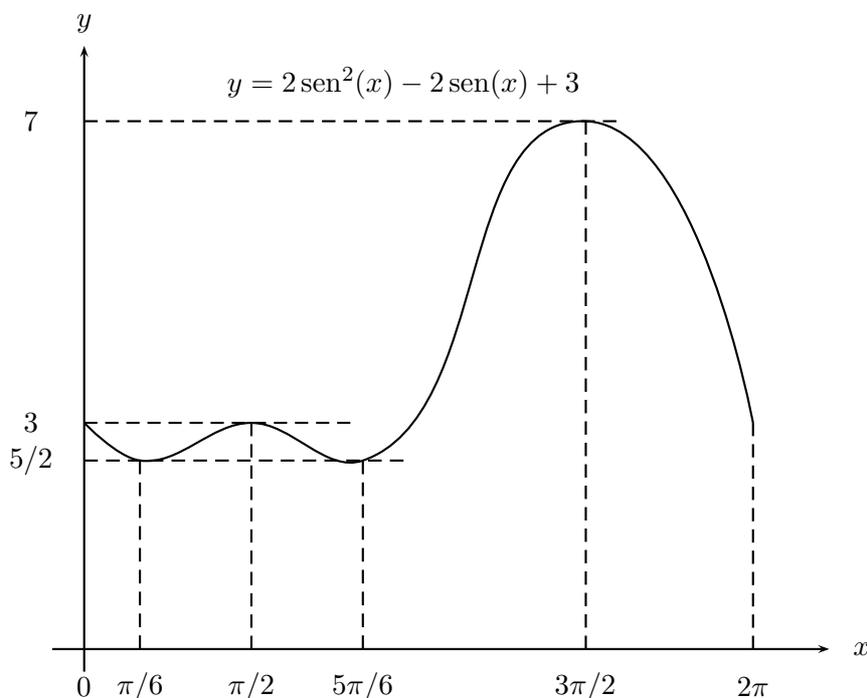


Figura 2.4.14: Gráfico de  $f(x) = 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + 3$ .

9. Analizar el comportamiento de  $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\operatorname{cos}^3 \frac{x}{2}}$ .

**Solución:**

- La función es de período  $4\pi$ , por lo que basta analizarla en  $[0, 4\pi]$ . Por esta razón trabajaremos en el dominio restringido.

- $D(f) = [0, 4\pi] - \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\}$ .

- 

$$f(x) = \frac{\frac{\operatorname{sen}^3 \frac{x}{2} + \operatorname{cos}^3 \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^3 \frac{x}{2} \operatorname{cos}^3 \frac{x}{2}} = 0,$$

por tanto,  $f(x) = 0 \iff \operatorname{sen}^3 \frac{x}{2} + \operatorname{cos}^3 \frac{x}{2} = 0 \iff \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \operatorname{cos} \frac{x}{2} = 0$ . Pues

el otro factor no tiene raíces reales. Esto implica:  $\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}$  y  $\frac{x}{2} = \frac{7\pi}{4}$ , es decir,

$$x = \frac{3\pi}{2} \text{ y } x = \frac{7\pi}{2}.$$

- $f'(x) = \frac{3}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}^5 \frac{x}{2} - \operatorname{cos}^5 \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^4 \frac{x}{2} \operatorname{cos}^4 \frac{x}{2}} \right]$ . Se anula para  $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \operatorname{cos} \frac{x}{2}$ , es decir, para

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ y } x = \frac{5\pi}{2}.$$

- La derivada es positiva para los  $x$  tales que  $\operatorname{sen} \frac{x}{2} > \operatorname{cos} \frac{x}{2}$ , lo que implica,  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ .

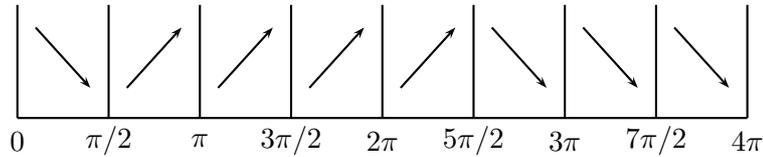


Figura 2.4.15: Crecimiento de la función.

- 

$$f''(x) = \left[ \frac{15 + 9 \operatorname{cos} x}{8} \right] \left[ \operatorname{cosec}^5 \frac{x}{2} + \operatorname{sec}^5 \frac{x}{2} \right],$$

el primer factor no se anula, pues si lo hiciera tendríamos  $\operatorname{cos} x = -\frac{15}{9}$  lo que no puede ser. Por tanto debe anularse el segundo factor, lo que sucede cuando  $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = -\operatorname{cos} \frac{x}{2}$ , así  $\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  y entonces, tenemos como candidatos a puntos de inflexión  $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ .

- Para determinar el signo de  $f''$  basta calcular la  $f''$  en algunos puntos estratégicos, como ya hemos hecho en otras oportunidades.  $f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -323,778 < 0$ ,  $f''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 323,778 > 0$ ,  $f''\left(\frac{13\pi}{4}\right) = 323,778 > 0$ ,  $f''\left(\frac{15\pi}{4}\right) = -323,778 < 0$ ,

- En  $(\frac{\pi}{2}, 4\sqrt{2})$  la función tiene un mínimo y en  $(\frac{5\pi}{2}, -4\sqrt{2})$  un máximo. Los puntos  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ ,  $(\frac{7\pi}{2}, 0)$  son puntos de inflexión.

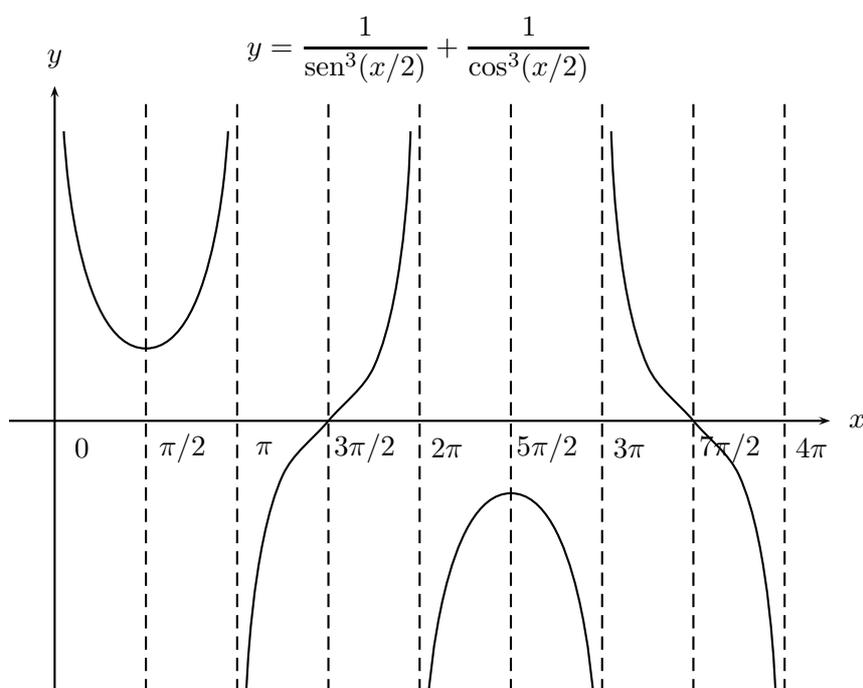


Figura 2.4.16: Gráfico de  $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\operatorname{cos}^3 \frac{x}{2}}$ .

10. Dada la función  $f(x) = 2 \arctan x^2$ , encuentre el recorrido, los intervalos donde es estrictamente creciente y los intervalos donde es convexa.

**Solución**

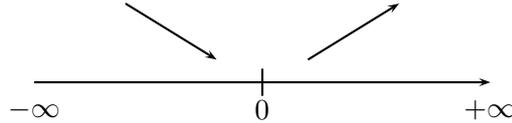
- Como  $\arctan x$  tiene como recorrido  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  y es positiva cuándo  $x \geq 0$ , tenemos que  $0 \leq f(x) < 2 \cdot \frac{\pi}{2}$ . Luego:  $R(f) = [0, \pi[$ .
- $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \frac{4x}{1+x^4}$ . Así,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Como  $1+x^4 > 0$ , para todo  $x$ , el signo de  $f'$  es el signo de  $x$ . Es decir:

$$f' < 0 \text{ en } ]-\infty, 0[$$

$$f' > 0 \text{ en } ]0, +\infty[.$$

Por lo tanto,



$f$  es creciente en  $]0, +\infty[$  y decreciente en  $] -\infty, 0[$ .

- $f$  es convexa  $\Leftrightarrow f'' > 0$ .

$$\frac{4 - 12x^2}{(1 + x^4)^2} = \frac{4(1 - 3x^4)}{(1 + x^4)^2}.$$

Como el denominador es positivo para todo  $x$ , tenemos:

$$f'' > 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^4 > 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^4 = (1 - \sqrt{3}x^2)(1 + \sqrt{3}x^2) > 0,$$

pero:  $(1 + \sqrt{3}x^2) > 0$  para todo  $x$ , luego basta analizar:

$$1 - \sqrt{3}x^2 > 0 \Leftrightarrow (1 - \sqrt[4]{3}x)(1 + \sqrt[4]{3}x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right[.$$

Luego  $f$  es convexa si  $x \in \left] -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right[$ .

**Ejercicios Propuestos** Analizar el comportamiento de las siguientes funciones y bosquejar sus gráficos.

1.  $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 8.$

2.  $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$

3.  $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$

4.  $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$

5.  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$

6.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}.$

7.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$

8.  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x}.$

9.  $f(x) = x \sqrt{\frac{x}{1 - x}}.$

10.  $f(x) = x \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$

11.  $f(x) = x + \operatorname{sen} x.$

12.  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \tan^2 x}.$

13.  $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}.$

14.  $f(x) = \arctan \sqrt{x}.$

15.  $f(x) = \sqrt{\arctan x}.$

## 2.6. Aplicaciones III: Análisis de curvas en el plano

Las curvas planas más simples son aquellas cuyas ecuaciones contienen a las variables  $x$  e  $y$  en primer y segundo grado. Ellas pueden ser analizadas usando geometría analítica. Por esta razón hacemos una presentación de sus elementos básicos. En particular, si estudiante ya conoce esta materia puede omitir esta subsección.

### 2.6.1. Elementos de Geometría Analítica

Los dos conceptos fundamentales de la geometría analítica corresponden a la idea de Descartes de crear un método que pudiera aplicarse a la resolución de todos los problemas de la geometría. Ellos son:

- El **concepto de coordenada de un punto**, lo que permite, como ya hemos visto en la subsección 1.3.2, representar en forma de curva plana cualquier ecuación algebraica con dos incógnitas.
- El concepto de **variable** introducido en la expresión de una ecuación algebraica con dos incógnitas del tipo  $F(x, y) = 0$ , lo que permite mirar una ecuación algebraica bajo otra perspectiva. Pues, si cada solución  $(x, y)$  de la ecuación se ve como un punto del plano, entonces el conjunto

$$\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$$

puede ser representado como una curva en el plano.

Así, se obtiene la ventaja de poder aplicar métodos algebraicos a la resolución de problemas geométricos y viceversa.

Recordemos que en el siglo XVII, la geometría estaba en el mismo estado que la habían dejado los griegos de la Antigüedad, en cambio el álgebra había sido desarrollada fuertemente por los árabes en la Edad Media e italianos en el siglo XVI, principalmente.

La determinación de un punto en el plano fue descrita en la subsección 1.3.2. Haciendo uso del sistema de coordenadas cartesianas estableceremos algunos resultados elementales de la geometría analítica.

**Distancia entre dos puntos** Sean  $P_1, P_2$  dos puntos del plano, con coordenadas  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  respectivamente. El triángulo  $P_1QP_2$  es rectángulo en  $Q$ , por teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1Q}^2 + \overline{QP_2}^2$$

si llamamos  $d$  a la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$ , tenemos que

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

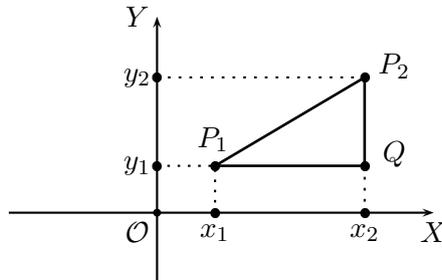


Figura 2.6.1: Distancia entre dos puntos.

### Coordenadas de un punto que divide a un segmento según una razón dada

Dados los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , queremos encontrar las coordenadas del punto  $P$  que divide el segmento  $\overline{P_1P_2}$  en la razón  $m : n$ .

Sean  $P_1 = (x_1, y_1)$ ;  $P_2 = (x_2, y_2)$ ,  $P = (x, y)$ , ;  $Q = (x, y_1)$  y  $R = (x_2, y)$ .

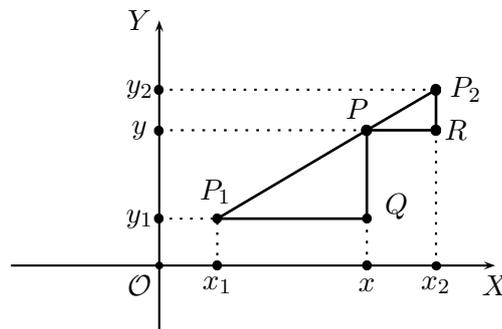


Figura 2.6.2: Razón Dada

Los triángulos  $P_1QP$  y  $PRP_2$  son semejantes, por tanto  $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$   
de donde

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n} \quad (2.22)$$

por otro lado

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}$$

de donde

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}. \quad (2.23)$$

Como un caso particular tenemos las coordenadas del punto medio de un trazo. Tomando  $m = n = 1$  en las ecuaciones (2.22) y (2.23), obtenemos las coordenadas del punto medio del trazo  $\overline{P_1P_2}$  :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

**Determinación de los puntos de intersección de dos curvas** Como cada curva corresponde a una ecuación algebraica, tener dos curvas equivale a tener dos ecuaciones del tipo  $F(x, y) = 0$ ,  $G(x, y) = 0$ . Como los puntos de intersección de las curvas deben satisfacer ambas ecuaciones, las coordenadas de tales puntos se encuentran resolviendo el sistema algebraico compuesto por las dos ecuaciones.

### Curvas representadas por ecuaciones de primer grado

**Teorema 2.6.1** Toda recta queda determinada por una ecuación de la forma  $Ax + By + C = 0$ , con  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son constantes. Recíprocamente, toda ecuación de primer grado  $Ax + By + C = 0$  representa una recta.

**Demostración:** Supongamos primero que la recta pasa por el origen del sistema.

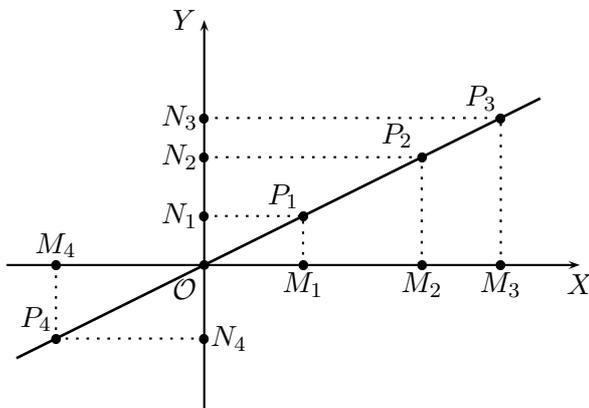


Figura 2.6.3: Recta que pasa por el origen.

Por semejanza de triángulos se tiene, para todo punto  $P_i$  de la recta, la siguiente relación:

$$\frac{\overline{P_1M_1}}{\overline{OM_1}} = \frac{\overline{P_2M_2}}{\overline{OM_2}} = \frac{\overline{P_3M_3}}{\overline{OM_3}} = \dots$$

A esta constante de proporcionalidad la podemos llamar  $a$ , además los numeradores de la relación son las respectivas coordenadas  $y$  de los puntos, y los denominadores son las coordenadas  $x$ . Por tanto, tenemos una ecuación de la forma

$$y = ax \quad \text{con } a = \text{constante.}$$

Ahora supongamos que la recta no pasa por el origen.

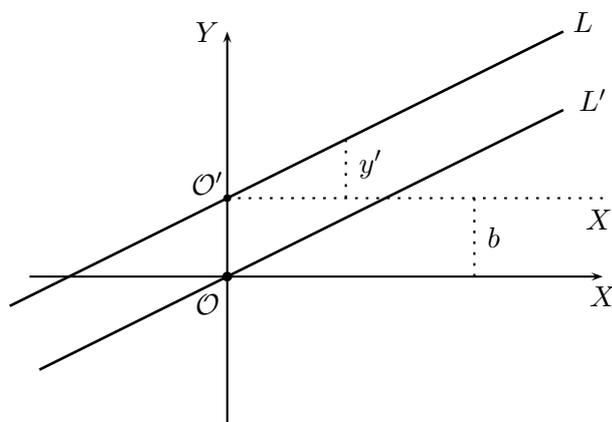


Figura 2.6.4: Recta que no pasa por el origen

Aplicando el mismo razonamiento a  $L$  con los ejes  $X'Y'$ , obtenemos que  $y' = ax$ , donde  $y' = y - b$ .

Entonces, la ecuación que satisfacen las coordenadas de los puntos de la recta es:

$$y = ax + b \quad \text{con } a, b \text{ constantes.}$$

Ahora demostraremos la afirmación recíproca.

Sea la ecuación  $Ax + By + C = 0$

Si  $B = 0$  entonces  $x = -\frac{C}{A}$ , es decir  $x = K$ , con  $K$  constante, lo que representa una recta paralela al eje  $Y$ .

Si  $B \neq 0$ , se tiene  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ; como  $A, B, C$  son constantes, la ecuación queda como  $y = ax + b$ , donde  $a = -\frac{A}{B}$  y  $b = -\frac{C}{B}$  son constantes.

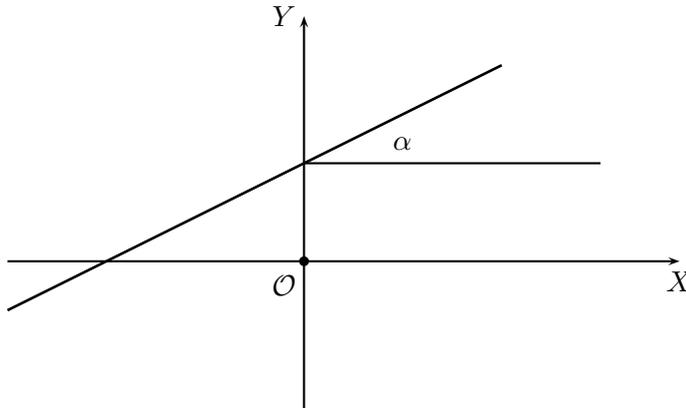


Figura 2.6.5 : Recta

Si  $b = 0$  entonces  $y = ax$ , lo que implica que  $\frac{y}{x} = a$ .

Es decir, son los puntos cuyas coordenadas están en una razón constante, lo que - según lo visto anteriormente -, es una recta que pasa por el origen. Del mismo modo, si  $b \neq 0$  se puede ver que la ecuación  $y = ax + b$  es una recta que corta el eje  $Y$  en  $(0, b)$ . ■

**Definición 2.6.2** (i) Llamaremos **pendiente o inclinación** de una recta  $L$ , a la tangente del ángulo  $\alpha$  formado entre el semieje positivo de las  $x$  y la recta medido en la forma convencional en el sentido contrario al movimiento de los punteros del reloj.

(ii) Llamaremos **ángulo formado por dos rectas**  $L, L'$  al ángulo  $\phi \in [0, \pi]$  formado por la diferencia de los respectivos ángulos  $\alpha$  y  $\alpha'$ .

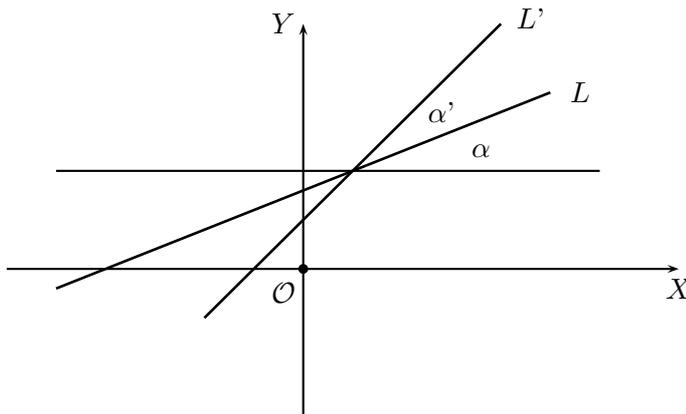


Figura 2.6.6: Ángulo formado por dos rectas

La definición (2.6.2) nos dice que  $\phi = \alpha' - \alpha$  y usando las fórmulas trigonométricas de la sección 2.3, tenemos:

$$\tan \phi = \tan(\alpha' - \alpha) = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha' \tan \alpha} \quad (2.24)$$

Si denotamos por  $m$  y  $m'$  las respectivas pendientes de las rectas  $L$  y  $L'$ , entonces  $\tan \phi = \frac{m' - m}{1 + m'm}$ . Si en particular las rectas son paralelas tenemos que,

$$L \parallel L' \iff \phi = 0 \iff m' = m \quad (2.25)$$

$$L \perp L' \iff \phi = \frac{\pi}{2} \iff \cotan \phi = 0 \iff m'm = -1 \quad (2.26)$$

La geometría de Euclides nos ha enseñado que dados dos puntos existe una única recta que pasa por dichos puntos. ¿Cuál es la ecuación de esta recta ?

Sean  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  dos puntos del plano.

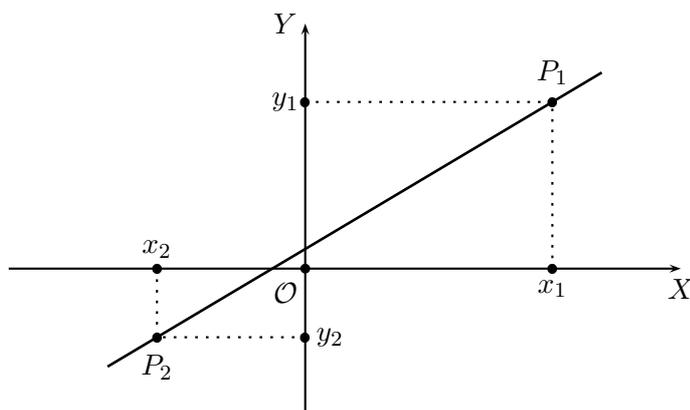


Figura 2.6.7: Recta que pasa por dos puntos

La recta que pasa por  $P_1$  y por  $P_2$  tiene pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2.27)$$

La recta de ecuación  $y = ax + b$  tiene pendiente  $a$ , como puede verse en la demostración del teorema (2.6.1). Para encontrar  $b$  reemplazamos en la ecuación de la recta el valor de  $m$  dado por (2.27) y las coordenadas  $x$  e  $y$  por las de uno de los dos puntos dados. Haciendo los cálculos algebraicos, obtenemos finalmente que la ecuación de una recta que pasa por  $P_1$  y  $P_2$  es:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \quad (2.28)$$

### Curvas representadas por ecuaciones de segundo grado

Recordemos el concepto de **lugar geométrico** como el conjunto de puntos del plano que satisfacen una cierta propiedad geométrica. Esta propiedad geométrica, gracias al sistema de coordenadas, puede ser expresada por una ecuación algebraica satisfecha por las coordenadas de los puntos.

**Definición 2.6.3** La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos  $P$  cuya distancia a un punto fijo  $C$  es constante.

#### Ecuación de una circunferencia:

Sea  $P$  un punto de la circunferencia, entonces

$$\overline{PC} = r, \quad r = \text{constante.}$$

Si  $P$  tiene coordenadas  $(x, y)$  y  $C$  tiene coordenadas  $(a, b)$ , usando la fórmula de la distancia, se obtiene la ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (2.29)$$

que caracteriza la circunferencia de centro  $(a, b)$  y radio  $r$ .

**Ejemplo 2.6.4** Encontrar la ecuación de una circunferencia de radio dado y tangente al eje  $Y$  en el origen. **Solución:**

Según la ecuación (2.29), si  $(0, 0)$  pertenece a la circunferencia pedida, entonces  $a^2 + b^2 = r^2$ . Si el eje  $Y$  es tangente a la circunferencia entonces, el radio es  $\perp$  al eje  $Y$  y el centro está sobre el eje  $X$ . Por tanto, la coordenada  $b$  del centro vale 0.

Para obtener el valor de la coordenada  $a$  usamos el hecho que la distancia entre el centro y el origen es  $r$ , lo que implica que  $a = r$ . Así,

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2 \iff x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

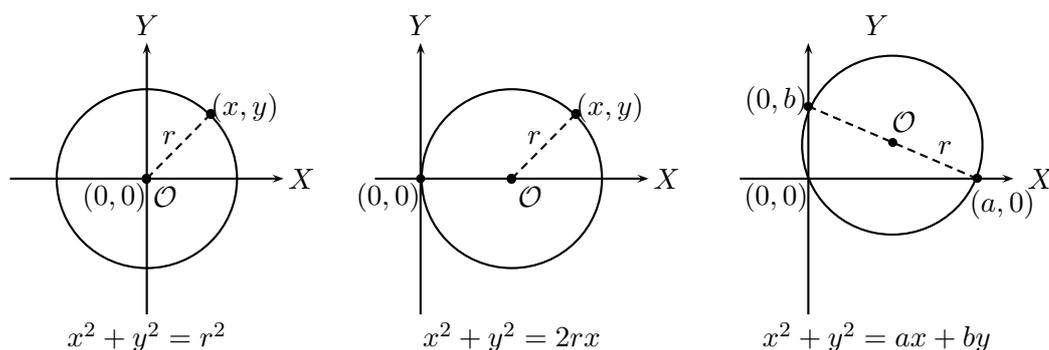


Figura 2.6.8: Circunferencias

**Definición 2.6.5** La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos  $F_1, F_2$  es constante con una constante mayor que el trazo  $\overline{F_1F_2}$ .

### Ecuación de una elipse

Para obtener la ecuación que satisfacen las coordenadas de los puntos de una elipse, supongamos que la constante sea  $2a$  y que los ejes coordenados están ubicados como en la figura 2.6.9.

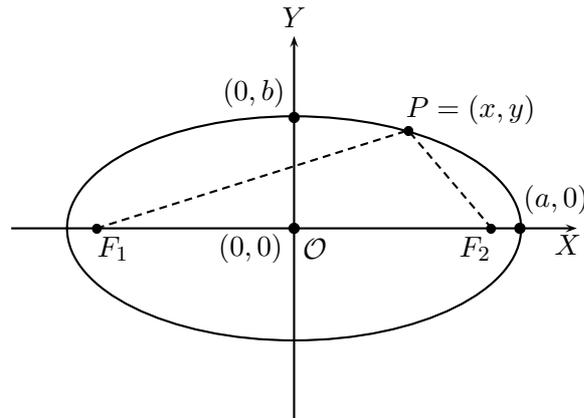


Figura 2.6.9: Elipse

Sean  $x$  e  $y$  las coordenadas de un punto  $P$  cualquiera de la elipse; y supongamos que  $F_1 = (-c, 0)$  y  $F_2 = (c, 0)$ :

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \quad (2.30)$$

$$\overline{PF_1}^2 = y^2 + (x + c)^2 \quad (2.31)$$

$$\overline{PF_2}^2 = y^2 + (x - c)^2 \quad (2.32)$$

Eliminando  $\overline{PF_1}$  y  $\overline{PF_2}$  de las ecuaciones (2.30), (2.31) y (2.32), obtendremos una relación entre las variables  $x$  e  $y$ .

Restando las ecuaciones (2.31) y (2.32):

$$\begin{aligned} \overline{PF_1}^2 - \overline{PF_2}^2 &= 4cx \\ (\overline{PF_1} + \overline{PF_2})(\overline{PF_1} - \overline{PF_2}) &= 4cx \\ 2a(\overline{PF_1} - \overline{PF_2}) &= 4cx \end{aligned}$$

Así tenemos:

$$\begin{cases} \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \\ \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \frac{2cx}{a} \end{cases}$$

lo que nos da los valores de  $\overline{PF_1}$ ,  $\overline{PF_2}$ :

$$\overline{PF_1} = a + \frac{cx}{a} \quad ; \quad \overline{PF_2} = a - \frac{cx}{a}$$

reemplazando estos valores en (2.31) o en (2.32), nos da la ecuación:

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 &= y^2 + (x+c)^2 \\ a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Por la definición de la elipse  $2a > 2c$ , es decir,  $a > c$ ,  $a^2 - c^2 > 0$  y puede ser representado por un cuadrado  $b^2$ , lo que nos da:  $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ , de donde tenemos la ecuación cartesiana de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.33)$$

Para la elipse de ecuación dada en (2.33) se tiene que:

- (i) El origen (0,0) corresponde al centro de la elipse.
- (ii) Si  $y = 0$  entonces  $x = \pm a$  y si  $x = 0$  se tiene  $y = \pm b$ . Estos valores determinan los puntos  $A$  y  $A'$ ,  $B$  y  $B'$  donde la curva corta a los ejes y a su vez representan los valores extremos que pueden tomar ambas variables, por tanto  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  y  $B'$  se llaman **vértices** de la elipse.
- (iii) Las distancias  $a$  y  $b$  del origen a los vértices se llaman **longitudes de los semiejes de la curva**. Los ejes enteros tienen longitudes  $2a$  y  $2b$ .
- (iv) Si la elipse no es un círculo, entonces  $a \neq b$ . Si  $a > b$ , entonces el trazo  $\overline{AA'}$  es el **eje mayor** y  $\overline{BB'}$  es el **eje menor**.
- (v) Los **focos**  $F_1$ ,  $F_2$  de la elipse situados sobre el eje mayor tienen coordenadas  $(-c, 0)$ ,  $(c, 0)$ , con  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . La distancia  $\overline{F_1F_2}$  se llama **distancia focal**.

**Ejemplo 2.6.6** la ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

representa una elipse con centro en el origen. Escribiendo la ecuación en la forma

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

podemos deducir que la longitud del semieje mayor es  $a = 2$  y que la longitud del semieje menor es  $b = \sqrt{2}$ .

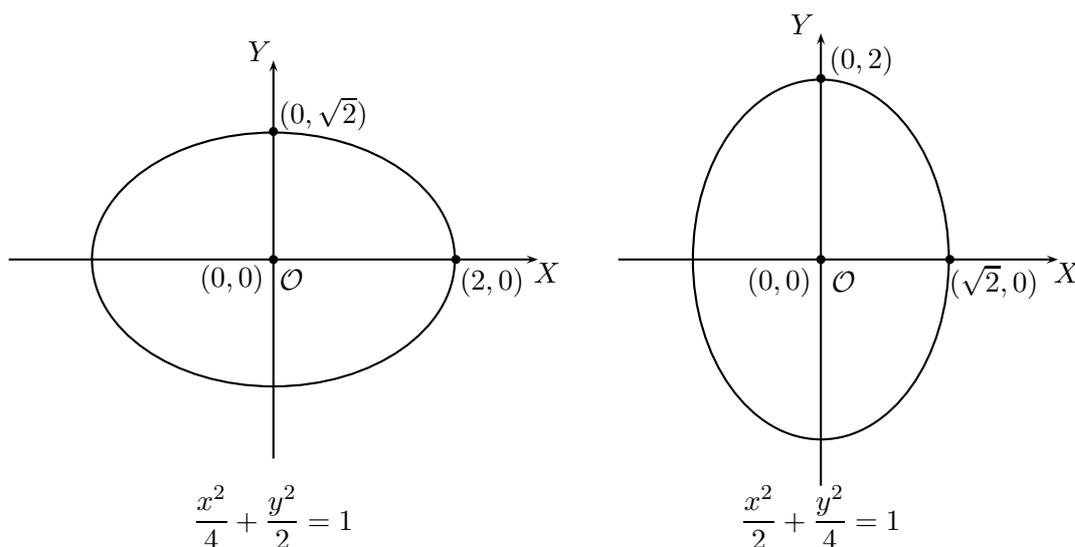


Figura 2.6.10: Elipses

Los vértices de la elipse son:  $A = (2, 0)$ ,  $A' = (-2, 0)$ ,  $B = (0, \sqrt{2})$ ,  $B' = (0, -\sqrt{2})$ . Para encontrar las coordenadas de los focos debemos calcular el valor de  $c$ .  $c^2 = a^2 - b^2$  implica que  $c = \sqrt{2}$  y por tanto los focos tienen coordenadas:  $F_1 = (\sqrt{2}, 0)$ ,  $F_2 = (-\sqrt{2}, 0)$ .

La ecuación

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$

representa una elipse del mismo tipo anterior, pero con su eje mayor sobre el eje  $Y$ , donde además están sus focos con coordenadas  $F_1 = (0, \sqrt{2})$ ,  $F_2 = (0, -\sqrt{2})$ .

**Definición 2.6.7** La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tal que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos  $F_1, F_2$  es una constante menor que  $\overline{F_1 F_2}$ .

**Ecuación de una hipérbola**

Se procede en forma análoga al caso de una elipse:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$$

$$\overline{PF_1}^2 = y^2 + (x + c)^2$$

$$\overline{PF_2}^2 = y^2 + (x - c)^2 .$$

Observando que  $a < c$ , entonces  $a^2 - c^2 < 0$  y lo reemplazamos por  $-b^2$  llegándose a la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.34)$$

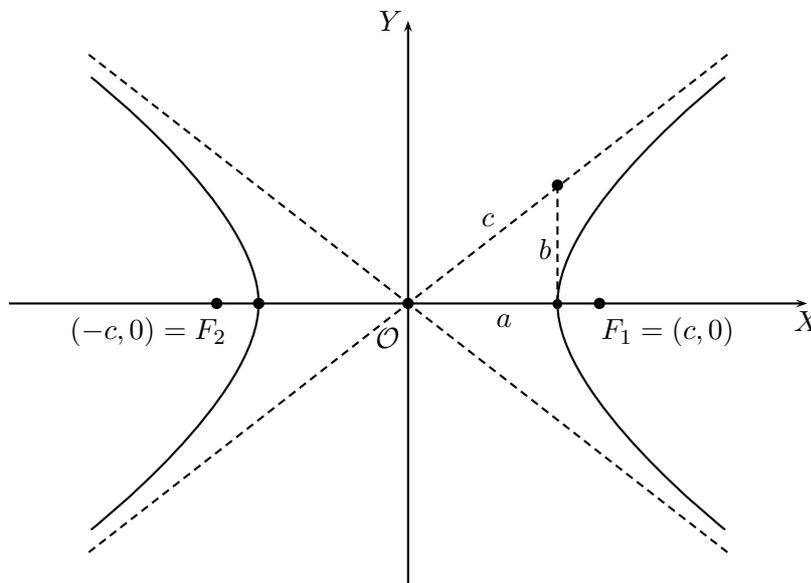


Figura 2.6.11: Hipérbola

Para la hipérbola de ecuación dada en (2.34) se tiene:

- (i) El origen  $(0,0)$  corresponde al centro de la hipérbola.
- (ii) Si  $y = 0$  entonces  $x = \pm a$ , pero cuando  $x = 0$  tenemos que  $y^2 = -b^2$ . Por tanto la curva interseca al eje  $x$  en los puntos  $(-a, 0)$  y  $(a, 0)$ , pero no hay intersección con el eje  $Y$ . Por tal razón se llama al primero **eje transversal** y tiene longitud  $2a$ , el segundo suele llamarse **eje conjugado** o **eje imaginario**. Los puntos  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$  se llaman **vértices** de la hipérbola.

(iii) Los **focos** de la hipérbola son los puntos  $(-c, 0)$ ,  $(c, 0)$ .

(iii) Como

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (2.35)$$

se deduce que ningún punto de la curva puede tener abscisa menor, en valor absoluto, que  $a$ , además cuando  $x$  crece de  $a$  a  $\infty$  o decrece de  $-a$  a  $-\infty$ , el valor absoluto de  $y$  crece infinitamente, es decir, sin acotamiento. Así la curva tiene dos arcos infinitos.

(iv) La ecuación (2.34) puede escribirse también como  $y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ . Del estudio hecho en la sección 2.2 de la función  $\frac{1}{x}$ , sabemos que cuando  $|x|$  crece, entonces  $\frac{a^2}{x^2}$  disminuye. Por tanto, cuando  $|x|$  crece, el  $|y|$  se acerca al valor  $\pm \frac{b}{a} x$ . Por esta razón las rectas  $y = \pm \frac{b}{a} x$  se llaman **asíntotas** de la hipérbola.

(v) Observemos que las asíntotas contienen a las diagonales del rectángulo central de lados  $2a$  y  $2b$ . Además, si vemos la diferencia entre la hipérbola y sus asíntotas tenemos:

$$\left| \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} x \right| = \frac{b}{a} \left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right| = \frac{b}{a} \left| \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right| \quad (2.36)$$

nuevamente aquí podemos apreciar que cuando  $|x|$  crece, la expresión (2.36) se hace cada vez más pequeña.

(vi) Las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se llaman hipérbolas **conjugadas**. Si  $a = b$ , la hipérbola se llama **equilátera**.

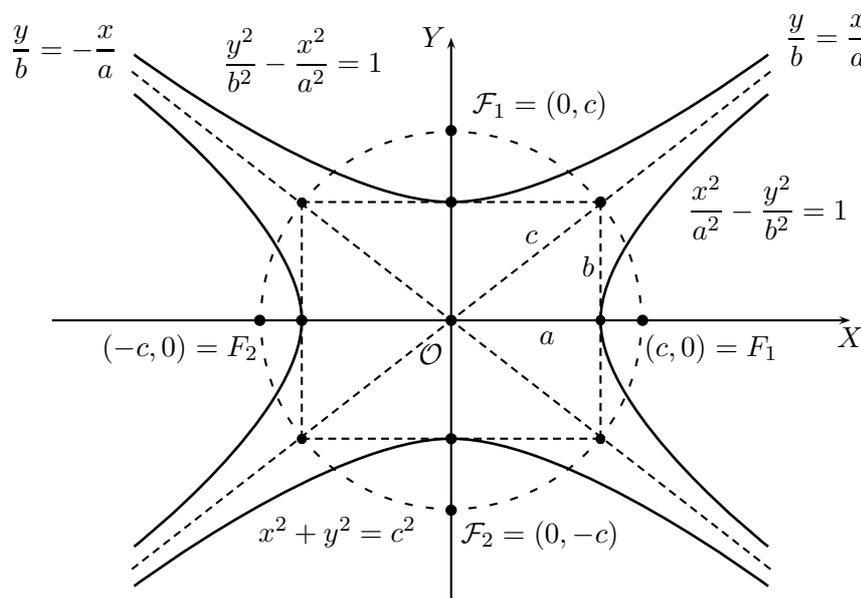


Figura 2.6.12: Hipérbolas Conjugadas

**Ejemplo 2.6.8** La ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$

representa una hipérbola con centro en el origen y eje transversal sobre el eje  $X$ . Sus vértices son los puntos  $(2, 0)$  y  $(-2, 0)$ .

Para conocer las coordenadas de sus focos debemos calcular el valor de  $c$ . Como  $c^2 = a^2 + b^2$  tenemos que  $c = \sqrt{6}$  y por tanto  $F_1 = (\sqrt{6}, 0)$  y  $F_2 = (-\sqrt{6}, 0)$ . Sus rectas asintotas son:  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ .

La hipérbola conjugada tiene ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = -1 \iff \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$$

que tiene su eje transversal sobre el eje  $Y$  y sus focos tienen coordenadas  $F_1 = (0, \sqrt{6})$  y  $F_2 = (0, -\sqrt{6})$ . Sus rectas asintotas son:  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}y$ .

**Definición 2.6.9** La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de una recta fija  $L$ , y de un punto fijo  $F$ .

**Ecuación de la parábola**

Ubicando los ejes coordenados como en la figura 2. 4.13, consideremos un punto cualquiera  $P(x, y)$  de la parábola, llamemos  $p = \overline{AF}$ , entonces  $F$  tiene coordenadas  $(\frac{p}{2}, 0)$ . En virtud de la definición de parábola tenemos:

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ \overline{PF}^2 &= y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2\end{aligned}$$

por definición de la parábola  $\overline{PQ} = \overline{PF}$ , de donde obtenemos

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

que reducida es:

$$y^2 = 2px \tag{2.37}$$

Para la parábola de ecuación (2.37) tenemos que:

- (i) El punto  $O = (0, 0)$  se llama **vértice**, el punto  $F = (\frac{p}{2}, 0)$ , con  $p > 0$ , se llama **foco** de la parábola y la recta  $x = -\frac{p}{2}$  se llama **directriz**.

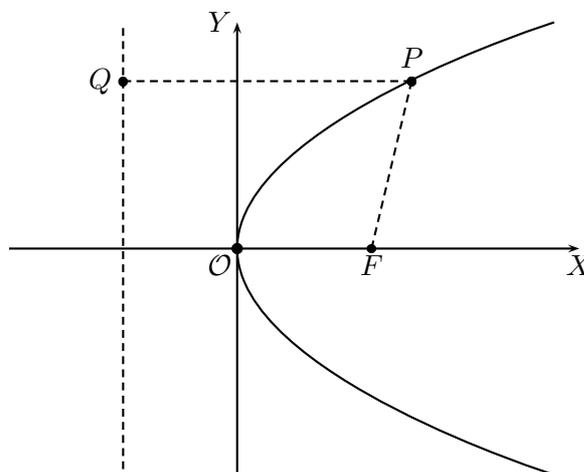


Figura 2.6.13 : Parábola

**Ejemplo 2.6.10** (i) La ecuación

$$y^2 = 13x$$

representa una parábola que tiene su vértice en el origen  $(0, 0)$ , su foco en  $(\frac{13}{4}, 0)$  y su directriz es la recta  $x = -\frac{13}{4}$ . Su gráfico es simétrico con respecto al semieje positivo de las  $x$ .

(ii) La ecuación

$$y^2 = -13x$$

representa una parábola que tiene su vértice en el origen  $(0, 0)$ , su foco en  $(-\frac{13}{4}, 0)$  y su directriz es la recta  $x = \frac{13}{4}$ . Su gráfico es simétrico con respecto al semieje negativo de las  $x$ .

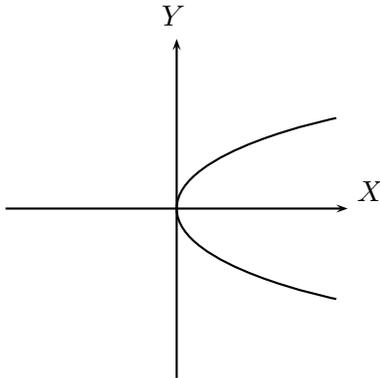


Figura 2.6.14.a :  $y^2 = 13x$

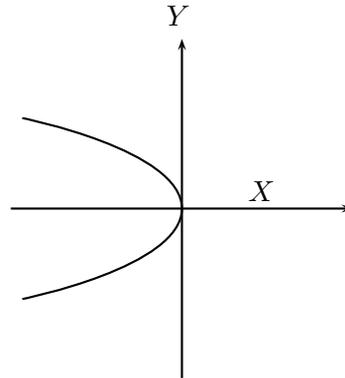


Figura 2.6.14.b :  $y^2 = -13x$

(iii) La ecuación

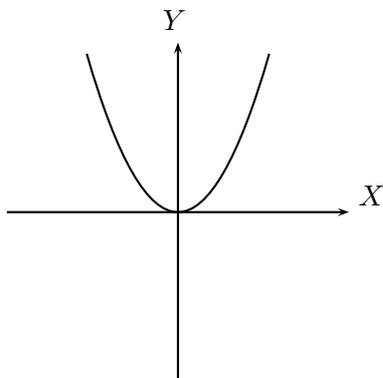
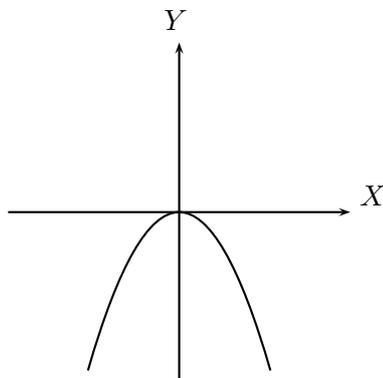
$$x^2 = 13y$$

representa una parábola con vértice en el origen, foco en  $(0, \frac{13}{4})$  y directriz  $y = -\frac{13}{4}$ . Su gráfico es simétrico con respecto al semieje positivo de las  $y$ .

(iv) La ecuación

$$x^2 = -13y$$

representa una parábola con vértice en el origen, foco en  $(0, -\frac{13}{4})$  y directriz  $y = \frac{13}{4}$ . Su gráfico es simétrico con respecto al semieje negativo de las  $y$ .

Figura 2.6.15.a :  $x^2 = 13y$ Figura 2.6.15.b :  $x^2 = -13y$ 

### Comentarios

- (i) la circunferencia es un caso particular de la elipse, tomando  $a = b$ .
- (ii) La elipse, la parábola y la hipérbola se llaman **cónicas** pues se obtienen de la intersección de un plano con uno o dos conos.
- (iii) Las secciones cónicas fueron estudiadas por **Apolonio** (260 - 200 a.C.). Su estudio fue geométrico y muy completo, tanto que fue usado por **Kepler** (1571-1630), unos dos mil años después, en el establecimiento de sus famosas leyes.
- (iv) Aparte de las órbitas de los planetas, las elipses se aplican a ciertos problemas técnicos como la elipse de inercia utilizada en resistencia de materiales.
- (v) Fue **Galileo** (1564-1642), quien estableció que una piedra lanzada al aire describe una parábola, lo cual fue aplicado al estudio de la trayectoria que sigue una bala disparada por un cañón. La propiedad de la tangente a una parábola fue usada en la construcción de los telescopios reflectantes, como el inventado por **Newton** (1642-1727). Esto también se usa para los grandes proyectores de seguimiento.

### Directrices y excentricidad

Toda curva de segundo grado puede ser considerada como el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo y a una recta fija están en una relación constante. El punto recibe el nombre de **foco** y la recta fija se llama **directriz**, la relación constante se llama **excentricidad** ( $e$ ). En el caso que haya dos focos, a cada uno le corresponde una directriz.

Si  $e < 1$  se tiene una elipse, si  $e > 1$  es una hipérbola, en el caso que  $e = 1$  se trata de una parábola.

- En la **elipse**, las directrices son:  $x = \frac{a^2}{c}$  que corresponde al foco  $(c, 0)$  y  $x = -\frac{a^2}{c}$  que corresponde al foco  $(-c, 0)$ .

Por otro lado, la excentricidad es  $e = \frac{c}{a}$ , como  $c < a$ , entonces  $e < 1$  y se puede ver que los puntos de la elipse están más cerca de cada foco que de la directriz correspondiente.

- En la **circunferencia** los ejes son iguales, la excentricidad es nula, los focos se confunden con el centro y las directrices están a una distancia infinita.
- Las directrices de la **hipérbola** son las rectas:  $x = \frac{a^2}{c}$  correspondiente al foco  $(c, 0)$  y  $x = -\frac{a^2}{c}$  correspondiente al foco  $(-c, 0)$ .

Como  $c > a$ , la distancia  $\frac{a^2}{c}$  es menor que  $a$ , las dos directrices están situadas entre los vértices  $(a, 0)$  y  $(-a, 0)$ .

Su excentricidad es  $e = \frac{c}{a}$ . Como  $c > a$  se tiene  $e > 1$ , entonces los puntos de la curva están más cerca de la directriz que del foco. Es la situación inversa a la de la elipse.

- En la **parábola** la directriz tiene ecuación  $x = -\frac{p}{2}$  y por su misma definición los puntos de la curva están a igual distancia de la directriz que del foco, y por tanto  $e = 1$ .

Las ecuaciones que hemos deducido de las secciones cónicas se llaman, por su simplicidad, **formas canónicas**.

En general tenemos el siguiente cuadro de formas canónicas de segundo grado, donde  $a$ ,  $b$  y  $p$  son constantes distintas de cero:

Cuadro 1

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  : **Elipse**.
2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$  : **Elipse imaginaria**.
3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  : **Punto**. Par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real.
4.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  : **Hipérbola**.
5.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  : **Par de rectas** que se cortan.
6.  $y^2 - 2px = 0$  : **Parábola**.

7.  $x^2 - a^2 = 0$  : Par de rectas paralelas.
8.  $x^2 + y^2 = 0$  : Par de rectas paralelas imaginarias.
9.  $x^2 = 0$  : Par de rectas coincidentes.

Hasta aquí hemos visto que las secciones cónicas están representadas por ecuaciones de segundo grado bastante simples, cuya simplicidad en parte se debe a la elección del sistema de coordenadas. Pero no siempre encontraremos las curvas ubicadas de manera tan ideal. Una primera generalización de estas ecuaciones se tiene cuando el centro de la curva no coincide con el origen.

### Traslación de los ejes de coordenadas

Sea  $XY$  un sistema de coordenadas rectangulares y  $X'Y'$  el sistema obtenido por traslación paralela de los ejes iniciales.

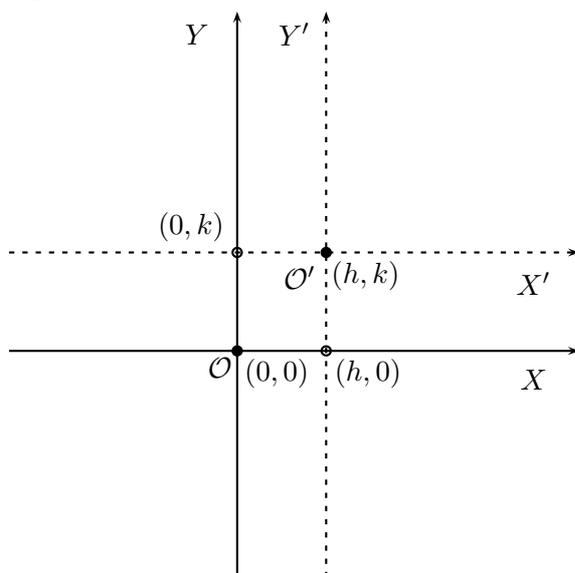


Figura 2.6.16 : Traslación de ejes

El nuevo origen  $O'$  tiene coordenadas  $(h,k)$  con respecto al sistema original. Sea  $P$  un punto del plano con coordenadas  $(x,y)$  y  $(x',y')$ , queremos establecer una relación entre las coordenadas. Es fácil deducir de la figura que:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

de donde se tiene:

$$x = x' + h$$

$$y = y' + k$$

- Siempre es posible encontrar una traslación de los ejes de modo que toda recta pase por el nuevo origen del sistema. Si la recta tiene ecuación  $y = ax + b$ , la podemos escribir como  $y - b = ax$ . Esto sugiere la idea de elegir el nuevo origen en  $O' = (0, b)$  y su ecuación en el nuevo sistema es:

$$y' = ax'$$

que corresponde a una recta que pasa por el origen.

- ] Si tenemos una circunferencia con ecuación  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Eligiendo el nuevo origen en el punto  $O' = (a, b)$ , la ecuación en el nuevo sistema es:

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

que representa una circunferencia centrada en el origen  $O'$ .

- Usando una traslación de ejes podemos reescribir el cuadro de las nueve formas canónicas, encontrando ecuaciones en que aparecen ahora las variables en primer grado, por ejemplo, la ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} - 1 = 0$$

representa una elipse con centro en  $(h, k)$ , pero en general la encontraremos en la forma  $b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2ky + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$  y mediante operaciones algebraicas, completación de cuadrados, se puede llegar a la forma canónica trasladada.

### Ejemplo

1. La ecuación  $x^2 + 2\sqrt{2}x + y^2 - 2y - 1 = 0$  representa un círculo con centro en el punto  $(-\sqrt{2}, 1)$  y radio  $r = 2$ . Pues al completar los cuadrados en  $x$  y en  $y$ , nos queda:

$$(x^2 + 2\sqrt{2}x + 2) + (y^2 - 2y + 1) = 1 + 2 + 1,$$

es decir,

$$(x + \sqrt{2})^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

2. La ecuación  $16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$  representa una elipse. En efecto, la ecuación puede transformarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 16(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 10y) + 225 &= 0 \\ 16(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 + 10y + 25) + 225 &= 144 + 225 \\ 16(x - 3)^2 + 9(y + 5)^2 &= 144 \\ \frac{(x - 3)^2}{9} + \frac{(y + 5)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación representa una elipse con centro en el punto  $(3, -5)$ . Como  $a = 3$  y  $b = 4$ , su eje mayor, donde se encuentran sus focos, es paralelo al eje  $Y$ .  $c^2 = b^2 - a^2$  implica que  $c = \sqrt{7}$ , por tanto las coordenadas de los focos son:  $(3, -5 + \sqrt{7})$ ,  $(3, -5 - \sqrt{7})$ .

3. Con cálculos similares puede demostrarse que la ecuación  $3x^2 - 16y^2 - 6x + 64y - 13 = 0$  representa la hipérbola

$$\frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(y - 2)^2}{3} = 1.$$

4. La ecuación  $3x^2 - 6x + 2 - y = 0$  representa una parábola. Completando el cuadrado en  $x$  nos queda:

$$\begin{aligned} 3(x^2 - 2x + 1) + 2 &= y + 3 \\ 3(x - 1)^2 &= y + 1 \\ 3(x')^2 &= y' \end{aligned}$$

Considerando la traslación:  $x' = x - 1$  y  $y' = y + 1$ , por lo cual el vértice de la parábola está en el punto  $(1, -1)$  y se abre hacia arriba.

### Rotación de los ejes coordenados

Una rotación de los ejes consiste en girar los ejes  $X$  e  $Y$  en sentido contrario a los punteros del reloj en un ángulo  $\phi$  manteniendo fijo el origen. El siguiente teorema nos dice cómo se relacionan las coordenadas de un mismo punto antes y después de la rotación.

**Teorema 2.6.11** Las ecuaciones que describen una rotación de ejes son:

$$(R) \quad \begin{cases} x &= x' \cos \phi - y' \sin \phi \\ y &= x' \sin \phi + y' \cos \phi \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$(R') \quad \begin{cases} x' = x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi \\ y' = -x \operatorname{sen} \phi + y \cos \phi \end{cases}$$

**Demostración:**

De la figura 2.6.17

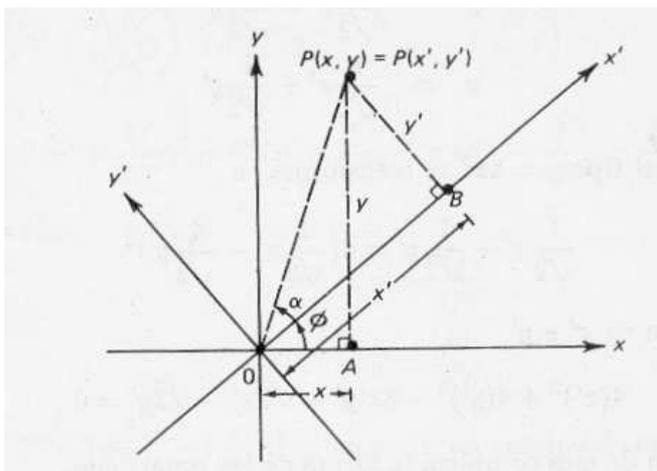


Figura 2.6.17: Rotación de ejes

tenemos que:

$$x = \overline{OA} = \overline{OP} \cos(\phi + \alpha)$$

$$y = \overline{AP} = \overline{OP} \operatorname{sen}(\phi + \alpha)$$

como

$$\operatorname{sen}(\phi + \alpha) = \operatorname{sen} \phi \cos \alpha + \cos \phi \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos(\phi + \alpha) = \cos \phi \cos \alpha - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \alpha$$

así

$$x = \overline{OP}(\cos \phi \cos \alpha - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \alpha) \quad (*)$$

$$y = \overline{OP}(\operatorname{sen} \phi \cos \alpha + \cos \phi \operatorname{sen} \alpha) \quad (**)$$

Del triángulo  $OBP$  podemos deducir que  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{y'}{\overline{OP}}$ ; y  $\cos \alpha = \frac{x'}{\overline{OP}}$ . Es decir,

$$\left. \begin{aligned} y' &= \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha \\ x' &= \overline{OP} \operatorname{cos} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

reemplazando (\*\*\*) en (\*) y (\*\*) se obtiene la ecuación (R). ■

Para conocer la ecuación de una curva  $F(x, y) = 0$  después de una rotación de los ejes en un ángulo  $\phi$ , debemos reemplazar  $x$  e  $y$  por las expresiones respectivas de (R) obteniendo una ecuación de la forma  $F(x' \operatorname{cos} \phi - y' \operatorname{sen} \phi, x' \operatorname{sen} \phi + y' \operatorname{cos} \phi) = 0$ .

Observemos que las ecuaciones (R) y (R') son de primer grado, así la ecuación de la curva en  $x', y'$  también es de segundo grado. Además usando la fórmula del cuadrado del binomio, es fácil deducir que en este caso  $x, y$  o  $x', y'$  aparecen en la ecuación formando productos mixtos.

**Ejemplo** Si hacemos una rotación de los ejes en un ángulo  $\phi = \frac{\pi}{4}$ , tenemos que  $x, y$  satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{aligned}$$

Entonces una parábola del tipo  $y = 4x^2$  se transforma en

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2.$$

Lo que nos da la ecuación en  $x'$  e  $y'$ :

$$4(x')^2 + 4(y')^2 - 8x'y' - \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' = 0.$$

Observe que una rotación de ejes complica la forma de las ecuaciones.

### La ecuación general de segundo grado

Veremos ahora que mediante rotaciones y traslaciones paralelas de los ejes, toda ecuación de segundo grado puede ser reducida a una de las nueve formas canónicas.

**Teorema 2.6.12** La ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.38)$$

representa una de las nueve formas canónicas del cuadro 1.

**Demostración: Primer paso:** Haciendo una rotación apropiada de ejes podemos hacer desaparecer el término mixto, es decir, queremos obtener una ecuación de la forma:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

donde el coeficiente  $B'$  que acompaña al producto  $x'y'$  sea nulo. Para ello usaremos la fórmula (R) en (2.38), lo que nos da:

$$A(x' \cos \phi - y' \sin \phi)^2 + B(x' \cos \phi - y' \sin \phi)(x' \sin \phi + y' \cos \phi) + C(x' \sin \phi + y' \cos \phi)^2 + D(x' \cos \phi - y' \sin \phi) + E(x' \sin \phi + y' \cos \phi) + F = 0$$

Desarrollando los productos y reduciendo los términos semejantes obtenemos que:

$$\begin{aligned} B' &= -2A \sin \phi \cos \phi + B(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + 2C \sin \phi \cos \phi \\ &= B \cos(2\phi) - (A - C) \sin(2\phi) \end{aligned}$$

Igualando  $B' = 0$ , tenemos que

$$\cotan(2\phi) = \frac{A - C}{B} \quad (2.39)$$

como el recorrido de la función cotangente es  $\mathbb{R}$ , existe  $\phi$  tal que la ecuación (2.39) se satisface.

**Segundo paso:** Tenemos una ecuación de la forma:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \quad (2.40)$$

Como hemos visto, para hacer desaparecer los términos en primer grado es necesario completar los cuadrados en  $x$  e  $y$  para hacer una traslación apropiada de ejes:

1. Si  $A' \neq 0$  y  $C' \neq 0$ , se tiene:

$$A'(x'^2 + \frac{D'}{A'}x' + (\frac{D'}{2A'})^2) + C'(y'^2 + \frac{E'}{C'}y' + (\frac{E'}{2C'})^2) + F' - \frac{D'^2}{4A'^2} - \frac{E'^2}{4C'^2} = 0$$

$$A'(x' + \frac{D'}{2A'})^2 + C'(y' + \frac{E'}{2C'})^2 + (F' - \frac{D'^2}{4A'^2} - \frac{E'^2}{4C'^2}) = 0$$

elegimos la traslación:

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \frac{D'}{2A'} \\ y'' &= y' + \frac{E'}{2C'} \end{aligned}$$

y haciendo  $F'' = F' - \left(\frac{D'}{2A'}\right)^2 - \left(\frac{E'}{2C'}\right)^2$  y hagamos un cambio de notación  $F' = F''$ , resulta:

$$A'(x'')^2 + C'(y'')^2 + F' = 0$$

Si además  $F' \neq 0$ , podemos escribir:

$$\frac{(x'')^2}{\frac{-F'}{A'}} + \frac{(y'')^2}{\frac{-F'}{C'}} - 1 = 0$$

es decir, corresponde a una ecuación del tipo (1), (2) ó (4), según sean los signos de  $A'$ ,  $C'$  y  $F'$ .

Si  $F' = 0$  tenemos:

$$\frac{(x'')^2}{\frac{1}{A'}} + \frac{(y'')^2}{\frac{1}{C'}} = 0$$

obtenemos una ecuación del tipo (3) o (5) dependiendo nuevamente de los signos de  $A'$  y  $C'$ .

2. Si  $A' \neq 0$  y  $C' = 0$ , pero  $E' \neq 0$  se tiene:

$$A' \left( x' + \frac{D'}{2A'} \right)^2 + E' \left( y' + \frac{F'}{E'} \right) = 0$$

con la traslación

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \frac{D'}{2A'} \\ y'' &= y' + \frac{F'}{E'} \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación  $A'(x'')^2 + E'(y'') = 0$ , dividiendo por  $A'$

$$(x'')^2 + \frac{E'}{A'} y'' = 0$$

que corresponde a una ecuación del tipo (6) y representa una parábola en torno al eje  $Y$ .

3. Si  $A' = 0$ ,  $C' \neq 0$ ,  $D' \neq 0$ , intercambiando los roles de  $x$  e  $y$  se obtiene el mismo resultado, es decir, la ecuación representa una parábola.

4. Si  $A' \neq 0$ ,  $C' = 0$  y  $E' = 0$ , la ecuación (2.40) puede escribirse:  $A'(x' + \frac{D'}{2A'})^2 + F' = 0$ . Haciendo:

$$x'' = x' + \frac{D'}{2A'}$$

$$y'' = y$$

la ecuación queda  $A'(x'')^2 + F' = 0$ , de donde, dividiendo por  $A'$ :

$$(x'')^2 + \frac{F'}{A'} = 0$$

que corresponde a una ecuación del tipo (7), (8) o (9).

5. Se obtiene el mismo resultado de (4), intercambiando los roles de  $x$  e  $y$  cuando  $A' = 0$ ,  $C' \neq 0$  y  $D' = 0$ .

Así hemos visto que toda ecuación de segundo grado puede reducirse a una de las formas canónicas de nuestro cuadro. ■

### Clasificación de las curvas de segundo grado según los coeficientes de la ecuación

La ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.41)$$

la podemos resolver como una ecuación de segundo grado con respecto a  $y$ , suponiendo que  $C \neq 0$ . Entonces,

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C} \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2CD)x + (E^2 - 4CF)} \quad (2.42)$$

Es decir  $y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm Y$ ; donde  $Y = \frac{1}{2C} \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2CD)x + (E^2 - 4CF)}$ .

Según los valores que pueda tomar  $Y$ , veremos qué tipo de curva representa la ecuación (2.41), trazando la recta  $y = -\frac{Bx + E}{2C}$  y aumentándola o disminuyéndola según los valores que toma  $Y$ . Observemos primero que el número  $Y$  se debe restar y sumar a la recta en cada  $x$ , por lo cual el gráfico de la curva es simétrico con respecto a la recta  $y = -\frac{Bx + E}{2C}$ .

Por esta razón dicha recta puede ser considerada el **diámetro** de la curva.

Analizaremos algebraicamente la forma que toma la curva según el signo del coeficiente del trinomio de segundo grado en  $x$  que aparece bajo el signo de la raíz.

1. Si  $B^2 - 4AC < 0$ , entonces el trinomio bajo el radical es negativo para los valores de  $|x| \leq M$ , para algún  $M \in \mathbb{R}^+$ . Además si  $|x| \leq M$ , entonces  $Y$  es acotado y así también  $y$  permanece acotado. Vemos así que la curva  $y$  es acotada en todos los sentidos y por tanto representa una elipse.
2. Si  $B^2 - 4AC > 0$ , tenemos que el trinomio bajo el radical representa un número real cuando  $|x| \geq M$ , para algún  $M \in \mathbb{R}^+$ ; como ahora  $x$  puede crecer o decrecer en forma indefinida, los valores de  $Y$ , y por tanto de la curva  $y$ , crecen hacia  $+\infty$  o decrecen hacia  $-\infty$ . La curva que crece indefinidamente en ambos sentidos, tanto para la variable  $x$  como para la variable  $y$  es una hipérbola.
3. Si  $B^2 - 4AC = 0$ , entonces  $Y = \frac{1}{2C} \sqrt{2(BE - 2CD)x + (E^2 - 4CF)}$ .

Si además  $BE - 2CD > 0$ , el binomio bajo la raíz es positivo si  $x \geq M$ , donde  $M$  es la raíz de la ecuación de primer grado en  $x$ . Es decir,  $x$  puede crecer hacia infinito y proporcionalmente crece también  $Y$ . Entonces tenemos que  $y$  crece hacia el lado de los  $x$  positivos indefinidamente a ambos lados del diámetro.

Si  $BE - 2CD < 0$ , se tiene un resultado del mismo tipo, pero hacia el lado de los  $x$  negativos.

El análisis nos permite concluir que  $y$  es una curva acotada en una dirección y no acotada en la dirección opuesta, por tanto  $y$  representa una parábola.

Ejemplo. Dada la ecuación

$$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$$

se tiene

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-(x-1)(x-5)}$$

Por tanto, la curva tiene por diámetro a la recta  $y = \frac{1}{2}x + 1$  y está comprendida entre las rectas  $x = 1$  y la recta  $x = 5$ . El valor más grande de  $y$  se obtiene en el punto medio, es decir, para  $x = 3$ , al que le corresponden los valores  $y = \frac{3}{2}$  e  $y = \frac{7}{2}$ . El punto medio de estos nos da la ordenada del centro de la elipse 5. Así el centro de la curva es el punto  $(3, 5)$ .

### Algunas curvas de grado mayor que dos

En esta subsección presentaremos un par de casos de curvas de grado superior a dos en alguna de sus variables. Usando la geometría analítica podemos, a partir de sus definición como lugar geométrico, tal como hicimos con las curvas de grado dos, obtener la ecuación algebraica que satisfacen dichos puntos.

1. **La cisoide**

Dada una circunferencia  $C$  y una tangente a ella, sea  $A$  el punto de contacto y  $O$  el punto diametralmente opuesto. Se hace pasar una secante por  $O$  que corta a la circunferencia en un punto  $I$  y a la recta tangente en el punto  $B$ . Sobre esta secante, a partir del punto  $O$ , se toma una longitud  $\overline{OM}$ , igual a  $\overline{IB}$ . ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos  $M$  así obtenidos?

**Solución:** Observemos que este lugar geométrico es simétrico respecto a  $\overline{OA}$ . La distancia  $\overline{IB}$  aumenta a medida que la secante se aleja de  $\overline{OA}$ , y por tanto también crece  $\overline{OM}$ . El punto  $M$  se aleja al infinito cuando la secante  $\overline{OB}$  se convierte en tangente en  $O$ .

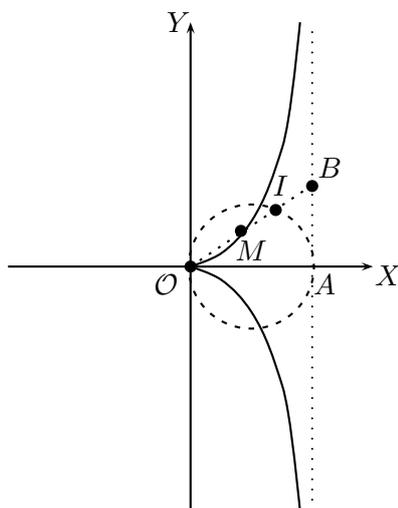


Figura 2.6.18: Cisoide

Sean  $(x, y)$  las coordenadas de  $M$ . Tenemos  $\overline{OP} = x$ ,  $\overline{MP} = y$  y  $\overline{OA} = a$ . Por semejanza de triángulos, se tiene

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{IQ}}{\overline{OQ}}$$

es decir:

$$\frac{y}{x} = \frac{\overline{IQ}}{\overline{OQ}}$$

$\overline{OM} = \overline{IB}$ ,  $\overline{OP} = \overline{AQ}$ , por tanto:  $\overline{OQ} = \overline{OA} - \overline{AQ} = \overline{OA} - \overline{OP} = a - x$ , así:

$$\frac{y}{x} = \frac{\overline{IQ}}{a - x}$$

pero  $\overline{IQ}^2 = \overline{OQ} \overline{AQ} = (a-x)x$ , luego:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x\overline{IQ}}{a-x} \\ y^2 &= \frac{x^2(a-x)x}{(a-x)^2} \\ y^2 &= \frac{x^3}{a-x} \end{aligned} \quad (2.43)$$

la expresión (2.43) representa la ecuación de la **cisoide**.

Observe que esta curva tiene una ecuación de tercer grado.

## 2. Lemniscata de Bernoulli

Encuentre el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias a dos puntos fijos  $F_1$  y  $F_2$  sea igual a una constante dada.

**Solución:** Tomando la recta que contiene a los puntos  $F_1$  y  $F_2$  como eje  $X$ , pasando el eje  $Y$  por el punto medio del trazo  $\overline{F_1F_2}$ , llamaremos  $2c = \overline{F_1F_2}$  y  $a^2$  a la constante. Sea  $P = (x, y)$  un punto del lugar geométrico, entonces,

$$d(F_1, P) \cdot d(F_2, P) = a^2 \iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2$$

Elevando al cuadrado toda la ecuación y desarrollando los productos, nos queda la ecuación de cuarto grado en  $y$ :

$$y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0. \quad (2.44)$$

Como las dos variables aparecen en potencias pares, la curva es simétrica con respecto a ambos ejes y el origen.

$$y^2 = \frac{-2(x^2 + c^2) \pm \sqrt{4(x^2 + c^2)^2 - 4[(x^2 - c^2)^2 - a^4]}}{2}$$

La cantidad subradical se reduce a  $4(4c^2x^2 + a^4)$  que es siempre positiva, entonces  $y^2$  existe como número real.

Si  $(x^2 - c^2)^2 - a^4$  es positivo, los valores de  $y^2$  tienen el mismo signo y como su suma es  $-2(x^2 + c^2)$ , entonces los dos valores de  $y^2$  son

negativos y por tanto los cuatro valores de  $y$  son complejos.

Para que la ecuación tenga raíces reales, es necesario que:

$$(x^2 - c^2)^2 - a^4 < 0$$

lo que es equivalente a

$$(x^2 - c^2 - a^2)(x^2 - c^2 + a^2) < 0$$

por lo tanto,

$$x^2 < a^2 + c^2 \quad \text{y} \quad x^2 > c^2 - a^2$$

entonces uno de los valores de  $y^2$  es positivo y el otro negativo.

Ahora tenemos que analizar los tres casos posibles:  $a < c$ ,  $a = c$ ,  $a > c$ .

Veremos solamente el caso  $a = c$ . Los otros se dejarán como ejercicios.

Cuando  $a = c$ , la ecuación se escribe como:

$$y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2) - c^4 = 0.$$

Si  $x = 0$ , entonces  $y^4 + 2c^2y^2 = 0$ , por lo cual sólo es posible que  $y = 0$ .

Si  $x = c\sqrt{2}$  entonces  $y^4 + 6c^2y^2 = 0$ , por tanto, nuevamente  $y$  debe ser igual a 0.

Como las dos variables aparecen en potencias pares, existe simetría con respecto a ambos ejes. La curva resultante se llama **lemniscata de Bernoulli** que está representada en la figura 2.6.19.

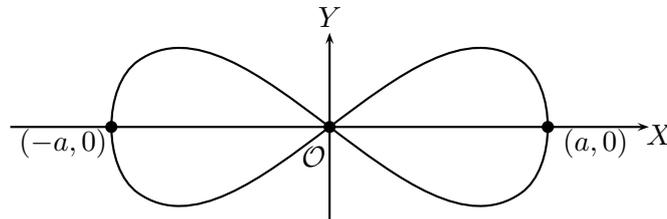


Figura 2.6.19: Lemniscata de Bernoulli

### Ejercicios resueltos

- Determine el lugar geométrico de los puntos del plano de coordenadas  $(x, y)$  tales que  $|x| + |y| = 1$ .

**Solución:**

- Si  $x \geq 0, y \geq 0$ , entonces  $|x| + |y| = x + y = 1$ . implica  $y = 1 - x$ .
- Si  $x \leq 0, y \geq 0$ , entonces  $|x| + |y| = -x + y = 1$ . implica  $y = 1 + x$ .
- Si  $x \leq 0, y \leq 0$ , entonces  $|x| + |y| = -x - y = 1$ . implica  $y = -1 - x$ .
- Si  $x \geq 0, y \leq 0$ , entonces  $|x| + |y| = x - y = 1$ . implica  $y = x - 1$ .

En consecuencia los puntos cuyas coordenadas satisfacen  $|x| + |y| = 1$ , es el cuadrado con vértices en  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ .

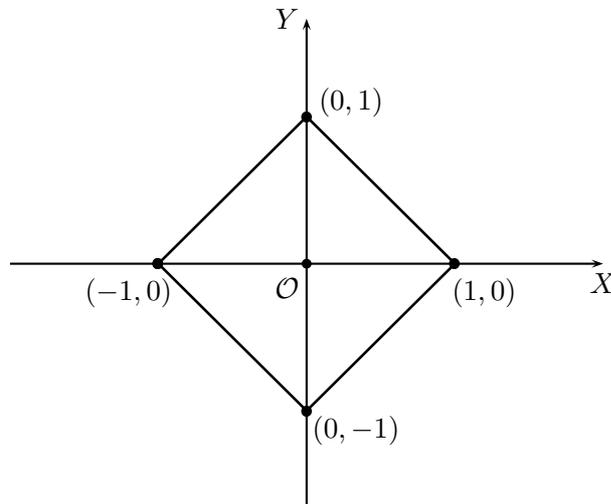


Figura 2.6.20

## 2. Resolución geométrica de un sistema de ecuaciones de primer grado o lineales.

Demuestre que el conjunto de las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

donde  $a, b$  por un lado y  $a', b'$  por otro no se anulan simultáneamente, es el conjunto de los puntos de intersección de las dos rectas de ecuaciones:

$$ax + by - c = 0, \quad a'x + b'y - c' = 0.$$

### Solución:

Es una aplicación directa de lo dicho en la subsección 2.6.1 sobre intersección de curvas y del hecho que una ecuación de la forma  $ax + by - c = 0$ , en que  $a$  y  $b$  no se anulan al mismo tiempo, es una línea recta.

En particular el sistema tiene una única solución si las rectas no son paralelas, es decir, cuando  $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$ . El sistema no tiene solución si las rectas son paralelas, es decir, cuando  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ , con  $a \neq a', b \neq b'$ . El sistema tiene infinitas soluciones cuando ambas rectas son iguales.

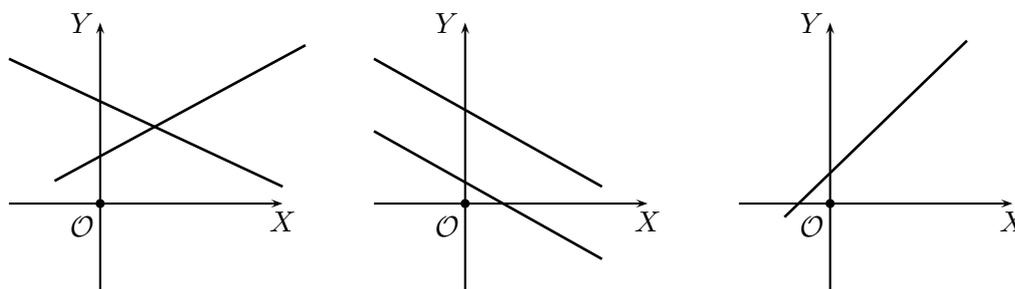


Figura 2.6.21

### 3. Distancia de un punto a una recta

Dado un punto  $P$  y una recta  $L$ , encontrar la distancia de  $P$  a  $L$ .

**Solución:**

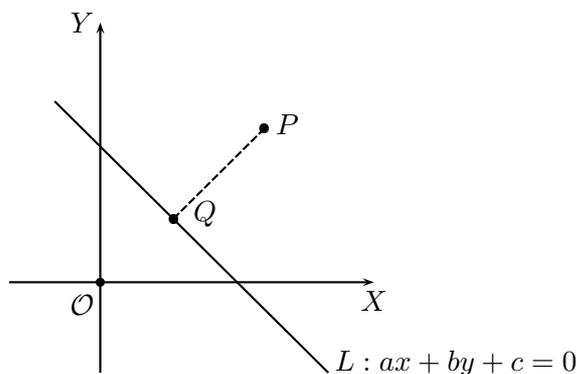


Figura 2.6.22: Distancia desde un punto a una recta

Si el punto  $P$  pertenece a la recta, entonces la distancia es cero. Por lo cual supondremos que  $P$  no es un punto de la recta  $L$ . Geométricamente la distancia es el trazo de la perpendicular trazada desde  $P$  hasta la recta  $L$ .

Sean  $ax + by + c = 0$  la ecuación de la recta  $L$ ,  $(x_0, y_0)$  las coordenadas del punto  $P$  y  $(x^*, y^*)$  las coordenadas de  $Q$ , punto de intersección entre la recta  $L$  y la recta ortogonal a  $L$  que pasa por  $P$ . Así tenemos que

$$d = \overline{PQ} = \sqrt{(x_0 - x^*)^2 + (y_0 - y^*)^2}.$$

Para poder calcular  $d$  debemos encontrar las coordenadas de  $Q$ , lo que nos lleva a encontrar la ecuación de la recta que pasa por  $P$  y que es perpendicular a  $L$ .

Como  $L$  tiene pendiente  $-\frac{a}{b}$ , la ecuación de la recta perpendicular a  $L$  es:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0).$$

La que también puede escribirse como

$$ay - bx = ay_0 - bx_0.$$

según el ejercicio resuelto 2, el punto  $Q$  es la intersección de las dos rectas y, por tanto, tiene por coordenadas la solución del sistema:

$$\begin{aligned} ay - bx &= ay_0 - bx_0 \\ by + ax &= -c. \end{aligned}$$

Cuya resolución algebraica nos da los valores:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} \\ y^* &= \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} (\overline{PQ})^2 &= (x_0 - x^*)^2 + (y_0 - y^*)^2 \\ &= \left[ \frac{(a^2 + b^2)x_0 - b^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2 + b^2} \right]^2 + \left[ \frac{(a^2 + b^2)y_0 - a^2y_0 + abx_0 + bc}{a^2 + b^2} \right]^2 \\ &= \left[ \frac{a^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2 + b^2} \right]^2 + \left[ \frac{b^2y_0 + abx_0 + bc}{a^2 + b^2} \right]^2 \\ &= \left[ \frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \right]^2 + \left[ \frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \right]^2 \\ &= \frac{a^2(ax_0 + by_0 + c)^2 + b^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- Recuerde que la simetral de un triángulo es la perpendicular trazada en el punto medio de un lado. Demuestre que las tres simetrales de un triángulo concurren en un mismo punto que equidista de los tres vértices del triángulo, por lo que constituye el centro de la circunferencia circunscrita.

**Solución:** Según la ecuación (2.27), la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  es  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Usando la ecuación (2.28), la recta perpendicular a ella tiene pendiente  $-\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ . Así la ecuación de la recta normal a la que pasa por  $P_1$  y  $P_2$  y que a su vez pasa por el punto medio del trazo  $\overline{P_1P_2}$  es, usando la ecuación (2.28),

$$y - \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{y_1 - y_2} \left( x - \frac{x_2 + x_1}{2} \right) \quad (2.45)$$

Haciendo pasar uno de los ejes por un lado del triángulo, tenemos una situación como en la figura 2. 6. 23.

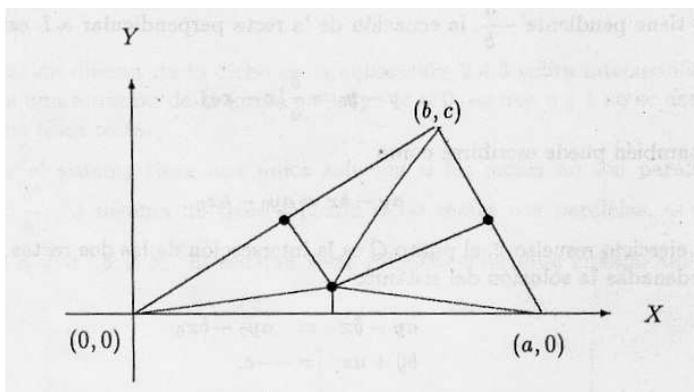


Figura 2.6.23: Simetrales del triángulo

Los vértices del triángulo son  $(0,0)$ ,  $(a,0)$ ,  $(b,c)$ . Usando (2.45) podemos encontrar la ecuación de cada una de las rectas que contienen a las medianas del triángulo. Sean:  $M_1 = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$ ,  $M_2 = \left(\frac{(a+b)}{2}, \frac{c}{2}\right)$ ,  $M_3 = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ , los puntos medios de cada lado.

Llamando  $L_i$  a la recta que pasa por  $M_i$  y es perpendicular al respectivo lado del triángulo, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$L_1: x = \frac{a}{2} \quad (2.46)$$

$$L_2: y - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{-c} \left( x - \frac{a+b}{2} \right) \quad (2.47)$$

$$L_3: y - \frac{c}{2} = \frac{-b}{c} \left( x - \frac{b}{2} \right) \quad (2.48)$$

Trabajando algebraicamente las ecuaciones (2.46), (2.47), (2.48), tenemos:

$$L_1: x = \frac{a}{2} \quad (2.49)$$

$$L_2: 2(a-b)x - 2cy = a^2 - b^2 - c^2 \quad (2.50)$$

$$L_3: 2bx + 2cy = b^2 + c^2 \quad (2.51)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (2.49) y (2.51) obtenemos el punto

$$x = \frac{a}{2} ; y = \frac{b^2 + c^2 - ab}{2c}$$

Reemplazando estas coordenadas en la ecuación (2.50), podemos verificar con un cálculo simple que dicho punto también pertenece a la recta  $L_2$ .

Verificar que este punto equidista de los vértices del triángulo se deja al lector.

### 5. Resolución gráfica de inecuaciones lineales con dos variables.

Sean  $a, b, c$  números reales fijos,  $a$  y  $b$  no se anulan simultáneamente.

- Demuestre que toda recta de ecuación  $ax + by + c = 0$  divide al plano en dos semiplanos tales que la expresión  $ax + by + c$  es positiva para las coordenadas de los puntos de uno de los semiplanos y es negativa para las coordenadas de los puntos del otro semiplano.
- Deduzca que el conjunto de las soluciones de la inecuación  $ax + by < c$  (respectivamente  $ax + by > c$ ), es uno de los semiplanos limitados por la recta  $ax + by + c = 0$ .
- Deduzca que el conjunto de las soluciones de la inecuación  $ax + by \leq c$  (respectivamente  $ax + by \geq c$ ), es uno de los semiplanos incluyendo la recta  $ax + by - c = 0$ .
- Deduzca que el conjunto de las soluciones de un sistema de inecuaciones lineales en  $\mathbb{R}^2$  es la intersección de los semiplanos que representan las soluciones de cada inecuación del sistema.

#### Solución:

- Dado que  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , por tricotomía la expresión  $ax + by + c$  puede ser positiva, negativa o nula.

Sabemos que  $ax + by + c = 0$  si y sólo si  $x$  e  $y$  son las coordenadas de la recta  $ax + by = -c$ . Por tanto, los restantes puntos de  $\mathbb{R}^2$  pueden hacer positiva o negativa la expresión  $ax + by + c$ .

Consideremos un punto fuera de la recta  $ax + by + c = 0$ , supondremos  $b > 0$ , pues si no multiplicamos la ecuación de la recta por  $-1$ .

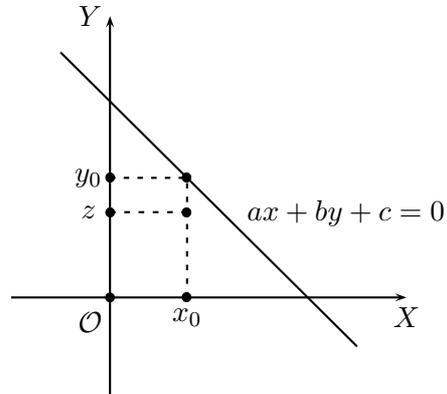


Figura 2.6.24

Sea  $(x_0, z)$  un punto bajo la recta. Reemplazando  $x$  en la ecuación de la recta obtenemos el número  $y_0 = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}$ . De la figura podemos ver claramente que  $y_0 > z$ . Así,

$$\begin{aligned} -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} &> z \\ -ax_0 - c &> bz, \text{ pues } b > 0 \\ -ax_0 - bz - c &> 0 \\ ax_0 + bz + c &< 0. \end{aligned}$$

b) Esto como los puntos siguientes son aplicaciones inmediatas de la parte (a) y de las propiedades elementales de los conjuntos.

6. Resuelva gráficamente el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2 &\leq 0 \\ x + y - 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

**Solución:**

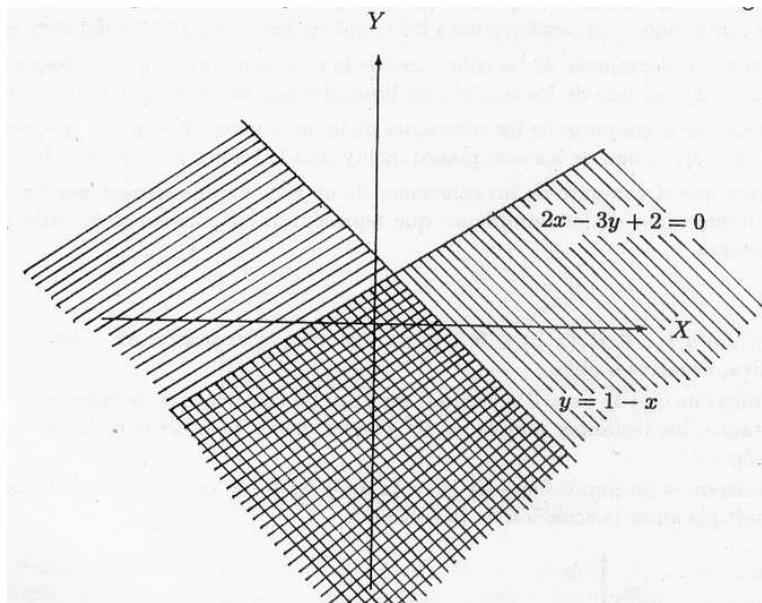


Figura 2.6.25

Primero debemos graficar cada una de las rectas  $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ ,  $y = 1 - x$ . La solución al sistema es la región común bajo ambas rectas tal como se muestra en la figura.

7. Una caja contiene monedas de 20 gramos y de 30 gramos.
- Escriba el sistema de inecuaciones que describe el peso total de las monedas que está comprendido estrictamente entre 300 y 330 gramos.
  - Determine todas las posibles soluciones al problema.
  - Determine gráficamente los puntos cuyas coordenadas enteras positivas verifican las hipótesis del problema.

**Solución:**

- a) Sea  $x$  el número de monedas de 20 gramos y sea  $y$  el número de monedas de 30 gramos. Entonces, tenemos:

$$20x + 30y > 300$$

$$20x + 30y < 330.$$

Este sistema puede ser reducido a

$$2x + 3y > 30$$

$$2x + 3y < 33$$

- b) Del gráfico se deduce que todas las posibles soluciones al problema es la región del primer cuadrante comprendida entre ambas rectas, sin incluirlas a ellas. las soluciones negativas no tienen sentido en el contexto del problema.
- c) Del gráfico vemos que las soluciones con coordenadas enteras son:  $(5, 7)$ ,  $(8, 5)$ ,  $(9, 4)$ ,  $(11, 3)$ ,  $(14, 1)$ .

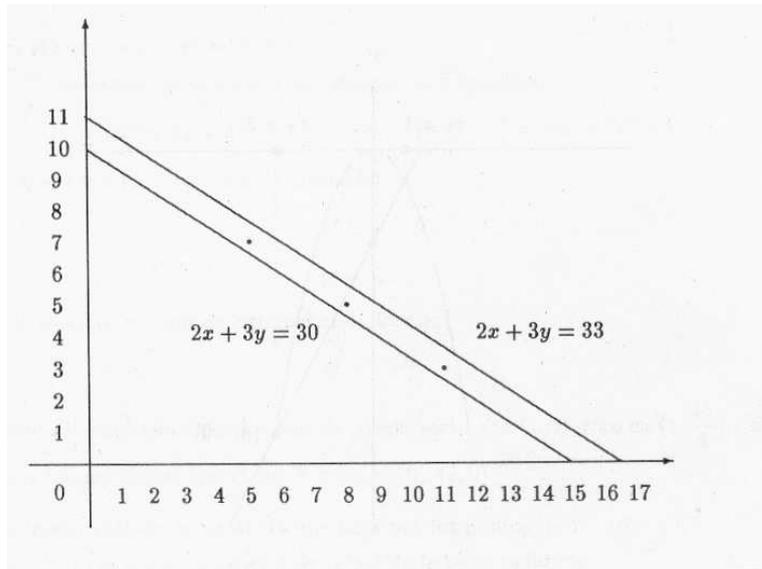


Figura 2.6.26

### 8. Resolución geométrica de una ecuación de segundo grado

- a) Demuestre que las raíces de la ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , corresponden a los puntos de intersección de una parábola con una recta.
- b) Obtenga geoméricamente las soluciones de la ecuación  $-x^2 + 2x + 3 = 0$ .

**Solución:**

- a) La ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ , con  $a \neq 0$ , puede ser escrita como

$$ax^2 = -bx - c,$$

por lo tanto, los puntos que satisfacen dicha relación pueden ser considerados, de acuerdo a lo dicho en la subsección 2.6.1, como la intersección de la parábola  $y = ax^2$  con la recta  $y = -bx - c$ .

- b) De acuerdo a lo visto en el ítem anterior, las soluciones de la ecuación  $-x^2 + 2x + 3 = 0$  son los puntos de intersección de la parábola  $y = -x^2$  y la recta  $y = -2x - 3$ .

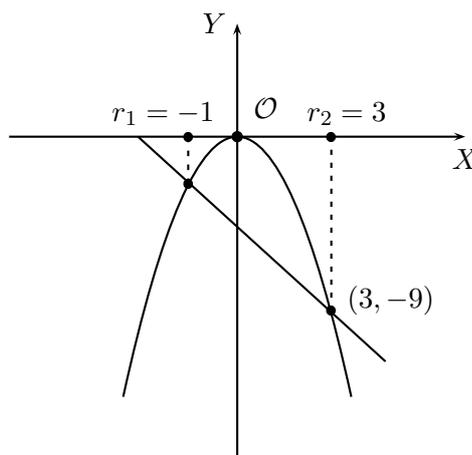


Figura 2.6.27

9. **Estudio de la parábola**  $y = ax^2 + bx + c$ .

Demuestre que la ecuación  $y = ax^2 + bx + c$  representa una parábola. Encuentre su vértice, foco, directriz y los puntos de intersección con el eje  $X$ .

**Solución:** Completando el cuadrado de binomio en  $x$  podemos escribir:

$$y = ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right] + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Haciendo la traslación de los ejes en la forma:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{b}{2a} \\ y' &= y - \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

La ecuación puede escribirse como

$$y' = a(x')^2,$$

la cual representa una parábola con vértice en el nuevo origen  $O'$  cuyas coordenadas en el antiguo sistema son

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Su directriz es la recta  $y = \frac{4ac - a^2 - b^2}{4a}$ , su foco es el punto  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac + a^2 - b^2}{4a})$ .

La curva corta al eje  $X$  en los puntos  $(\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0)$  si  $b^2 - 4ac > 0$ . Corta al eje

$X$  en un único punto  $(\frac{b}{2a}, 0)$  si  $b^2 - 4ac = 0$ . No corta al eje  $X$  si  $b^2 - 4ac < 0$ .

10. Caracterice la curva  $y = -x^2 + 2x + 3$ .

**Solución:** Completando el cuadrado de binomio en  $x$  tenemos:

$$y = -x^2 + 2x + 3 = -[(x^2 - 2x + 1) - 3 - 1] = -(x - 1)^2 + 4.$$

Por tanto,  $y - 4 = -(x - 1)^2$ . Así, la traslación

$$x' = x - 1$$

$$y' = y - 4$$

nos permite escribir la ecuación original en la forma:

$$y' = -x'^2,$$

que representa la parábola abierta hacia abajo con vértice en  $(1, 4)$ , foco en  $(1, \frac{15}{4})$  y directriz  $y = \frac{17}{4}$ . Sus intersecciones con el eje  $X$  son  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$ .

11. Encuentre la ecuación de la parábola que pasa por los puntos  $(-2, 16)$ ,  $(0, 2)$  y  $(1, 4)$ .

**Solución:** Como la ecuación general de la parábola tiene la forma

$$y = ax^2 + bx + c,$$

ella está completamente determinada conociendo los valores de los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Para ello tenemos que si el punto  $(x, y)$  pertenece a la curva, entonces los números  $x$ ,  $y$ , satisfacen la ecuación de la curva. Por lo tanto, tenemos tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} a(-2)^2 + b(-2) + c &= 16 \\ a0^2 + b0 + c &= 2 \\ a1^2 + b1 + c &= 4. \end{aligned}$$

Que se reducen al sistema:

$$\begin{aligned}4a - 2b + c &= 16 \\c &= 2 \\a + b + c &= 4,\end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$a = 3, b = -1, c = 2.$$

Así, la ecuación de la parábola es  $y = 3x^2 - x + 2$

12. Encuentre la ecuación de un círculo que pasa por tres puntos dados.

**Solución:** Si los tres puntos son colineales, entonces el problema no tiene solución.

Sean  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3)$ , tres puntos del plano no colineales. Cómo encontrar el centro del círculo, lo hemos visto en el ejercicio 1. Pero también se puede hacer usando la ecuación de la circunferencia ( 2.29).

Sea  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  la ecuación del círculo pedido, por tanto cada punto  $P_i$  satisface esta ecuación; así obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas  $a, b, r$ .

$$\begin{aligned}(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &= r^2 \\(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 &= r^2 \\(x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 &= r^2\end{aligned}$$

Desarrollando los cuadrados podemos escribir,

$$a^2 + b^2 - r^2 - 2x_1a - 2y_1b = -x_1^2 - y_1^2 \quad (2.52)$$

$$a^2 + b^2 - r^2 - 2x_2a - 2y_2b = -x_2^2 - y_2^2 \quad (2.53)$$

$$a^2 + b^2 - r^2 - 2x_3a - 2y_3b = -x_3^2 - y_3^2 \quad (2.54)$$

Restando las ecuaciones (2.52) y (2.53) y las ecuaciones (2.52) y (2.54), obtenemos:

$$2(x_2 - x_1)a + 2(y_2 - y_1)b = (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2)$$

$$2(x_3 - x_1)a + 2(y_3 - y_1)b = (x_3^2 - x_1^2) + (y_3^2 - y_1^2)$$

Este sistema puede ser resuelto usando regla de Cramer y obtenemos las coordenadas del centro:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) & 2(y_2 - y_1) \\ (x_3^2 - x_1^2) + (y_3^2 - y_1^2) & 2(y_3 - y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) \end{vmatrix}}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) \\ 2(x_3 - x_1) & (x_3^2 - x_1^2) + (y_3^2 - y_1^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \\ 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) \end{vmatrix}}$$

13. Dada la ecuación  $4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y - 11 = 0$ ,

- Escribirla en una de las formas canónicas.
- Encontrar las coordenadas de sus focos y de sus vértices.
- Encontrar las ecuaciones de sus directrices y calcular su excentricidad.
- Escribir la ecuación de la curva después de una rotación de los ejes en un ángulo  $\phi = \frac{\pi}{6}$ .

**Solución:**

- Completando los cuadrados en  $x$  y en  $y$ , la ecuación queda en la forma:  $4(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 36$ , la que es equivalente a  $\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{4}$ . Por tanto la curva representa una elipse.
- $a^2 = 9$  y  $b^2 = 4$ , entonces  $c^2 = 5$ .  
El centro de la elipse es el punto  $(2, -1)$ , por tanto las coordenadas de sus focos son:  $(2 + \sqrt{5}, -1)$  y  $(2 - \sqrt{5}, -1)$ .  
Los vértices son  $(5, -1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, -3)$ .
- Las directrices de la elipse son las rectas  $x = \pm \frac{a^2}{c} + 2$ . Así,  $x = \pm \frac{9}{\sqrt{5}} + 2$  y su excentricidad es  $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .
- Usando las fórmulas (R) del teorema 2.4.11, tenemos que:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \frac{\pi}{6} - y' \sin \frac{\pi}{6} \\ y &= x' \sin \frac{\pi}{6} + y' \cos \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Lo que nos da las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y &= \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de la elipse obtenemos:

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 - 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right) + 9\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 + 18\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) - 11 = 0.$$

Trabajando algebraicamente esta expresión llegamos finalmente a la nueva ecuación que tiene la forma:

$$21x'^2 + (36 - 32\sqrt{3})x' + 31y'^2 + (32 + 36\sqrt{3})y' + 10\sqrt{3}x'y' - 44 = 0.$$

14. Dada la ecuación de segundo grado  $2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7x + 1 = 0$ , determine la forma de la curva y escríbala en la forma canónica correspondiente.

**Solución:**  $A = 2, B = -3, C = 3, D = 1, E = -7, F = 1$ . Como  $B^2 - 4AC = -15 \leq 0$ , la curva representa una elipse.  $\text{tg}(2\phi) = \frac{B}{A-C} = 3$ . Usando tablas se tiene que  $\phi = 35^\circ 46' 57''$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \phi + B \cos \phi \sin \phi + C \sin^2 \phi \\ C' &= A \sin^2 \phi - B \cos \phi \sin \phi + C \cos^2 \phi \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} A' + C' &= A + C \\ A' - C' &= (A - C)(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + 2B \sin \phi \cos \phi \\ &= (A - C) \cos 2\phi + B \sin 2\phi \end{aligned}$$

Como  $\text{tg}(2\phi) = 3$ , podemos pensar en un triángulo rectángulo de catetos 3 y 1, entonces:

$$\begin{aligned} \sin 2\phi &= \frac{B}{\pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \\ \cos 2\phi &= \frac{A - C}{\pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en la expresión de  $A' - C'$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} A' - C' &= \frac{(A - C)^2}{\pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2}} + \frac{B^2}{\pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \\ A' - C' &= \pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2} \end{aligned}$$

Así obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} A' + C' &= 5 \\ A' - C' &= -\sqrt{10} \end{aligned}$$

Para la segunda ecuación se elige el signo menos, pues  $A'$  y  $C'$  deben tener el mismo signo. Por tanto,  $A' = \frac{5-\sqrt{10}}{2}$  y  $C' = \frac{5+\sqrt{10}}{2}$ . Para calcular los otros coeficientes, usaremos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} D' &= E \operatorname{sen} \phi + D \cos \phi \\ E' &= E \cos \phi - D \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \phi &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{10}}} \\ \cos \phi &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{10}}} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D' &= -7\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{10}}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{10}}} \\ E' &= -7\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{10}}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{10}}} \end{aligned}$$

Después de efectuar estos largos cálculos aritméticos obtenemos que  $F'' = -\frac{15}{9}$ , por lo cual la curva puede escribirse como

$$(5 - \sqrt{10})(x'')^2 + (5 + \sqrt{10})(y'')^2 = \frac{50}{9}$$

15. Sea la parábola  $y^2 = 2px$ , con foco  $F$ , directriz  $d$  y  $P(x^*, y^*)$  un punto cualquiera de ella.
- Calcule la tangente del ángulo  $\alpha$  formado por el eje  $X$  y el trazo  $\overline{FP}$ .
  - Calcule la tangente del ángulo  $\beta$  (pendiente de la recta tangente a la curva en el punto  $P(x^*, y^*)$ ).
  - Calcule  $\operatorname{tg} 2\beta$ .
  - Deduzca que  $\gamma = \beta$ , siendo  $\gamma$  el ángulo formado por la recta tangente y  $\overline{FP}$ .
  - Usando la ley de reflexión de un rayo de luz, deduzca el camino que sigue un rayo de luz que emerge del foco  $F$  de la parábola.

**Solución:**

- a) Como  $F = (\frac{p}{2}, 0)$ , el triángulo  $FAP$  es rectángulo en  $A$ , por tanto  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y^*}{x^* - \frac{p}{2}}$ .
- b) La pendiente de la recta tangente puede calcularse usando los puntos  $P$  y  $C$ . De la geometría clásica vemos que  $C$  es el punto medio del trazo  $\overline{DF}$ , así,  $C = (0, \frac{y^*}{2})$  y,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y^* - \frac{y^*}{2}}{x^*} = \frac{y^*}{2x^*}$$

Pero,  $2x^*p = y^{*2}$ , entonces  $\operatorname{tg} \beta = \frac{p}{y^*}$ .

- c) Usando la fórmula de la tangente para un ángulo doble tenemos:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\frac{2p}{y}}{1 - \frac{p^2}{y^2}} = \frac{2py}{y^2 - p^2} = \frac{2py}{2px - p^2} = \frac{y}{x - \frac{p}{2}}$$

- d) Por propiedad de los ángulos de un triángulo tenemos que,  $\alpha = \beta + \gamma$  y  $2\beta = \alpha$ , por tanto  $\gamma = \beta$ .

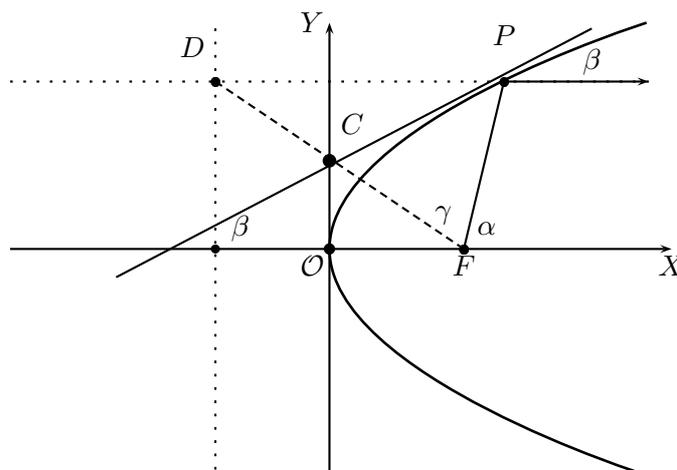


Figura 2.6.28 : Reflejo de la luz en la parábola

- e) En virtud de la ley de la reflexión de un rayo de luz, ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión, un rayo que emerja del foco  $F$  y que se refleje en un punto de la parábola, cuya dirección en ese punto es el de su recta tangente partirá en una dirección paralela al eje de simetría de la parábola. En esta

propiedad se basa la construcción de los telescopios reflectantes, los proyectores de seguimiento, los focos de los vehículos.

16. Dada la ecuación  $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100$ , determine qué curva representa y escríbala en la forma canónica correspondiente.

**Solución:**  $A = 4, B = -12, C = 9, D = 36, E = 0, F = 100$ .

Como  $B^2 - 4AC = 0$ , la ecuación representa una parábola.

$\operatorname{tg} \phi = -\frac{B}{2C} = \frac{2}{3}$ , por tanto,  $\operatorname{sen} \phi = \frac{2}{\sqrt{13}}$  y  $\operatorname{cos} \phi = \frac{3}{\sqrt{13}}$ . Usando una tabla vemos que  $\phi = 34^\circ 41' 25''$ . Usaremos las mismas fórmulas que en el ejercicio anterior para calcular los coeficientes.  $A' = 0, C' = 13, D' = -\frac{108}{\sqrt{13}}, E' = \frac{72}{\sqrt{13}}, F' = F$ . Así la ecuación se transforma en :

$$13(y')^2 - \frac{72}{\sqrt{13}}x' + \frac{72}{\sqrt{13}}y' + 100 = 0.$$

Completando el cuadrado en  $y'$  y sacando factor común  $-\frac{108}{\sqrt{13}}$  para los términos restantes nos queda:

$$13\left(y' - \frac{36}{13\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{108}{\sqrt{13}}\left(x' - \frac{3901}{27 \cdot 13\sqrt{13}}\right) = 0.$$

Haciendo la evidente traslación de ejes obtenemos:

$$13(y'')^2 - \frac{108}{\sqrt{13}}x'' = 0.$$

17. Demuestre que la ecuación  $x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0$  representa una circunferencia.

**Solución:**

$B^2 - 4AC = 1 - 4 = -3$ , por tanto, la curva es una elipse.

Para eliminar el término en  $xy$  es necesario una rotación en un ángulo  $\phi$  tal que  $\operatorname{cotan} 2\phi = \frac{A-C}{B} = 0$ , es decir,  $2\phi = \frac{\pi}{2}$  y por tanto,  $\phi = \frac{\pi}{4}$ .

Como  $\operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , las ecuaciones de la traslación tienen la forma:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación dada tenemos:

$$\frac{(x' - y')^2}{2} + \frac{(x' - y')(x' + y')}{2} + \frac{(x' + y')^2}{2} - \frac{2(x' - y')}{\sqrt{2}} - \frac{3(x' + y')}{\sqrt{2}} + 1 = 0.$$

Desarrollando los cuadrados y reduciendo los términos semejantes nos queda la ecuación:

$$3\sqrt{2}x'^2 + 3\sqrt{2}y'^2 - 10x' - 2y' + 2\sqrt{2} = 0.$$

Ahora debemos completar los cuadrados de binomio en  $x'$  e  $y'$ :

$$3\sqrt{2} \left[ x'^2 - \frac{10}{3\sqrt{2}}x' + \frac{25}{18} \right] + 3\sqrt{2} \left[ y'^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}y' + \frac{1}{18} \right] + 2\sqrt{2} - \frac{75\sqrt{2}}{18} - \frac{3\sqrt{2}}{18} = 0$$

$$3\sqrt{2} \left[ x' - \frac{5}{3\sqrt{2}} \right]^2 + 3\sqrt{2} \left[ y' - \frac{1}{3\sqrt{2}} \right]^2 - \frac{7\sqrt{2}}{3} = 0.$$

Dividiendo la ecuación por  $3\sqrt{2}$  se obtiene:

$$\left( x' - \frac{5}{3\sqrt{2}} \right)^2 + \left( y' - \frac{1}{3\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{7}{9}.$$

Así podemos ver que la ecuación representa una circunferencia de centro  $\left( \frac{5}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right)$  y radio  $\frac{\sqrt{7}}{3}$ .

18. Calcule las longitudes de las varillas verticales y diagonales de la viga parabólica de la figura 2.6.29, con los datos  $l$  y  $p$ .

**Solución:** Haciendo pasar los ejes en la forma descrita por la figura 2.4.22, tenemos que la ecuación de la parábola es:

$$y = p - \frac{4px^2}{l^2}.$$

Por tanto  $p_1 = \frac{3}{4}p$ ,  $d = \frac{1}{4}\sqrt{16p^2 + l^2}$ ;  $d_1 = d_2 = \frac{1}{4}\sqrt{9p^2 + l^2}$ .

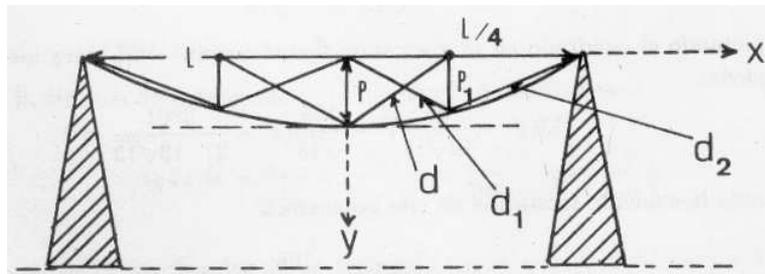


Figura 2.6.29: Viga Parabólica

### Ejercicios propuestos

- Determine el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas  $(x, y)$  satisfacen la relación  $\max\{|x|, |y|\} = 1$ .
- Demuestre que las tres bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un mismo punto que equidista de los lados del triángulo, por lo que constituye el centro de la circunferencia inscrita.
- Demuestre que las tres alturas de un triángulo concurren en un mismo punto que se llama **ortocentro**.
- La transversal de gravedad de un triángulo es la recta que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. Demuestre que las tres transversales de gravedad concurren en un mismo punto, que se llama **centro de gravedad** del triángulo.
- Use las fórmulas encontradas en los ejercicios resueltos para encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos:
  - $(1, 1), (2, 4), (5, 3)$ .
  - $(0, 0), (a, 0), (b, c)$ .
- Por un punto fijo  $A$  sobre un círculo de diámetro  $b$  se traza una secante cualquiera  $\overline{AD}$ , sobre la cual desde  $D$  se trazan dos puntos  $M$  y  $N$  a una misma distancia  $a$  de  $D$ . El lugar geométrico de estos puntos  $M$  y  $N$  se llama **caracol de Pascal**. Encuentre la ecuación que describe esta curva y bosqueje su gráfico separando los casos:  $a > b$ ,  $a = b$  y  $a < b$ .
- Dada la ecuación  $16x^2 + 36y^2 + 16x - 36y - 131 = 0$ , determine:
  - la curva que ella representa.

- b) las coordenadas del centro, de sus focos y sus vértices.
  - c) la ecuación de sus directrices.
  - d) su excentricidad.
8. Dada la ecuación  $36y^2 - 36y - 16x^2 - 16x - 139 = 0$ , determine:
- a) la curva que ella representa.
  - b) las coordenadas del centro, de sus focos y sus vértices.
  - c) la ecuación de sus directrices.
  - d) su excentricidad.
9. Dada la ecuación  $y - 6x^2 + 2x + 1 = 0$ , determine:
- a) la curva que ella representa.
  - b) las coordenadas del foco y del vértice.
  - c) la ecuación de su directriz.
  - d) su excentricidad.
10. Dada la ecuación  $2x^2 - 5xy + 5y - 1 = 0$ , determine la curva que representa y escríbala en la forma canónica correspondiente.
- Determine y caracterice la curva que representa cada una de las siguientes ecuaciones:
11.  $4x^2 + 2y^2 + 8x - 4y - 2 = 0$ .
12.  $y^2 - 4y + 4 + 12x = 0$ .
13.  $9y^2 - 25x^2 + 18y + 50 - 241 = 0$ .
14.  $2y^2 - 5y + 2x - 6 = 0$ .
15.  $4x^2 - 9y^2 = 0$ .
16.  $9x^2 + 4y^2 - 54x + 8y + 61 = 0$ .
17.  $4x^2 + 9y^2 - 8x + 27y + 49 = 0$ .
18.  $-3x^2 + 2x + 4y + 2 = 0$ .
19.  $x^2 - 4y^2 - 8x + 8y + 11 = 0$ .
20.  $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 14 = 0$ .
21.  $4x^2 - 9y^2 + 14x + 21y = 0$ .

22.  $9x^2 + 4y^2 - 18x - 40y + 109 = 0$ .
23. Un cable suspendido en una conducción de alta tensión tiene aproximadamente la forma de una parábola  $y = ax^2 + bx + c$ . Determine los valores de los coeficientes  $a, b, c$  con los datos de la figura 2.6.30.

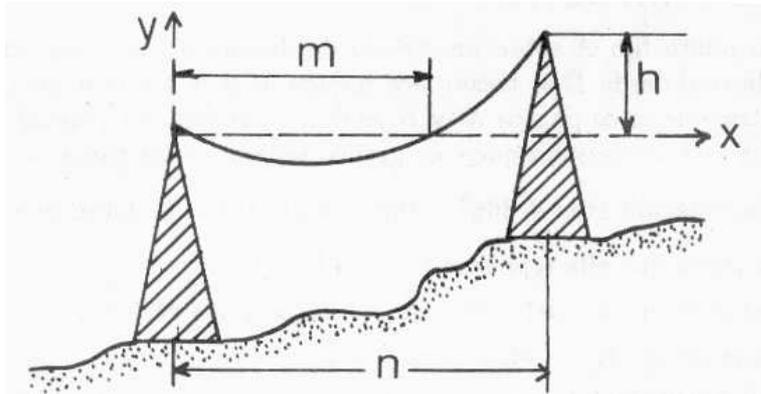


Figura 2.6.30: Cable en forma de parábola.

Escribir en su forma canónica y graficar cada una de las siguientes curvas:

24.  $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 2y = 0$ .
25.  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ .
26.  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ .
27.  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$ .
28.  $x^2 - 2xy - 4y + 4 = 0$ .
29.  $x^2 - xy + y - 1 = 0$ .
30.  $2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ .

### 2.6.2. Análisis de curvas en coordenadas rectangulares

Cuando las variables  $x$  e  $y$  aparecen en potencias superior o igual a tres, en la mayoría de los casos, es imposible despejar explícitamente una variable en términos de la otra, para poder aplicar el análisis de funciones de la sección 2.5 para conocer el comportamiento de la curva. Veamos los siguientes casos:

**Ejemplo 2.6.13** 1. **La estrofoide recta** (Barrow (1630-1677)), cuya ecuación general es

$$y^2(a-x) = x^2(a+x); \quad a > 0. \quad (2.55)$$

contiene la variable  $y$  en grado dos y la  $x$  en grado tres, lo cual permite analizar cada una de sus ramas como función tradicional:

$$y^2 = \frac{x^2(a-x)}{a+x}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2(a-x)}{a+x}}, \quad \text{cuando } \frac{a-x}{a+x} \geq 0.$$

Entonces, cada rama de  $y$  puede analizarse como función siguiendo el esquema de la sección 2.5

2. En cambio, curvas como el folio de una hoja de Descartes(1638), descrito por la ecuación:

$$x^3 + y^3 = 3axy; \quad a > 0$$

que es simétrica con respecto a  $X$  e  $Y$ , no resulta práctico despejar una variable en función de la otra. Si usted quiere hacerlo, tendría que usar la formula de Cardano-Tartaglia, la cuál complica mucho la expresión y sus derivadas.

Para analizar el comportamiento de este tipo de curva, es más práctico utilizar el método de derivación implícita.

**Derivación Implícita** Para conocer el comportamiento de una curva  $f(x, y) = 0$ , en un entorno de un punto  $(x_0, y_0)$  tal que  $f(x_0, y_0) = 0$ , supongamos que para  $(x, y) \in I \times J$ , donde  $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ ,  $r > 0$  y  $J = (y_0 - s, y_0 + s)$ ,  $r > 0$ ,  $s > 0$ , se puede “despejar”  $y$  como función de  $x$  y que esta función es dos veces derivable, entonces usando la regla de la cadena, podemos conocer  $y'(x)$ ,  $y''(x)$  y conocer su comportamiento, al menos localmente.

Bajo estas hipótesis podemos imaginar o escribir la curva:

$$x^3 + (y(x))^3 = 3axy(x); \quad x \in I.$$

Y aplicando regla de la cadena, derivar la ecuación.

$$\frac{d}{dx} (x^3 + (y(x))^3) = \frac{d}{dx} (3axy(x)).$$

Lo cual implica:

$$3x^2 + 3(y(x))^2 \cdot \frac{d}{dx} y(x) = 3ay(x) + 3ax \cdot \frac{d}{dx} y(x).$$

O lo que es lo mismo:

$$3x^2 + 3(y(x))^2 y'(x) = 3ay(x) + 3axy'(x). \quad (2.56)$$

Despejando  $y'(x)$ :

$$y'(x) (3y^2(x) - 3ax) = 3ay(x) - 3x^2$$

Si  $3y^2(x) - 3ax \neq 0$

$$y'(x) = \frac{3ay(x) - 3x^2}{3y^2(x) - 3ax}.$$

Si en particular nos interesa  $y'(x_0)$  entonces

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \frac{3ay(x_0) - 3x_0^2}{3y^2(x_0) - 3ax_0} \\ &= \frac{3ay_0 - 3x_0^2}{3y_0^2 - 3ax_0} \end{aligned} \quad (2.57)$$

más en concreto

Si  $a = \frac{2}{3}$ , entonces:

$$x^3 + y^3 = 2xy \quad (2.58)$$

Entonces el punto  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  pertenece a dicha curva, pues sus coordenadas satisfacen la ecuación 2.58; en efecto:

$$1 + 1 = 2 \cdot 1 \cdot 1$$

Suponiendo que en un rectángulo del plano que contiene al punto  $(1, 1)$  se puede despejar  $y$  como función de  $x$ , y que esta función es derivable, tenemos según la ecuación 2.57 que:

$$y'(1) = \frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 3}{3 - 2} = -1$$

En el punto  $(1, 1)$  la curva tiene una pendiente de  $-1$ . Es decir, la recta tangente a la curva en dicho punto es perpendicular a la recta  $y = x$ .

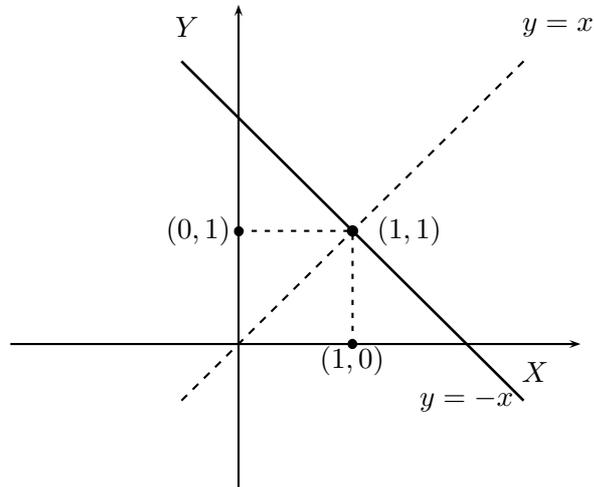


Figura 2.6.31

**¿Por qué este resultado vale sólo en un rectángulo que contiene al punto  $(1, 1)$ ?**

Porque si en la ecuación 2.58 reemplazamos  $x$  por 1, resulta una ecuación cúbica en  $y$ .

$$y^3 - 2y + 1 = 0$$

la cual, según el Teorema Fundamental del Álgebra tiene tres raíces en  $\mathbb{C}$ .

Para buscar las otras raíces, basta dividir el polinomio  $y^3 - 2y + 1$  por  $y - 1$ , por cuanto ya sabemos que  $y = 1$  es una raíz de éste.

$$y^3 - 2y + 1 : y - 1 = y^2 + y - 1$$

$$-(y^3 - y^2)$$


---

$$0 + y^2 - 2y + 1$$

$$-(y^2 - y)$$


---

$$0 - y + 1$$

$$-(-y + 1)$$


---

$$0$$

Así,  $y^3 - 2y + 1 = (y - 1)(y^2 + y - 1)$

$$y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

Por lo tanto, para  $x = 1$  se tiene  $y = \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$  Esto significa geoméricamente

que si trazamos una recta paralela al eje  $Y$  a través de  $x = 1$ , ésta corta a la curva en tres puntos que son las raíces que hemos encontrado. Esta figura geométrica se puede expresar diciendo que  $x = 1$  tiene tres "imágenes", por lo cual, globalmente la curva no es una función. Pero, localmente puede serlo. Así, localmente podemos analizar el comportamiento de la curva.

Por ejemplo, si nos interesa saber en cuáles puntos la curva tiene tangente paralela al eje  $X$ , debemos buscar los puntos que anulan la primera derivada. Usando la ecuación 2.57,

tenemos:

$$\begin{aligned} y'(x) = 0 &\iff \frac{2y(x) - 3x^2}{3y^2(x) - 2x} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2y = 3x^2 \\ 3y^2 \neq 2x. \end{cases} \end{aligned}$$

Para calcular los puntos, reemplazamos la ecuación  $2y = 3x^2$  en la ecuación ?? y obtenemos:

$$x^3 \left( \frac{27}{8}x^3 - 2 \right) = 0.$$

Esta ecuación tiene dos raíces reales:

$$x = 0 \text{ y } x = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}.$$

Por lo tanto, el punto  $\left( \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}, 2\sqrt[3]{4} \right)$  satisface las condiciones. En cambio el punto  $(0, 0)$  no satisface la relación  $3y^2 \neq 2x$ , por lo cual hasta el momento no podemos concluir nada.

**Ejemplo 2.6.14** Encontrar los puntos donde la tangente a la lemniscata de Bernoulli es paralela al eje  $X$ .

**Solución:** La ecuación de esta curva fue deducida en la subsección ?? y corresponde a la ecuación 2.44:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0.$$

Derivando implícitamente:

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = a^2(2x - 2yy').$$

Despejando  $y'$ :

$$y'(x) = \frac{a^2x - 2xx^3 - 2xy^2}{2yx^2 + 2y^3 + a^2y} = \frac{1}{a^2 + 2y^2 + 2x^2} \cdot \frac{x(a^2 - 2x^2 - 2y^2)}{y}. \quad (2.59)$$

Observando esta ecuación podemos deducir que

$$y'(x) = 0 \iff (x = 0) \text{ ó } (a^2 - 2x^2 - 2y^2) = 0, \quad y \neq 0.$$

- Si  $a^2 - 2x^2 - 2y^2 = 0$ , entonces:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}. \quad (2.60)$$

Reemplazando la ecuación 2.60 en la ecuación de la lemniscata, nos queda:

$$\frac{a^4}{4} = a^2(x^2 - y^2). \quad (2.61)$$

Para calcular los puntos  $(x, y)$  correspondientes, debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} \\ x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases}, \quad (2.62)$$

cuyas soluciones son,

$$x = \pm \frac{a\sqrt{6}}{4}, \quad y = \pm \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

- Si  $x = 0$ ; reemplazando este valor en la ecuación 2.44 nos da  $y = 0$ . Este resultado nos da, para  $y'$  una forma indeterminada, por lo tanto no podemos concluir nada.

**Naturaleza de los puntos críticos:** Para poder clasificarlos calcularemos implícitamente la segunda derivada de  $y(x)$ , suponiendo que existe: Derivando la ecuación 2.59 obtenemos,

$$y''(2yx^2 + 2y^3 + a^2y) + y'(2y'x^2 + 4yx + 6yy' + 2ay') = a^2 - 6x^2 - 2y^2 - 4xyy'.$$

Como en los puntos que nos interesa calcular la segunda derivada son los que anulan  $y'$ , la ecuación se reduce a :

$$y''(2yx^2 + 2y^3 + a^2y) = a^2 - 6x^2 - 2y^2.$$

Así,

$$y''(x) = \frac{a^2 - 6x^2 - 2y^2}{y(a^2 + 2y^2 + 2x^2)} = \frac{a^2 - 6x^2 - 2y^2}{y}. \quad (2.63)$$

Observando la ecuación 2.63, vemos que el signo de la segunda derivada depende del signo de  $\frac{a^2 - 6x^2 - 2y^2}{y}$ . Evaluando esta expresión en las soluciones del sistema 2.62 obtenemos que ,

$$\begin{aligned} y''\left(\pm \frac{a\sqrt{6}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{4}\right) &< 0 \\ y''\left(\pm \frac{a\sqrt{6}}{4}, -\frac{a\sqrt{2}}{4}\right) &> 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left(\pm \frac{a\sqrt{6}}{4}, \frac{a\sqrt{2}}{4}\right) \text{ son máximos y } \left(\pm \frac{a\sqrt{6}}{4}, -\frac{a\sqrt{2}}{4}\right) \text{ son mínimos.}$$

### Ejercicios propuestos

1. Dada la curva  $f(x, y) = 0$  y el punto  $(x_0, y_0)$  suponga que en un entorno de éste punto, existe  $\frac{dy}{dx}$  y  $\frac{dx}{dy}$ .

- Verifique que  $(x_0, y_0)$  pertenece a la curva.
- Calcule  $\frac{dy}{dx}(x_0, y_0)$  y  $\frac{dx}{dy}(x_0, y_0)$ .
- Interprete geoméricamente los resultados.

- a)  $x^7 + y^5x - 3x^7y^2 + y - 1 = 0, (x_0, y_0) = (0, 1)$ .  
 b)  $x^3 \cos(xy) = 1 = 0, (x_0, y_0) = (-1, \pi)$ .  
 c)  $\cos(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 1 = 0, (x_0, y_0) = (\pi/2, 0)$ .

2. Sea  $C$  una circunferencia de radio  $r$  y centro en el origen.

- a) Utilice derivación implícita para obtener el valor de la pendiente  $m_C$ , en cualquier punto  $P(x_0, y_0)$ . ¿Depende del radio este valor ?  
 b) Sea  $C_1$  la semicircunferencia de  $C$  que está en el primer y segundo cuadrante y  $C_2$  la semicircunferencia de  $C$  que está en el tercer y cuarto cuadrante. Determine una expresión para  $C_1$  y  $C_2$  colocando  $y$  como función de  $x$ .  
 c) Utilice el resultado anterior para encontrar el valor de  $m_C(x_0, y_0)$ , sólo en términos de  $x_0$ .

3. Dada la ecuación de la curva llamada **Hoja de Descartes**:

$$y^3 - 2xy + x^3 = 0$$

- a) Verifique que el punto  $(1, 1)$  pertenece a la curva definida por la ecuación dada.  
 b) Si  $x = 1$ , la ecuación resultante es de tercer grado en  $y$ . Encuentre los tres valores de  $y$  correspondientes a  $x = 1$ , usando (a) y división de polinomios.  
 c) Calcule la ecuación de las rectas tangentes a la curva en cada uno de los puntos encontrados en (b).

4. La curva llamada **Rosa de cuatro pétalos** tiene por ecuación:

$$(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$$

- a) Haciendo  $x = r \cos \alpha$  y  $y = r \sin \alpha$ ,  $r > 0$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Encuentre la ecuación equivalente en función de  $r$  y  $\alpha$ .
- b) Encuentre el ángulo  $\alpha$  para el cual se obtiene el mayor valor de  $r$  y calcule los correspondientes puntos  $(x, y)$ .
- c) Encuentre la recta tangente a la curva en cada uno de los puntos encontrados en el ítem anterior. Diga en qué región del plano se ubica la curva.
- d) Analice la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados, al origen y a la recta  $y = x$ .
- e) Considerando la simetría estudiada, establezca la región mínima donde se debe analizar la curva para obtener su gráfico.
5. La ecuación

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad a > 0,$$

representa una curva llamada **Cardioide**.

- a) Calcule todos los puntos de la curva cuya abscisa es  $x = 0$ .
- b) Calcule las rectas tangentes a la curva en los puntos obtenidos en (a).
- c) Encuentre los puntos de la curva donde su tangente es horizontal.
- d) Haciendo el cambio de variable  $x = r \cos \alpha$  y  $y = r \sin \alpha$ ,  $r > 0$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , demuestre que la ecuación se escribe como :
- $$r = a(\cos \alpha + 1).$$
- e) Deduzca en que región del plano está ubicada la curva.
6. Dada la curva:

$$(x^2 + y^2)^2 = 36x^2$$

- a) Calcule los puntos donde la curva corta al eje  $X$ .
- b) Calcule  $\frac{dy}{dx}$  para cada uno de los puntos encontrados en la pregunta 6a e interprete el resultado.
- c) Determine los puntos críticos de la curva y clasifíquelos en máximos o mínimos.
- d) Deduzca la región del plano donde se encuentra la curva.

- e) Deduzca que la curva dada representa dos circunferencias tangentes. Encuentre dichas circunferencias.

7. Dada la cónica:

$$\mathcal{C} : x^2 - y^2 = \sigma^2; \text{ con } \sigma > 0$$

Se define a partir de ella el conjunto  $\mathcal{B}$ , como:

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathcal{C} : y \geq 0\}$$

- a) Esboce el gráfico de  $\mathcal{B}$ .
- b) Determine que puntos de  $\mathcal{B}$  son los más cercanos al punto  $(0,3)$ .
- c) Se define la distancia vertical cuadrática de un punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  a una función dada  $y = f(x)$ , como la distancia al cuadrado que hay entre  $P_0$  y  $(x_0, f(x_0))$ . O sea,

$$\mathcal{V}^2(P_0, f(x)) = \mathcal{D}^2((x_0, y_0), (x_0, f(x_0)))$$

Considere la parte de  $\mathcal{C}$  que esta en el primer cuadrante del plano  $XY$  como  $f(x)$ . ¿Cuál debe ser el valor de  $\sigma$ , para que la suma de las distancias verticales de los puntos  $(1, 0)$  y  $(1, 2)$  a  $f(x)$ , sea mínima?

- d) Sea  $E$  el valor de la suma de las distancias verticales de los puntos  $(1, 0)$  y  $(1, 2)$  a  $f(x)$ . ¿Cuál es el mínimo valor posible para  $E$ ? ¿Por qué, se puede garantizar que  $E \neq 0$ ?

### 2.6.3. Análisis de curvas dadas por ecuaciones paramétricas

#### Introducción

Una de las tantas preguntas, respecto de los fenómenos naturales, que podemos hacernos es cómo describir la trayectoria de un objeto en movimiento.

Por ejemplo, supongamos que una rueda de radio  $a$  gira por un camino recto. En esta rueda hemos marcado un punto  $P$  y queremos describir la trayectoria de dicho punto.

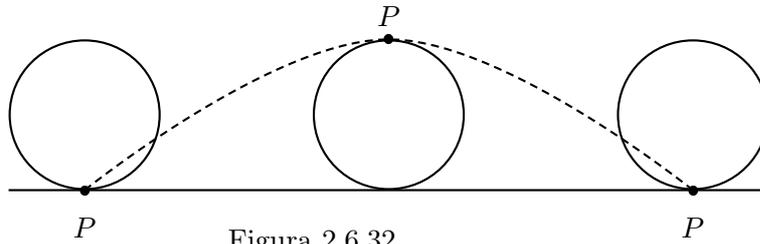


Figura 2.6.32

Para obtener las ecuaciones de dicha trayectoria hacemos lo siguiente.

Supongamos por un instante que la rueda está fija. Sea  $C$  su centro y  $M$  el punto de la rueda en que tiene contacto con el camino como se muestra en la Figura 2.5.2.

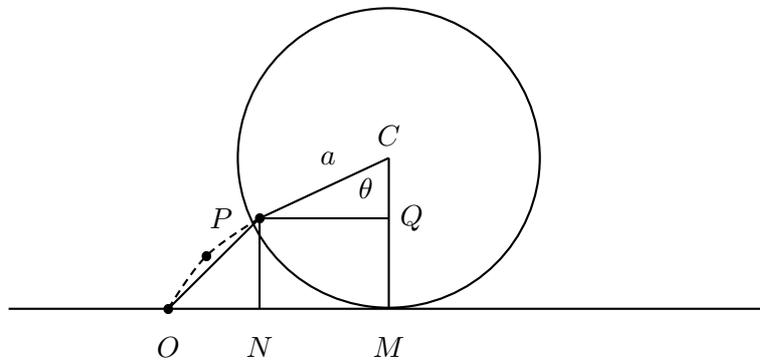


Figura 2.6.33

Sea  $\theta$  el ángulo PCM y  $O$  el origen del movimiento.

Por las condiciones del problema  $\overline{OM} = \text{longitud arco PM}$ .

En el triángulo CPQ se cumple  $\overline{PQ} = a \operatorname{sen} \theta$  y  $\overline{CQ} = a \operatorname{cos} \theta$

Sean  $(x, y)$  las coordenadas de  $P$ .

$$\begin{aligned} x &= \overline{ON} = \overline{OM} - \overline{NM} = a\theta - a \operatorname{sen} \theta = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \\ y &= \overline{NP} = \overline{MC} - \overline{MQ} = a - a \operatorname{cos} \theta = a(1 - \operatorname{cos} \theta) \end{aligned}$$

Luego las ecuaciones de  $(x, y)$  en función del ángulo  $\theta$  son:

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \\ y &= a(1 - \operatorname{cos} \theta) \end{aligned} \tag{2.64}$$

Así, a medida que  $P$  varía, varía el ángulo  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$ . De esta forma, las ecuaciones del punto  $P(x, y)$  tienen la representación paramétrica dada por las ecuaciones 2.64 en función de  $\theta$ .

En general una curva puede tener mas de una representación paramétrica.

A manera de ejemplo; Si consideramos una circunferencia de centro  $(0,0)$  y radio  $a$  tenemos que un punto típico de la circunferencia,  $(x, y)$  satisface la ecuación:

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{2.65}$$

Si denotamos por  $\theta$  el ángulo que forma el segmento  $\overline{OP}$  con el eje  $X$  entonces,

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{cos} \theta \\ y &= a \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \tag{2.66}$$

es una representación paramétrica del punto  $(x, y)$ .

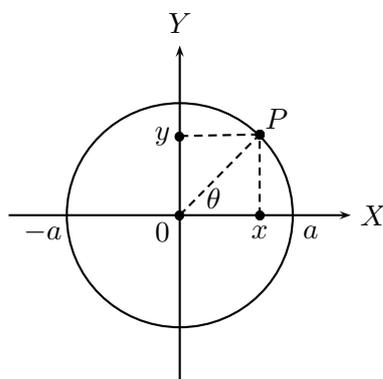


Figura 2.6.34: Coordenadas polares de un punto en el plano

Así, la misma circunferencia puede representarse en la forma cartesiana 2.65 o en la forma 2.66 que es la forma polar.

En general, si tenemos una curva  $\gamma \subset \mathbb{R}^n$  entonces tendremos que describir cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \gamma$  en la forma  $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), t \in [a, b]$  donde  $t$  es un parámetro conveniente para la escritura de la curva.

Ahora mostraremos como aplicar la información que proporcionan la primera y segunda derivada para analizar el comportamiento de curvas en el plano que vienen dada mediante ecuaciones paramétricas. Como se dijo en la introducción, dichas curvas se pueden pensar como el camino que sigue un objeto en movimiento y al parámetro se puede pensar como el tiempo.

Para analizar el comportamiento de una curva y bosquejar su gráfico en el plano  $XY$ , debemos calcular  $\frac{dy}{dx}$  y  $\frac{d^2y}{dx^2}$ . Como nuestros datos - las ecuaciones paramétricas - están en función del parámetro  $t$ , estas derivadas quedan también expresadas en términos de  $t$ . Para calcular estas derivadas se deben usar dos importantes teoremas del cálculo diferencial: la regla de la cadena y el teorema de la función inversa.

**Definición 2.6.15** Llamaremos **curva en el plano** a una función  $\gamma$  de  $[a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$  tal que :

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (f(t), g(t)),$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones continuas.

En los casos que veremos supondremos que las componentes de  $\gamma(t)$  son derivables al menos dos veces.

La variación de la abscisa respecto a la ordenada,  $\frac{dy}{dx}$ , es muy importante, pues representa la dirección de la recta tangente a la curva  $y(x)$  y  $\frac{d^2y}{dx^2}$  representa su curvatura.

Ahora mostraremos como se calculan estas derivadas.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Es importante observar que esta fórmula sólo tiene sentido cuando  $x'(t) = f'(t) \neq 0$ , lo que es equivalente a la inyectividad de la función diferenciable  $x(t) = f(t)$  como consecuencia del teorema de la función inversa, teorema 2.3.22.

Para conocer la curvatura de  $\gamma(t)$ , debemos calcular  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{g'(t)}{f'(t)} \right)}{f'(t)} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{(f'(t))^3}.$$

Inductivamente, se puede demostrar que, cuando existen las derivadas necesarias, se tiene que:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)}{\frac{dx}{dt}},$$

fórmula que con paciencia se puede escribir en términos de las derivadas  $f^k(t), g^k(t), k = 1, \dots, n$ .

Por ejemplo calculemos  $\frac{d^3y}{dx^3}$  para la campana de la cicloide

$$\begin{cases} x(t) &= at \\ y(t) &= a(1 - \cos t) \end{cases}$$

con  $0 \leq t \leq 2a\pi$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{a \operatorname{sen} t}{a} = \operatorname{sen} t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t)}{a} = \frac{\cos t}{a}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{\cos t}{a} \right)}{a} = -\frac{\operatorname{sen} t}{a^2}.$$

**Ejemplo 2.6.16** Dada la curva llamada **lemniscata de Gerono** y cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \operatorname{sen}(2t), \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

1. Determine la región del plano donde se encuentra la curva.
2. Calcule los puntos  $(x, y)$  correspondientes a  $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ .
3. Encuentre los puntos donde la tangente es paralela al eje  $X$ .
4. Encuentre los puntos donde la tangente es paralela al eje  $Y$ .
5. Analice el crecimiento de la curva.
6. Demuestre que  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2(\cos t)(2\operatorname{sen}^2t + 1)}{\operatorname{sen}^3t}$  y analice la concavidad de la curva

**Solución:**

1. Como  $\begin{cases} -1 \leq \cos t \leq 1 \\ -1 \leq \operatorname{sen} 2t \leq 1 \end{cases}$

se tiene que  $x(t) \in [-1, 1]$ ;  $y(t) \in [-1, 1]$ .

Por lo tanto la curva se encuentra en el cuadrado  $[-1, 1] \times [-1, 1]$

2. Evaluando para cada valor de  $t$  en  $x(t)$  e  $y(t)$ , obtenemos:

$$t = 0 \implies \begin{cases} x(0) = \cos 0 = 1 \\ y(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \end{cases}; \quad (1, 0)$$

$$t = \frac{\pi}{4} \implies \begin{cases} x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \quad \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$t = \frac{\pi}{2} \implies \begin{cases} x = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}; \quad (0, 1)$$

$$t = \frac{3\pi}{4} \implies \begin{cases} x = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \quad \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$t = \pi \implies \begin{cases} x = \cos \pi = -1 \\ y = \operatorname{sen} \pi = 0 \end{cases}; \quad (-1, 0)$$

$$3. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

La curva tiene tangente paralela al eje  $X \iff \frac{dy}{dx} = 0 \iff \left( \frac{dy}{dt} = 0 \text{ y } \frac{dx}{dt} \neq 0 \right)$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \iff \frac{d}{dt}(\operatorname{sen} 2t) = 0 \iff 2\cos 2t = 0$$

$$\iff \begin{cases} 2t = \frac{\pi}{2} \iff t = \frac{\pi}{4} \\ \text{o} \\ 2t = \frac{3\pi}{2} \iff t = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Según lo calculado en (b), la curva tiene tangente paralela al eje  $X$  en los puntos:

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ y } \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

4. La curva tiene tangente paralela al eje  $Y$

$$\iff \frac{dx}{dt} = 0 \text{ y } \frac{dy}{dt} \neq 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \iff -\operatorname{sen}t = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \\ \text{o} \\ t = \pi \end{cases}$$

5. Para analizar el crecimiento de la curva, se debe estudiar el signo de  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos 2t}{-\operatorname{sen}t} = -2\frac{\cos 2t}{\operatorname{sen}t}$$

- Si  $t \in [0, \frac{\pi}{4}] \implies \frac{dy}{dx} < 0$ , por lo cual para estos valores de  $t$ , la curva es decreciente.
- Si  $t \in [\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}]$ ;  $\frac{dy}{dx} > 0$ , por lo tanto la curva es creciente.
- Si  $t \in [3\frac{\pi}{4}, \pi]$ ;  $\frac{dy}{dx} < 0$ , por lo cual la curva decrece para estos tiempos.

6.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( -2\frac{\cos 2t}{\operatorname{sen}t} \right) \\ &= \frac{\frac{d}{dt} \left( -2\frac{\cos 2t}{\operatorname{sen}t} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} \left( -2\frac{\cos 2t}{\operatorname{sen}t} \right)}{-\operatorname{sen}t} \quad (*) \end{aligned}$$

Calculando:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\cos 2t}{\operatorname{sen} t} \right) = \frac{-2\operatorname{sen}t\operatorname{sen}2t - \cos 2t \cdot \operatorname{cost}}{\operatorname{sen}^2t} \quad (**)$$

Usando las fórmulas de los ángulos dobles, el numerador puede ser expresado como:

$$-[2 \operatorname{sen} t \cdot 2 \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{cost} + (1 - 2 \operatorname{sen}^2 t) \operatorname{cost}] = -[\operatorname{cost}(4 \operatorname{sen}^2 t + 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t)] = -\operatorname{cost}(2 \operatorname{sen}^2 t + 1)$$

Reemplazando este valor en (\*\*), se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\operatorname{cos} 2t}{\operatorname{sen} t} \right) = -\frac{\operatorname{cost}(2 \operatorname{sen}^2 t + 1)}{\operatorname{sen}^2 t}$$

Ahora este valor se reemplaza en (\*) para obtener el valor de la segunda derivada.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2 \operatorname{cost}(2 \operatorname{sen}^2 t + 1)}{\operatorname{sen}^3 t}$$

Como  $t \in (0, \pi)$ ,  $\operatorname{sen}^3 t > 0$  y  $(2 \operatorname{sen}^2 t + 1) > 0, \forall t$  el signo de  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  depende del signo de  $\operatorname{cost}$ .

- Si  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$ , entonces la curva es cóncava
- Si  $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$ , entonces la curva es convexa.

Es decir:

Si  $x \in ]-1, 0[$ , la curva es convexa.

Si  $x \in ]0, 1[$ , la curva es cóncava.

El gráfico de la curva es el que se muestra y corresponde a una vuelta completa, es decir, cuando  $t \in [0, 2\pi]$ . el gráfico correspondiente a  $t \in [0, \pi]$  es la parte de la curva que está en el primer y tercer cuadrante.

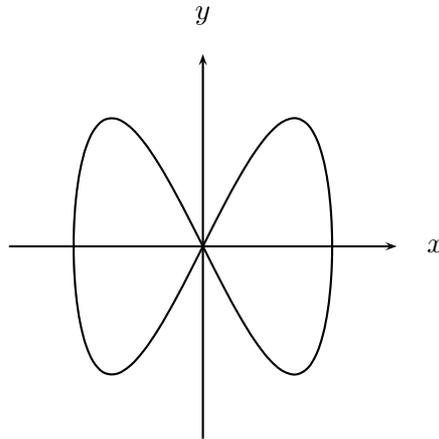


Figura 2.6.35: Lemniscata de Geronon

**Ejemplo 2.6.17** Dada la curva llamada **hipocicloide de cuatro vértices o astroide** y definida por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned}x(t) &= 2 \cos^3 t \\y(t) &= 2 \operatorname{sen}^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

1. Determine el rango de valores que pueden tomar  $x$  e  $y$ . Deduzca la región del plano  $XY$ , donde se encuentra el gráfico de la curva y calcule los puntos  $(x, y)$  correspondientes a  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ .
2. Determine los puntos del plano  $XY$  donde la tangente a la curva es paralela al eje  $X$  y al eje  $Y$ .
3. Analice el crecimiento de la curva en el plano  $XY$  cuando  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .
4. Demuestre que para  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , la curva es convexa.
5. Demuestre que  $\sqrt[3]{(x(t))^2} + \sqrt[3]{(y(t))^2} = \sqrt[3]{4}$ .
6. Utilice la información de los ítemes anteriores) para graficar la curva.

**Solución:**

1. Como  $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$  y  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ :  
 $x(t) \in [-2, 2]$ ;  $y(t) \in [-2, 2]$ .  
 Esto significa que la curva se encuentra dentro del rectángulo  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ .

- Si  $t = 0$ :  $(x(t), y(t)) = (2, 0)$
- Si  $t = \frac{\pi}{2}$ :  $(x(t), y(t)) = (0, 2)$
- Si  $t = \pi$ :  $(x(t), y(t)) = (-2, 0)$
- Si  $t = \frac{3\pi}{2}$ :  $(x(t), y(t)) = (0, -2)$
- Si  $t = 2\pi$ :  $(x(t), y(t)) = (2, 0)$

2. ■ La tangente es paralela al eje  $X$  cuando  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

$$\frac{dy}{dt} = 6 \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = 6 \cos^2 t (-\operatorname{sen} t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{6 \operatorname{sen}^2 t \cos t}{6 \cos^2 t \operatorname{sen} t} = -\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = -\tan t$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \iff \tan t = 0 \iff t = 0; t = \pi; t = 2\pi$$

Los puntos correspondientes son según lo calculado en (a):  $(2, 0)$ ,  $(-2, 0)$ .

- La tangente es paralela al eje  $Y$  cuando:

$$\frac{dx}{dy} = 0 \iff \cotan t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}; t = \frac{3\pi}{2}$$

Según lo calculado en (a), los puntos correspondientes son:  $(0, -2)$ ,  $(0, 2)$ .

3. Si  $t \in [0, \frac{\pi}{2}] \implies \tan t > 0$ . Por lo tanto,  $\frac{dy}{dx} < 0$ . Así, la curva es decreciente para  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-\tan t) = -\frac{d}{dt}\tan t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-\frac{d}{dt}(\tan t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{-6 \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{6 \cos^4 t \sin t}$$

Si  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \implies \sin t > 0 \implies \frac{d^2y}{dx^2} > 0$ . Por lo tanto, la curva es convexa en  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

5.

$$x^2(t) = 4 \cos^6 t \implies \sqrt[3]{x^2(t)} = \sqrt[3]{4} \cos^2 t$$

$$y^2(t) = 4 \sin^6 t \implies \sqrt[3]{y^2(t)} = \sqrt[3]{4} \sin^2 t$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{4}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \sqrt[3]{4}$$

6. Por (a) sabemos que el gráfico de la curva está en el rectángulo  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ , y por la información obtenida podemos bosquejar su gráfico:

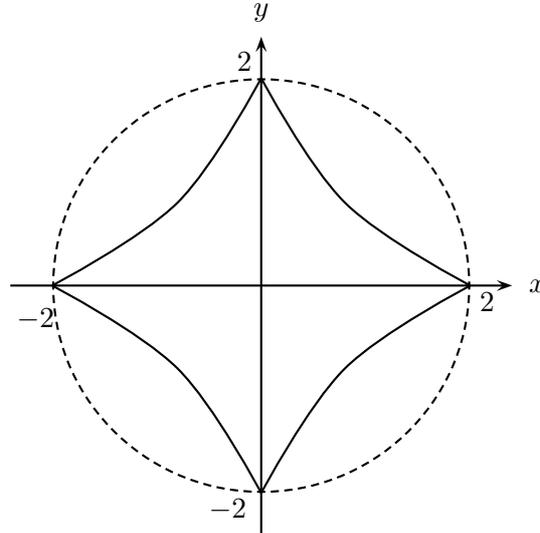


Figura 2.6.36: Astroide

**Ejercicios propuestos** En los siguientes ejercicios se pide analizar las ecuaciones paramétricas de la curva para obtener el gráfico dado.

1. Las ecuaciones paramétricas de la **Elipse** son:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

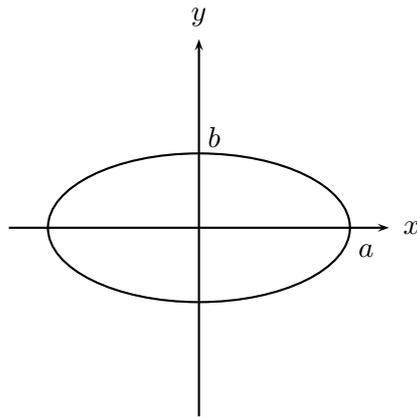
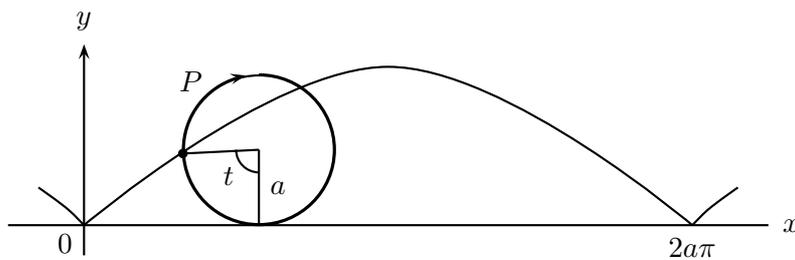


Figura 2.6.37: Elipse

2. Dada la **cicloide** cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \operatorname{sen}(t)) \\ y(t) = a(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

Analícelas para obtener el gráfico:



3. Demuestre que las curvas:

(i)

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = a \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} x(t) = a \operatorname{sen}(t) \\ y(t) = a \cos(t) \end{cases}$$

Representan una circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio  $a$ . Explique en qué consiste la diferencia entre ellas.

#### 2.6.4. Curvas expresadas en coordenadas polares

Un punto  $P$  del plano queda completamente determinado conociendo su distancia  $r$  al origen y el ángulo  $\theta$  que forma el trazo  $\overline{OP}$  con el semieje  $X^+$  medido en el sentido positivo.

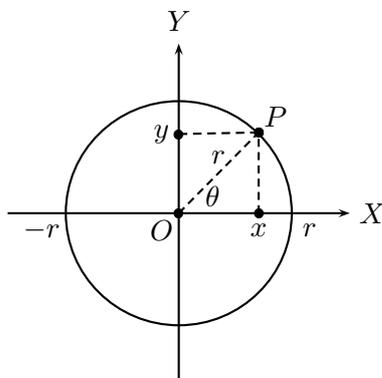


Figura 2.6.38: Coordenadas polares de un punto en el plano

Repitiendo el razonamiento hecho en la introducción, es fácil, deducir que:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

Despejando  $r$  y  $\theta$  en las ecuaciones anteriores y considerando que la función arcotangente tiene recorrido  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  tenemos:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x}, & \text{si } x > 0, y \geq 0. \\ \theta = \pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{si } x < 0. \\ \theta = 2\pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{si } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

A los números  $(\theta, r)$  se les llama **coordenadas polares** del punto  $P$ .

Para ubicar en el plano  $XY$  un punto de coordenadas  $(\theta, r)$ , debemos medir un ángulo  $\theta$  a partir del semieje  $X^+$ , en el sentido antihorario si  $\theta$  es positivo y en sentido horario si  $\theta$  es negativo. Sobre la recta que forma el ángulo se mide la distancia  $r$  desde el origen. Como  $r$  es la distancia del punto al origen en principio es positivo, pero es necesario darle sentido al punto de coordenadas  $(\theta, -r)$ . Por convención este corresponde al punto  $(\pi + \theta, r)$ ,  $r > 0$ .

Usando la definición de circunferencia de centro en el origen y radio  $a$ , tenemos que la ecuación de esta curva en coordenadas polares es.

$$r = a.$$

Podemos observar que se simplifica mucho, en general las coordenadas polares simplifican las ecuaciones de curvas cuando el movimiento que estas representan son combinaciones de movimientos circulares.

En general una ecuación en coordenadas polares se escribe como:

$$F(r, \theta) = 0 \quad \text{ó} \quad r = f(\theta).$$

**Simetrías** Dada la curva  $r = f(\theta)$  diremos que su gráfico es simétrico con respecto a:

1. **Al eje X:** si la ecuación  $r = f(\theta)$  no cambia al reemplazar en ella  $\theta$  por  $-\theta$  o  $\theta$  por  $\pi - \theta$  y  $r$  por  $-r$ .
2. **Al eje Y:** si la ecuación  $r = f(\theta)$  no cambia al reemplazar en ella  $\theta$  por  $\pi - \theta$  o  $\theta$  por  $-\theta$  y  $r$  por  $-r$ .
3. **Al origen:** si la ecuación  $r = f(\theta)$  no cambia al reemplazar en ella  $r$  por  $-r$  o  $\theta$  por  $\pi + \theta$ .

Para analizar su comportamiento y bosquejar su gráfico en el plano  $XY$ , debemos calcular

$$\frac{dy}{dx} \text{ y } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Considerando:

$$\begin{aligned} r &= f(\theta) \\ x &= r(\theta) \cos \theta \\ y &= r(\theta) \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Podemos observar que para calcular las derivadas que nos interesan, las ecuaciones de  $x$  e  $y$  pueden ser vistas como las ecuaciones paramétricas de la curva  $r = f(\theta)$  en que  $\theta$  es el

parámetro. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \frac{dr}{d\theta} \cos \theta + r(\theta)(-\operatorname{sen} \theta) \\ &= \cos \theta \frac{dr}{d\theta} - \operatorname{sen} \theta \cdot r(\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r(\theta)(\cos \theta) \\ &= \operatorname{sen} \theta \frac{dr}{d\theta} + \cos \theta \cdot r(\theta)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \theta \frac{dr}{d\theta} + \cos \theta \cdot r(\theta)}{\cos \theta \frac{dr}{d\theta} - \operatorname{sen} \theta \cdot r(\theta)},\end{aligned}$$

donde:  $r(\theta) = f(\theta)$  y  $\frac{dr}{d\theta} = \frac{df}{d\theta}$ . Para calcular la segunda derivada tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} \\ &= \frac{\frac{d}{d\theta} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{d\theta}}.\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \left( \frac{dy}{dx} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\operatorname{sen} \theta \frac{dr}{d\theta} + \cos \theta \cdot r(\theta)}{\cos \theta \frac{dr}{d\theta} - \operatorname{sen} \theta \cdot r(\theta)} \right) \\ \frac{dx}{d\theta} &= \cos \theta \frac{dr}{d\theta} - \operatorname{sen} \theta \cdot r(\theta)\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.6.18** Dada la curva llamada **lemniscata de Bernoulli**:

$$r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$$

1. Escriba su ecuación en coordenadas rectangulares.
2. Analice el tipo de simetría que ella tiene y ubique en plano  $XY$  los puntos  $(\theta, r(\theta))$  para  $\theta = 0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}$ . Bosqueje el gráfico de la curva señalando el sentido del movimiento.
3. Determine los valores de  $\theta$  para los cuales la tangente a la curva es paralela al eje  $X$ .

**Solución:**

1.  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .
2. Por ser coseno una función par, la curva es simétrica con respecto al eje  $X$ . Además,  $r(\theta) = r(\pi - \theta)$ , por lo tanto también es simétrica con respecto al eje  $Y$ .

$$\begin{aligned} r(0) &= 2 \\ r\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\ r\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) &= 0. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x &= r(\theta) \cos \theta \\ y &= r(\theta) \operatorname{sen} \theta \\ \frac{dx}{d\theta} &= \cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \operatorname{sen} \theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= \operatorname{sen} \theta \frac{dr}{d\theta} + r \cos \theta \\ \frac{dr}{d\theta} &= \frac{-2 \operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}. \end{aligned}$$

Los ángulos donde la tangente es paralela al eje  $X$  son aquellos tales que:

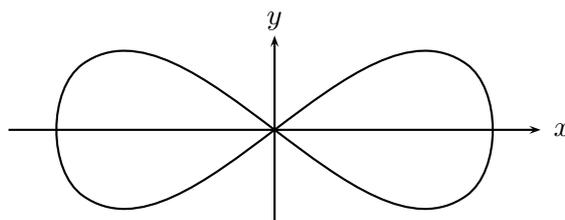
$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= 0 \text{ y } \frac{dx}{d\theta} \neq 0. \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\theta + 2 \cos 2\theta \cos \theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{2 \cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-2 \operatorname{sen} 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

Por lo tanto, los ángulos que satisfacen la condición son:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{6}, \pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

4. Su gráfico es:



**Ejemplo 2.6.19** Curva Polar  $r = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

**Tangentes Horizontales** Para encontrar las tangentes horizontales debemos encontrar los puntos donde  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

Por regla de la cadena sabemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$\text{Luego } \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{d\theta} = 0 \quad \wedge \quad \frac{dx}{d\theta} \neq 0$$

Sabemos que las coordenadas cartesianas de la curva se definen por:

$$x = r \cos(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) \quad (1)$$

$$y = r \operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}(\theta) \quad (2)$$

De (2) obtenemos  $\frac{dy}{d\theta}$  y la igualamos a cero para obtener los ángulos en los cuales la derivada se anula:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) = 0 \quad (3)$$

Resolvemos esta ecuación trigonométrica usando:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}; \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}}$$

en (3) queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta) \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}} + \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} \cos(\theta) &= 0 \quad / \quad \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}} \\ \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta) \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2} + \frac{(1 - \cos(\theta))}{2} \cos(\theta) &= 0 \quad \cdot 4 \\ \operatorname{sen}^2(\theta) + (2 - 2 \cos(\theta)) \cos(\theta) &= 0 \\ 1 - \cos^2(\theta) + 2 \cos(\theta) - 2 \cos^2(\theta) &= 0 \quad \cdot (-1) \\ 3 \cos^2(\theta) - 2 \cos(\theta) - 1 &= 0 \\ \cos(\theta) &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

1.  $\cos(\theta) = 1$  y
2.  $\cos(\theta) = \frac{-1}{3}$

Para (a) tenemos:

$$\cos(\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2 \Rightarrow S_\theta^1 = \{0, 2\pi, 4\pi\}$$

Para (b) tenemos:

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \approx \frac{7}{12}\pi + 2k\pi & k = 0, 1 \Rightarrow S_\theta^2 = \left\{\frac{7}{12}\pi, \frac{31}{12}\pi\right\} \\ \theta \approx \frac{17}{12}\pi + 2k\pi & k = 0, 1 \Rightarrow S_\theta^3 = \left\{\frac{17}{12}\pi, \frac{41}{12}\pi\right\} \end{cases}$$

Luego el conjunto solución para esta ecuación trigonométrica es:

$$S_\theta = S_\theta^1 \cup S_\theta^2 \cup S_\theta^3 = \left\{0, 2\pi, 4\pi, \frac{7}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{31}{12}\pi, \frac{41}{12}\pi\right\}$$

Debemos comprobar ahora que  $\frac{dx}{d\theta}(\theta) \neq 0$ ,  $\forall \theta \in S_\theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta}(0) &= \frac{1}{2} \neq 0 & ; & \frac{dx}{d\theta}(2\pi) = \frac{-1}{2} \neq 0 & ; & \frac{dx}{d\theta}(4\pi) = \frac{1}{2} \neq 0 \\ \frac{dx}{d\theta}\left(\frac{7}{12}\pi\right) &\approx -0,845 \neq 0 & ; & \frac{dx}{d\theta}\left(\frac{17}{12}\pi\right) \approx 0,845 \neq 0 \\ \frac{dx}{d\theta}\left(\frac{31}{12}\pi\right) &\approx 0,845 \neq 0 & ; & \frac{dx}{d\theta}\left(\frac{41}{12}\pi\right) \approx -0,845 \neq 0\end{aligned}$$

Así  $S_\theta$  está compuesto por todos los ángulos  $\theta$  para los cuales la derivada  $\frac{dy}{dx}$  se anula.

## Ejercicios propuestos

A continuación se da una lista de las curvas más conocidas en coordenadas polares. Para cada una de ellas se pide:

- Hacer una tabla mínima de valores y ubicar los puntos en el plano  $XY$ .
- Analizar si la curva tiene algún tipo de simetría.
- Estudiar el acotamiento y deducir en qué región del plano se encuentra.
- Calcular los ángulos para los cuales la curva pasa por el origen.
- Encontrar los puntos donde la curva tiene tangente paralela al eje  $X$ .
- Encontrar los puntos donde la curva tiene tangente paralela al eje  $Y$ .
- En los casos que las ecuaciones sean accesibles, determine la concavidad de la curva analizando el signo de la segunda derivada.
- Al bosquejar el gráfico señale con una flecha el sentido del movimiento.

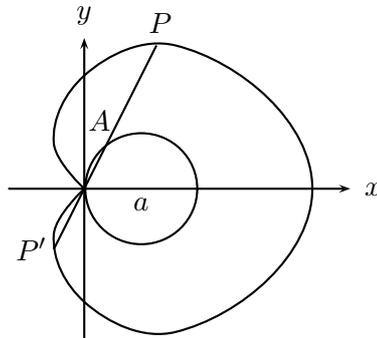
1. La **cardioide** tiene la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$r = a(\cos(\theta) + 1)$$

o

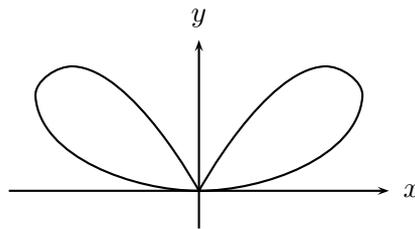
$$r = a(\cos(\theta) - 1).$$

En coordenadas rectangulares es  $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

2. **Bifolio.**

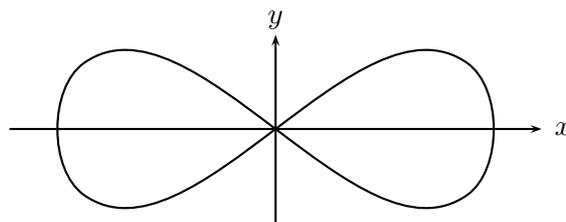
$$r = a \operatorname{sen}(\theta) \cos^2(\theta).$$

En coordenadas rectangulares:  $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$ .

3. **Lemniscata de Bernoulli.**

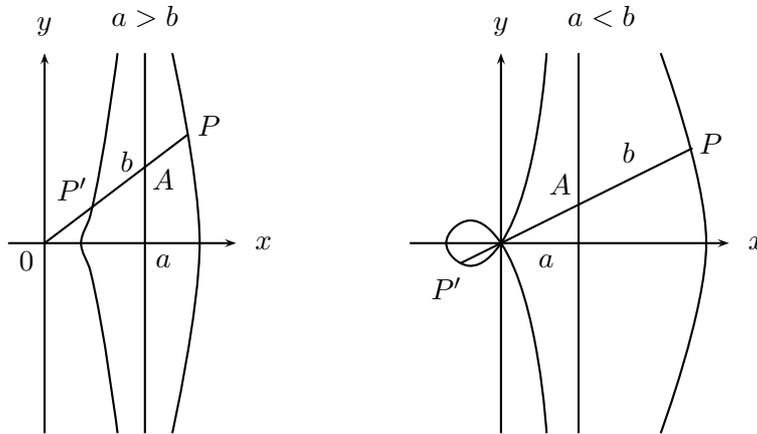
$$r^2 = a^2 \cos(2\theta).$$

En coordenadas rectangulares:  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .

4. **Concoide de Nicomedes.**

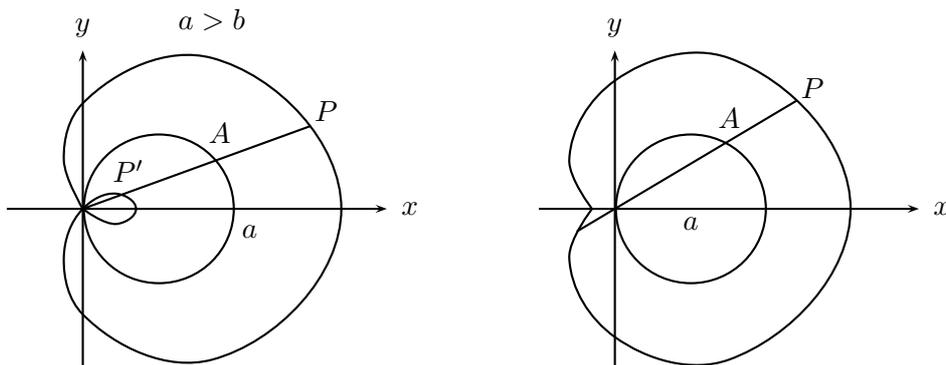
$$r = a \sec(\theta) \pm b.$$

En coordenadas rectangulares:  $(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2x^2$ .



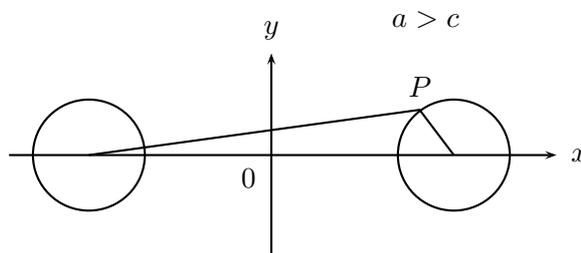
5. Caracol de Pascal.

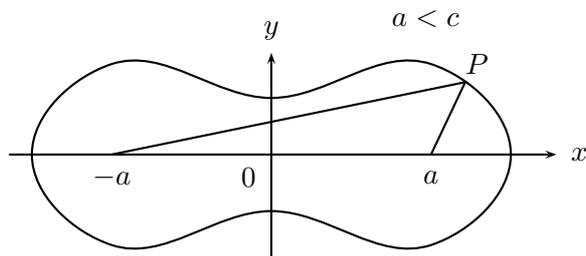
$$r = b + a \cos(\theta).$$



6. Ovalos de Cassini.

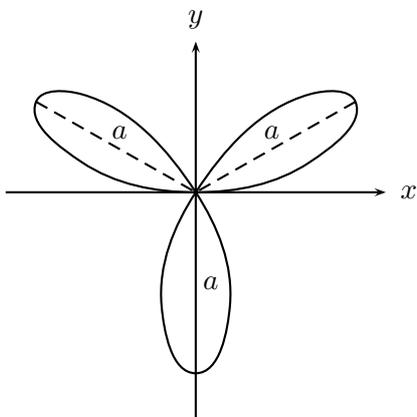
$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = c^4.$$



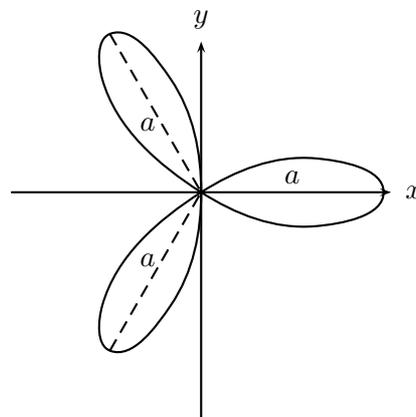


7. Rosa de tres pétalos.

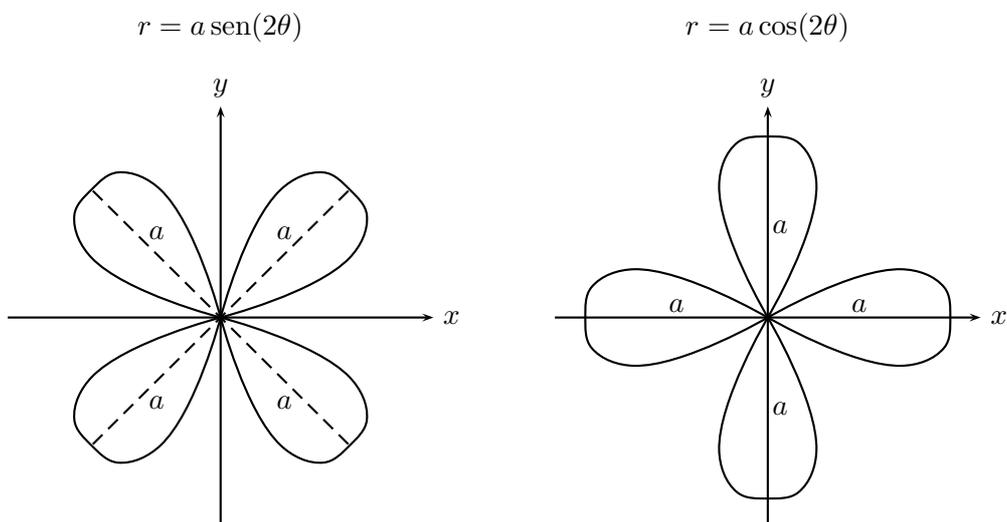
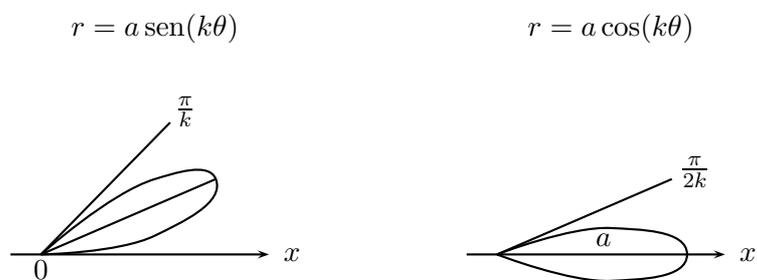
$$r = a \operatorname{sen}(3\theta)$$



$$r = a \operatorname{cos}(3\theta)$$



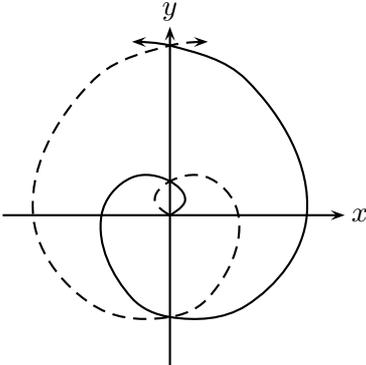
## 8. Rosa de cuatro pétalos.

9. Rosa de  $n$  pétalos.

Si  $k$  es par,  $n = 2k$ , si  $k$  es impar,  $n = k$ .

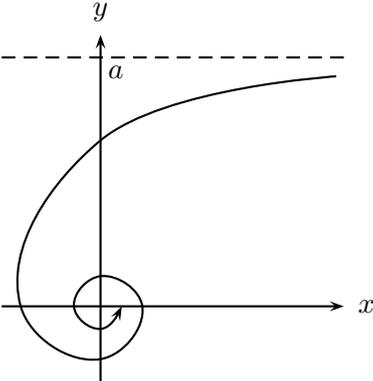
## 10. Espiral de Arquímedes.

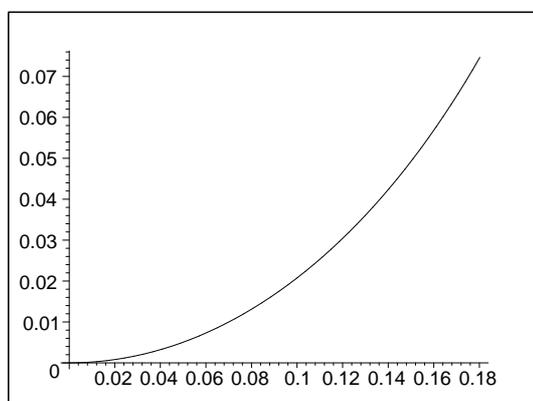
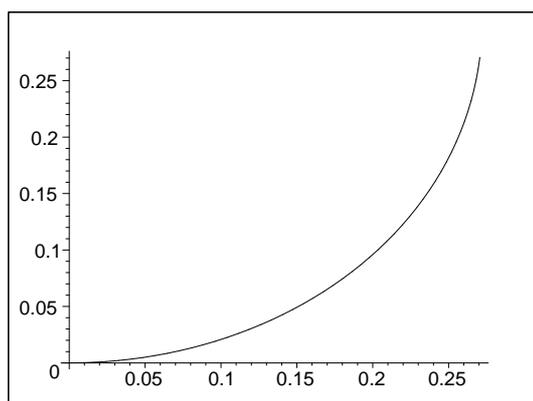
$$r = a\theta.$$



11. Espiral hiperbólica.

$$r\theta = a.$$



**Gráfica parcelada de  $r = \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right)$** Figura 2.1:  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}$ Figura 2.2:  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

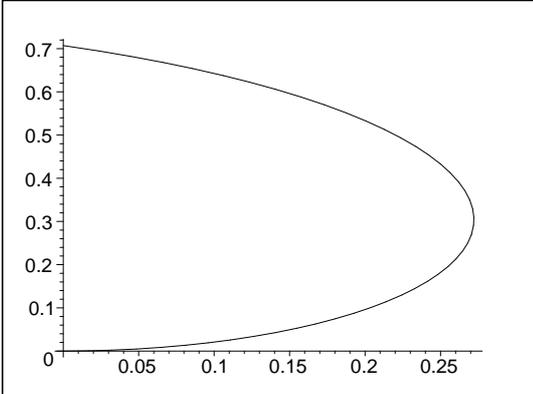


Figura 2.3:  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

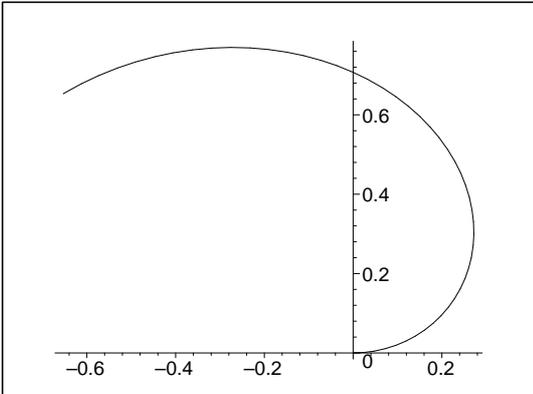
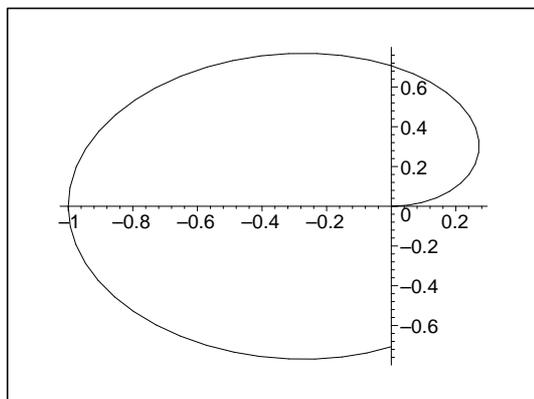
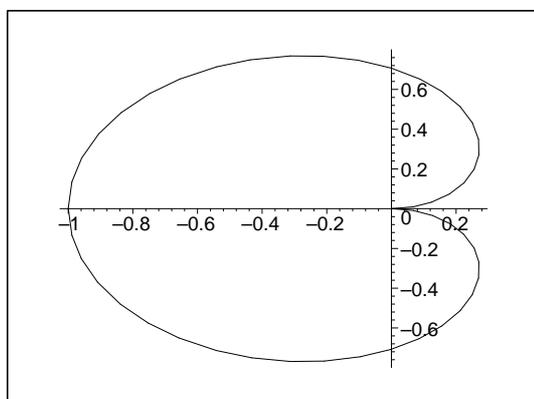


Figura 2.4:  $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

Figura 2.5:  $0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ Figura 2.6:  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

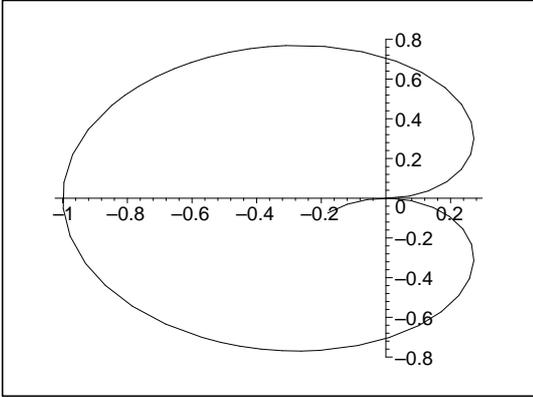


Figura 2.7:  $0 \leq \theta \leq \frac{17\pi}{8}$

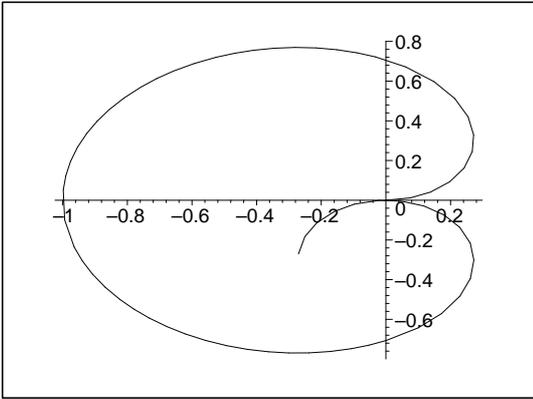
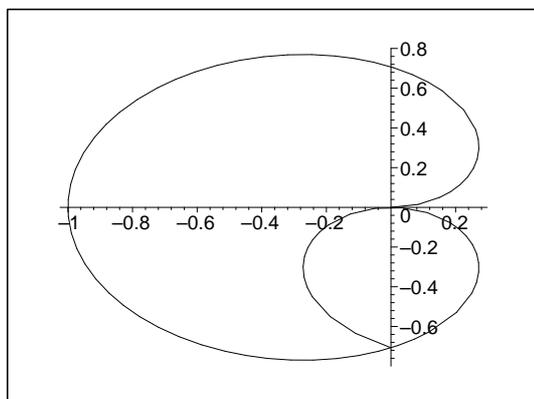
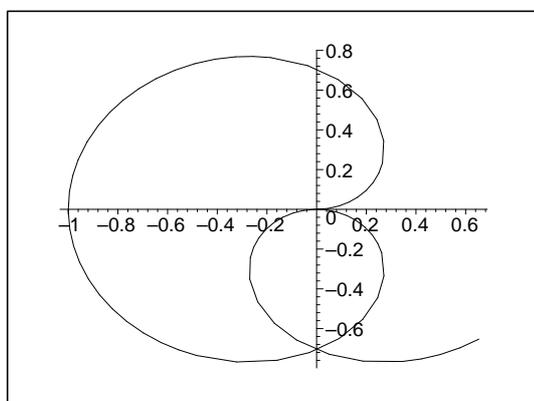


Figura 2.8:  $0 \leq \theta \leq \frac{9\pi}{4}$

Figura 2.9:  $0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$ Figura 2.10:  $0 \leq \theta \leq \frac{11\pi}{4}$

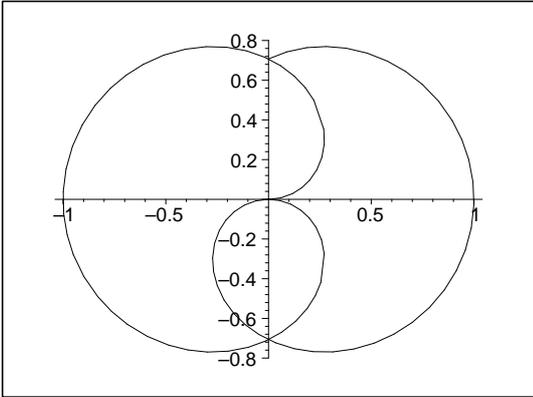


Figura 2.11:  $0 \leq \theta \leq \frac{7\pi}{2}$

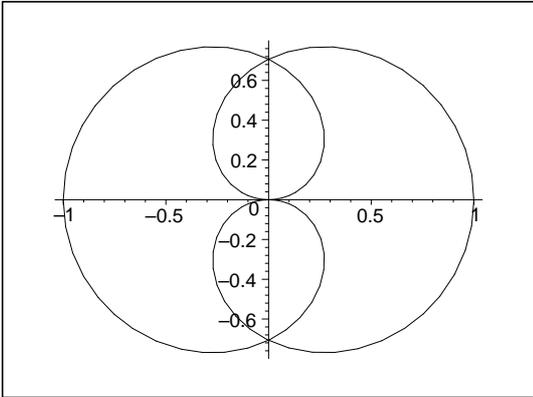


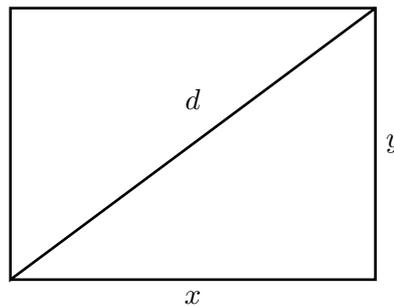
Figura 2.12:  $0 \leq \theta \leq 4\pi$

## 2.7. Aplicaciones IV: problemas de máximo y mínimo

Los problemas de máximo y mínimo tienen cierta rutina que es bueno practicar. En general, del enunciado debe encontrarse la función a optimizar. Si ésta resulta una función que depende de más de una variable, entonces de los datos del problema se deben deducir relaciones entre las variables de modo que estas permitan reemplazar en la expresión de la función las otras variables para que la función que nos interesa sea una función de una variable. Sólo entonces se aplican los teoremas que permiten determinar máximos y mínimos.

1. Demuestre que entre todos los rectángulos con diagonal dada  $d = 1$ , el que tiene mayor área, es el cuadrado.

**Solución:** Considerar un rectángulo de lados  $x$  e  $y$ .



Como  $d = 1$ , se tiene:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

La función que debemos ser maximizar es:

$A(x, y) = xy = x\sqrt{1 - x^2}$ . Se elige el signo positivo para  $x$  e  $y$ , pues son longitudes.

$$A(x) = x\sqrt{1 - x^2}; \quad x \in [0, 1]$$

Así tenemos:

$$A'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Entonces,

$$A'(x) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto:

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , maximiza  $A(x)$ . El correspondiente valor de  $y$  es

$$y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Luego,}$$

$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . El rectángulo pedido es un cuadrado.

- Se necesita fabricar una caja rectangular, de base cuadrada, sin tapa y cuya capacidad (volumen) sea de  $500 \text{ cm}^3$ . Calcule las dimensiones que debe tener dicha caja de manera que el material empleado sea mínimo.

**Salución:** Para que el material empleado sea mínimo, debe ser mínima el área total de la caja  $A = x^2 + 4xy = A(x, y)$ .

Como  $V = x^2y \iff 500 = x^2y \iff y = \frac{500}{x^2}$ ; reemplazando esta igualdad en  $A$ , queda.

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + 4x \frac{500}{x^2} \\ A(x) &= x^2 + \frac{2000}{x} \\ A'(x) &= 2x + \frac{x}{2000}(-1)x^{-2} \\ A'(x) &= 0 \iff 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \\ &\iff 2x^3 - 2000 = 0 \\ &\iff (x-10)(x^2 + 10x + 100) = 0 \\ &\iff x = 10; \text{ ya que} \\ &\quad x^2 + 10x + 100 \text{ no tiene raíces reales} \end{aligned}$$

Usando Criterio de la segunda derivada, se tiene que:

$$A''(x) = 2 - 2000(-2)x^{-3}$$

$$A''(10) = 2 + \frac{4000}{1000} = 2 + 4 > 0$$

Por lo tanto:

$$x = 10 \text{ minimiza } A(x)$$

$$y = \frac{500}{100} = 5$$

$x = 10, y = 5$  son las dimensiones que minimizan  $A(x, y)$ .

3. Se va a cortar una viga con sección transversal rectangular de un tronco de sección transversal circular con radio  $r$  conocido. Se supone que la resistencia de la viga es directamente proporcional al producto del ancho por el cuadrado de la altura de su sección transversal. Encuentre las dimensiones de la sección transversal que dé a la viga la mayor resistencia.

**Solución:**

- (1)  $R(x, y) = Cxy^2$ ;  $C$  constante positiva.
- (2)  $y^2 + x^2 = (2r)^2$  ( Teorema de Pitágoras en el rectángulo.)

La función a maximizar es  $R(x, y)$ . En la ecuación (2) se despeja  $y^2$ , y se reemplaza en (1):

$$R(x) = Cx(4r^2 - x^2)$$

$$= 4Cr^2x - Cx^3$$

$$R'(x) = 4Cr^2 - 3Cx^2$$

$$R'(x) = 0 \iff C(4r^2 - 3x^2) = 0 \iff 4r^2 - 3x^2 = 0 \iff$$

$$(2r - \sqrt{3}x)(2r + \sqrt{3}x) = 0 \iff x = \pm \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

Por ser  $x$  una longitud, se elige  $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ .

Para verificar que este valor de  $x$  maximiza la resistencia, se puede usar el criterio de la segunda derivada.

$$R''(x) = -6Cx$$

$$R''\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) = -6C \cdot \frac{2r}{\sqrt{3}} < 0$$

Por lo tanto, en  $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$  la función  $R(x)$  alcanza un máximo, el correspondiente valor de  $y$  es:

$$y^2 + \frac{4r^2}{3} = 4r^2$$

$$y^2 = \frac{8r^2}{3} \implies y = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

#### 4. Problema de la vaca perezosa que se convirtió en física

Este es un viejo problema que aparece bajo diferentes formas en muchos textos.

Al atardecer, las vacas entran a un corral por una puerta ubicada en un punto  $A$ ; luego se dirigen automáticamente a un estero a tomar agua. El estero sirve como límite del canal. Después se dirigen a la puerta del establo, ubicada en  $B$ .

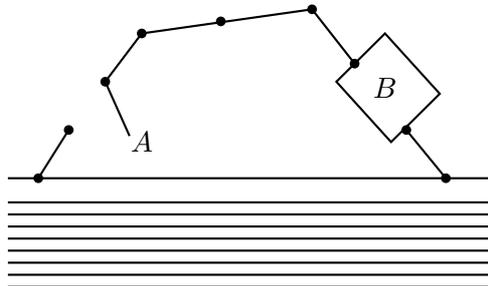


Figura 2.6.1

Una vaca muy perezosa y, por lo tanto, inteligente, quiso minimizar el número de pasos que debería efectuar para ir primero al estero, beber agua y entrar al establo a dormir. Procedió de la siguiente forma:

El estero está sobre una recta que tomó como el eje  $X$ ; el eje  $Y$  lo tomó como la perpendicular de  $A$  al eje  $X$ . Llamó  $P = (x, 0)$  al punto en el estero en el cual debería beber para minimizar el número de pasos.

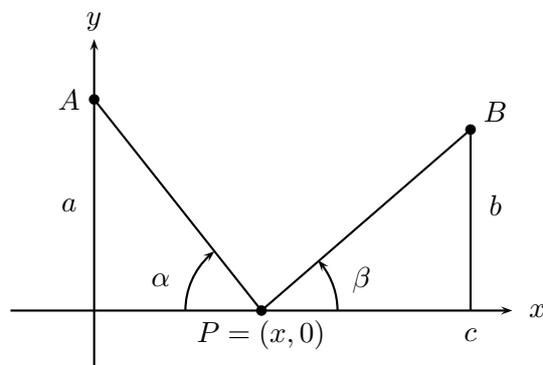


Figura 2.6.2

Como en la figura 2.6.2, sean  $A = (0, a)$ ,  $B = (c, b)$ ,

$$s = |AP| + |PB| = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2}.$$

para hallar donde  $s$  es mínima, la vaca procedió como sigue:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}},$$

luego

$$\frac{ds}{dx} = 0 \text{ si y sólo si } \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}.$$

Esta ecuación debe resolverse para  $x \in (0, c)$ . Si  $x$  no estuviese en el intervalo, los signos de los miembros de la ecuación serían distintos.

Elevando al cuadrado se obtiene:

$$x^2 [(c-x)^2 + b^2] = (c-x)^2 (x^2 + a^2),$$

cancelando  $x^2(c-x)^2$  se llega a  $b^2x^2 = a^2(c-x)^2$ , luego  $bx = \pm a(c-x)$ . Como se debe estar en el intervalo  $(0, c)$  sólo sirve el signo  $+$ . Por lo tanto,

$$x = \frac{ac}{a+b}.$$

Calculando ahora la segunda derivada de  $s$  respecto a  $x$  tenemos:

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{[(c-x)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Esta derivada es positiva para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; por tanto,  $s$  tiene un mínimo relativo en  $x = \frac{ac}{a+b}$  y por ser  $\frac{d^2s}{dx^2}$  de signo constante, este mínimo es absoluto.

Como el problema inicial es un problema geométrico, observemos que si  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos indicados en la figura 2.6.2, entonces :

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad \text{y} \quad \cos \beta = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}},$$

por lo tanto, la ecuación  $\frac{ds}{dx} = 0$  se convierte en  $\cos \alpha = \cos \beta$ . Como  $\alpha$  y  $\beta$  son ángulos agudos, la única solución es  $\alpha = \beta$ . Luego, la vaca se dirigió a beber agua a un punto  $P$  en la orilla del estero, de tal modo que éste forma ángulos iguales con las rectas que van de  $P$  a la puerta  $A$  y a la puerta  $B$ .

Esa noche nuestra vaca pensó que un rayo de luz tiene un comportamiento similar al problema que acabamos de resolver. Imaginó que  $R$  es la superficie de un espejo en un medio de índice de refracción constante y que un haz de luz decide ir de  $A$  hasta  $B$ , reflejándose en el espejo. Para minimizar el tiempo, la luz debe seguir el camino ya calculado. En este contexto  $\alpha$  se llama **ángulo de incidencia** y  $\beta$  es el **ángulo de reflexión** y se tiene el conocido principio que al reflejarse un rayo de luz sobre un espejo en el vacío, los ángulos de reflexión y de incidencia son iguales. Lamentablemente para nuestra vaca este principio fue anunciado por el gran físico-matemático Pierre de Fermat en el siglo XVII y se llama en óptica **ley de reflexión**.

Use este principio en su mesa favorita: la mesa de pool.

5. Con un trozo de material rectangular, se forma una caja abierta suprimiendo de cada esquina cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir de esta manera, si el material tiene dimensiones  $a$  y  $b$ .

**Solución:**

La situación geométrica es la siguiente:

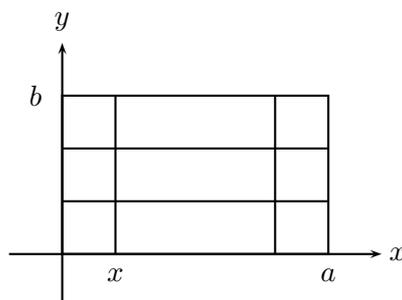


Figura 2.6.3

Volumen de la caja =  $V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x$ . Luego

$$V(x) = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx$$

y su derivada es:

$$V'(x) = 12x^2 - 4(a + b)x + ab.$$

$V'(x)$  se anula en  $x_{\pm} = \frac{(a + b) \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$ . Ambas raíces son reales y positivas, entonces, como

$$V''(x_{\pm}) = \pm 4\sqrt{a^2 + b^2 - ab},$$

se tiene un máximo en  $x_-$  y un mínimo en  $x_+$ . Las dimensiones de la caja son: largo =  $a - 2x_-$ , ancho =  $b - 2x_-$  y alto =  $x_-$ .

6. Una tropa de scouts saldrá de campamento y necesitan comprar genero para construir carpas cónicas, sin piso y de un volumen dado. Para disminuir los costos del campamento necesitan comprar el mínimo de genero. Entonces se preguntan: ¿Qué relación debe existir entre la altura de la tienda y el radio del suelo para que el área lateral sea mínima?

**Solución:**

El volumen es  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  y se quiere minimizar  $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ . Podemos despejar  $h$  en función de  $r$  en la expresión del volumen y reemplazar en  $S$  para que nos quede una función de una variable  $S(r)$  a la cual podemos aplicar los procedimientos de la sección 1.5. Pero esta vez utilizaremos un método diferente que puede ser útil en situaciones más complejas.

Queremos minimizar  $S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ , lo que es equivalente a minimizar  $W = \left(\frac{S}{\pi}\right)^2 = r^4 + r^2 h^2$ .

Derivando  $V$  y  $W$  respecto a  $r$  obtenemos,

$$0 = \frac{dV}{dr} = \frac{\pi}{3} \left( 2rh + r^2 \frac{dh}{dr} \right),$$

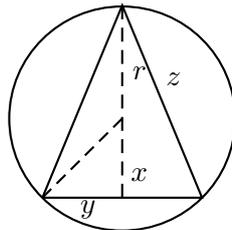
lo que implica  $\frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r}$ .

$$\frac{dW}{dr} = 4r^3 + 2rh^2 + 2r^2h \frac{dh}{dr}.$$

Por tanto,  $\frac{dW}{dr} = 2r(2r^2 - h^2)$ , y las raíces de esta ecuación se obtienen para  $h = r\sqrt{2}$ .

Como  $\frac{d^2W}{dr^2} = 12r^2 + 6h^2 > 0$ , se advierte que  $S$  tiene un único mínimo absoluto cuando  $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$ .

7. De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de radio  $r$ , ¿Cuál es el que tiene área máxima? **Solución:**



Área =  $y(r + x)$ , usamos la relación  $x^2 + y^2 = r^2$  para reemplazar una de las variables en función de la otra, y nos queda

$$A(y) = y(r + \sqrt{r^2 - y^2}).$$

$$\begin{aligned} A'(y) &= r + \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{1}{2} \frac{-2y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}} \\ &= \frac{r\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - 2y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}. \end{aligned}$$

$A'(y) = 0$ , es equivalente a  $r\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - 2y^2 = 0$ , ecuación que tiene solución  $y = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ . Con este valor de  $y$  podemos calcular  $x$ :

$$x^2 = r^2 - \left( \frac{r\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{r^2}{4}.$$

Es decir,  $x = \frac{r}{2}$ .

Para calcular el lado  $z$  del triángulo de la figura, aplicamos nuevamente el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = (r + x)^2 + y^2 = \left(\frac{3r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3r^2.$$

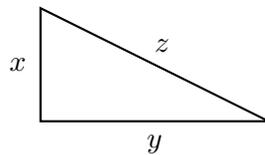
Por lo tanto  $z = r\sqrt{3}$ .

Verifiquemos que el valor de  $y$  encontrado es efectivamente un máximo para el área calculando el signo de la segunda derivada en  $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ .

$$\begin{aligned} A''(y) &= \frac{5r^2y + 2y^3}{(r^2 - y^2)\sqrt{r^2 - y^2}} \\ A''\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{5r^2 \frac{r\sqrt{3}}{2} + \frac{3r^3\sqrt{3}}{4}}{r^2 - \frac{3r^2}{4}} \\ &= -\frac{7r^3\sqrt{3}}{4} < 0. \end{aligned}$$

8. Entre todos los triángulos rectángulos con perímetro  $2p$ , ¿cual es el que tiene área máxima?

**Solución:**



De la figura tenemos

$$x + y + z = 2p \quad (2.67)$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (2.68)$$

$$A = \frac{xy}{2}. \quad (2.69)$$

De la ecuación (2.67) tenemos:

$$z = 2p - x - y, \text{ elevando al cuadrado se tiene}$$

$$z^2 = 4p^2 + x^2 + y^2 - 4px - 4py + 2xy, \text{ en virtud de la ecuación 2.68 nos queda}$$

$$4p^2 = 4px + 4py - 2xy, \text{ despejando y obtenemos}$$

$$y = \frac{2p(p-x)}{2p-x}.$$

Este valor de  $y$  lo reemplazamos en la ecuación (2.69) para dejar el área expresada como función de una variable:

$$A(x) = \frac{(px - x^2)p}{2p - x}.$$

Entonces,

$$A'(x) = \frac{(x^2 - 4px + 2p^2)p}{(2p - x)^2}.$$

Para que se anule  $A'(x)$ , basta que se anule el numerador, por lo que debemos resolver la ecuación

$$x^2 - 4px + 2p^2 = 0,$$

cuyas soluciones son:

$$x = p(2 \pm \sqrt{2}).$$

De estas dos posibles soluciones debemos elegir  $x = p(2 - \sqrt{2})$ , pues el otro valor es mayor que el perímetro, lo cual no puede ser. Con este valor de  $x$  calculamos  $y$  y  $z$ . Así,  $y = p(2 - \sqrt{2})$ ,  $z = 2p(\sqrt{2} - 1)$ , lo que nos dice que el triángulo es isósceles.

Ahora verificaremos que los valores corresponden a un máximo usando el criterio de la segunda derivada.

$$\begin{aligned} A''(x) &= \frac{p[(2p - x)^2(2x - 4p) - (x^2 - 4px + 2p^2)(2(2p - x)(-1))]}{(2p - x)^4} \\ &= \frac{p(2p - x) [(2p - x)(2x - 4p) + 2x^2 - 8px + 4p^2]}{(2p - x)^4} \\ &= \frac{2p - x}{(2p - x)^4} [-4p^3] < 0. \end{aligned}$$

El signo de la segunda derivada nos confirma que los valores obtenidos corresponden a un máximo.

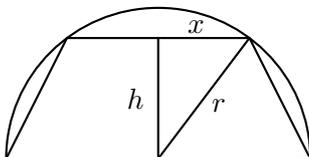
9. a) Si la suma de dos variables  $x$  e  $y$  es constante, ¿pueden la suma de sus cuadrados y la suma de sus cubos tener un máximo y un mínimo?
- b) Una recta de longitud  $l$  está dividida en dos segmentos que sirven de diámetros a dos esferas. ¿Cuál es el máximo y el mínimo de la suma de los volúmenes de las dos esferas?

**Solución:**

- a) Si  $x+y=c$  entonces,  $x=y-c$ . la función por analizar es  $f(y) = (c-y)^2 + y^2$ .  
 $f'(y) = 0$  implica  $-2(c-y) + 2y = 0$ . Lo que nos da los valores  $x = y = \frac{c}{2}$ .  
 Como  $f''(y) = 4$ , quiere decir que  $x^2+y^2$  alcanza su mínimo para  $x = y = \frac{c}{2}$ .  
 Como tanto  $x$  como  $y$  varían entre 0 y  $c$ ,  $f$  alcanza su máximo en los extremos  $x=0$  e  $y=c$ . Sea  $g(y) = (c-x)^3 + y^3 = c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 + y^3$  la suma de los cubos.  
 $g'(y) = -3c^2 + 6cy = 0$  implica  $y = \frac{c}{2}$  lo que a su vez determina el valor de  $x = \frac{c}{2}$ . Como  $g''(y) = 6c$ , los valores obtenidos dan un mínimo de la función.
- b)  $x + y = l$ , usando el resultado anterior tenemos que la función  $\frac{\pi x^3}{6} + \frac{\pi y^3}{6}$  alcanza su mínimo para  $x = y = \frac{l}{2}$  y el máximo cuando  $x$  o  $y$  es nulo, es decir, cuando sólo hay una esfera.

10. Determine las bases del trapecio de área máxima inscrito en un semicírculo de radio  $r$

**Solución:** Supondremos, para obtener área máxima, que la base mayor del trapecio esta sobre el diámetro del semicírculo.



El área del trapecio es  $A = 2\left(\frac{rh}{2}\right) + 2\left(\frac{xh}{2}\right) = (r+x)h = (r+x)\sqrt{r^2-x^2} > 0$ .

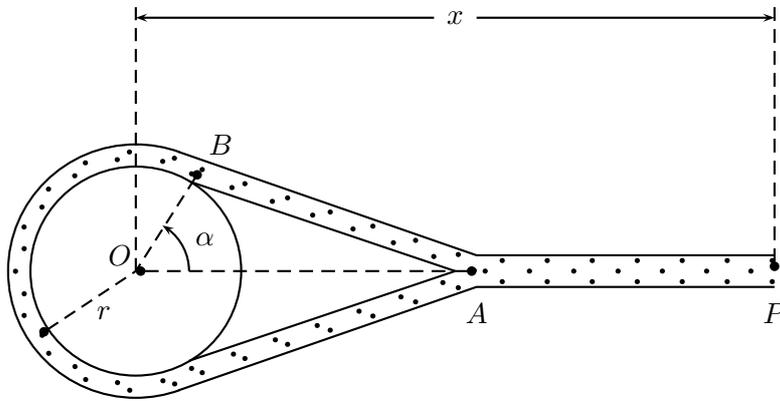
Máximizsar  $A$  es equivalente a máximizsar  $A^2 = (r+x)^2(r^2-x^2)$ , pues  $A$  es positiva.

$$\frac{dA^2}{dx} = 2(r+x)^2(r-2x) = 0 \iff x = \frac{r}{2} \text{ pues } (r+x)^2 \neq 0$$

$$\frac{d^2A^2}{dx^2} = -4x(r+x) < 0$$

Luego las bases del trapecio son  $2r$  y  $r$ . El área máxima es  $A = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^3$ .

11. Se tiene una cuerda de longitud  $l$  con un lazo corredizo que envuelve una columna cilíndrica de radio  $r$ . En el extremo  $P$  de la cuerda se ejerce una fuerza de tal magnitud que la rompe.



Determinar la distancia  $x$  del centro  $O$  del cilindro al punto  $P$ .

**Solución:** Sean:

$$\begin{cases} x = OA + AP \\ l = 2\pi r - 2r\alpha + 2AB + AP \end{cases}$$

Entonces,

$$x - OA = AP = l - 2\pi + 2r\alpha - 2AB,$$

esto es:

$$x = l + OA - 2r(\pi - \alpha) - 2AB.$$

Como  $OA = \frac{r}{\cos \alpha}$  y  $BA = r \tan \alpha$ , se tiene :

$$x(l) = l + r \left[ \frac{1}{\cos \alpha} - 2(\pi - \alpha + \tan \alpha) \right]$$

Busquemos los valores extremos de esta función:

$$\frac{dx}{d\alpha} = r \left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 - \frac{2}{\cos^2 \alpha} \right] = r \left[ \frac{\operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right]$$

Si  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{dx}{d\alpha} = 0 \iff \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{sen} \alpha(1 - 2 \operatorname{sen} \alpha) = 0 \iff \alpha = 0$  o bien  $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Como  $\frac{dx}{d\alpha}$  pasa de positiva a negativa en  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  y de negativa a positiva en  $\alpha = 0$ , tenemos en  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  un punto de máximo.

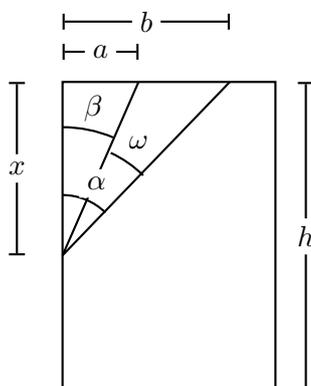
También se puede obtener este resultado evaluando  $x(0)$  y  $x(\frac{\pi}{6})$ :

$$\begin{cases} x(0) = l + r((1 - 2\pi) \approx l - 5,2832r \\ x(l) = 2 + r(\frac{2}{\sqrt{3}} - 2(\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}})) \approx l - 5,2358r \end{cases}$$

Luego se tiene  $x(\frac{\pi}{6}) > x(0)$ , lo que implica que  $x$  tiene un máximo en  $\frac{\pi}{6}$ .

12. Una cancha de fútbol mide  $90 \times 61$  metros, y los arcos tienen un largo de 11 metros. Un puntero izquierdo, que chutea muy bien, se mueve pegado a su costado. ¿A que distancia del banderín del corner debe chutear para obtener las máximas posibilidades de marcar un gol?

**Solución:** Veamos primeramente la situación geométrica:



Queremos maximizar  $\omega = \alpha - \beta$ , lo que es equivalente a maximizar su tangente.

$$\tan \omega = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \frac{a}{x}} = \frac{bx - ax}{x^2 + ab}$$

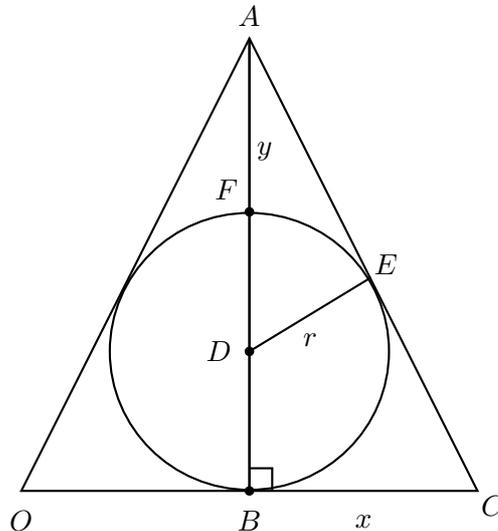
$$\text{Como } \frac{d \tan \omega}{dx} = \frac{(b-a)(x^2 + ax) - 2x(b-a)x}{(x^2 + ab)^2} = 0 \iff ax^2 - bx^2 + ab^2 - a^2b =$$

$$0 \iff x^2(a-b) - ab(a-b) = 0, \text{ y esto ocurre solo si } x = \sqrt{ab} \text{ (pues } (a-b) \neq 0)$$

Por otro lado, se tiene que  $2a + 11 = 61$  y  $a + 11 = b$ , lo que implica que  $a = 25$  y  $b = 36$ . Luego  $x = \sqrt{ab} = \sqrt{25 \cdot 36} = 30$  metros.

13. Dada una circunferencia de radio  $r$ . De todos los triángulos isóceles circuncritos, determine el de menor área.

**Solución:**



Observe que el  $\triangle ADE$  es rectángulo en  $E$ .

Consideremos  $x = \overline{BC}$  e  $y = \overline{FA}$ , luego

$$\overline{AE}^2 = (y + r)^2 - r^2 = y^2 + 2ry.$$

De los teoremas de semejanza de triángulos, tenemos que:

$$\triangle ABC \cong \triangle AED.$$

Entonces,

$$\frac{x}{r} = \frac{y + 2r}{\overline{AE}},$$

esto es,

$$\frac{x}{r} = \frac{y + 2r}{\sqrt{y^2 + 2ry}}.$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{r(y + 2r)}{\sqrt{y^2 + 2ry}}. \quad (2.70)$$

La función que queremos minimizar es el área  $A$  del triángulo  $OCA$ . Como  $\text{Area} = x \cdot h = x(2r + y)$ , entonces el área está dependiendo de dos variables  $x$  e  $y$ . Para dejarla como función de una variable usaremos la ecuación 2.70 y nos queda:

$$A(y) = \frac{r(y + 2r)^2}{\sqrt{y(y + 2r)}}.$$

$$\begin{aligned}
 A'(y) &= \frac{2r(y+2r)\sqrt{y^2+2ry} - \frac{r(y+2r)^2(y+r)}{\sqrt{y^2+2ry}}}{y^2+2ry} \\
 &= \frac{2r(y+2r)(y^2+2ry) - r(y+2r)^2(y+r)}{(y^2+2ry)\sqrt{y^2+2ry}}.
 \end{aligned}$$

Si  $A'(y) = 0$  se debe tener que  $2yr((y+2r)^2 - r(y+2r)^2(y+r)) = 0$ , es decir,  $r(y+2r)^2(y-r) = 0$ , esto es,

$$\begin{cases} y = -2r \\ y = r. \end{cases}$$

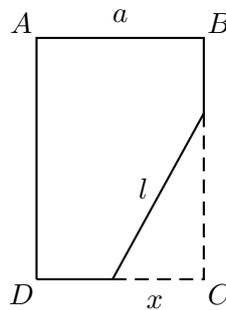
El valor  $y = -2r$  se descarta pues es negativo, por tanto  $y = r$ .

El valor correspondiente de  $x$  es:

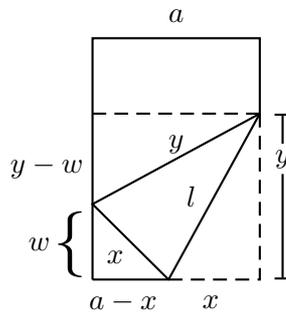
$$x = \frac{r(3r)}{\sqrt{r^2+2r^2}} = \frac{3r}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3}.$$

y el área mínima es  $3\sqrt{3}r^2$ . Ahora, debemos verificar que este valor de  $x$  y de  $y$  minimizan el área. En este caso, debido a la factorización de  $A'$ , es inmediato usando el criterio de la primera derivada.

14. Doble una hoja de papel rectangular haciendo coincidir el vértice  $C$  con un punto del lado  $AD$ . Determine  $x$  para que la longitud del pliego  $l$  sea mínima. Obtenga además la longitud del pliego mínimo.



**Solución:**



Usando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$w^2 = x^2 - (a - x)^2 \quad (2.71)$$

$$l^2 = x^2 + y^2 \quad (2.72)$$

$$(y - w)^2 + a^2 = y^2 \quad (2.73)$$

Por (2.73) tenemos que

$$y = \frac{w^2 + a^2}{2w}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} l^2 &= x^2 + \left( \frac{w^2 + a^2}{2w} \right)^2 \\ &= x^2 + \frac{(w^2 + a^2)^2}{4w^2} \end{aligned}$$

y usando (2.71) se tiene que

$$\begin{aligned} l^2 &= x^2 + \frac{[x^2 - (a - x)^2 + a^2]^2}{4(x^2 - (a - x)^2)} \\ &= x^2 + \frac{[x^2 - a^2 + 2ax - x^2 + a^2]^2}{4(x^2 - a^2 + 2ax - x^2)} \\ &= x^2 + \frac{ax^2}{2x - a}. \end{aligned}$$

Así,

$$l = \sqrt{x^2 + \frac{ax^2}{2x - a}}.$$

Por otro lado, como  $\sqrt{x}$  es creciente, basta minimizar la cantidad subradical, es decir:

$$f(x) = x^2 + \frac{ax^2}{2x - a}.$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x + \frac{2ax(2x - a) - 2ax^2}{(2x - a)^2} \\
 &= \frac{2x(2x - a)^2 + 4ax^2 - 2a^2x - 2ax^2}{(2x - a)^2}
 \end{aligned}$$

Si  $f'(x) = 0$  se debe tener que

$$2x(4x^2 - 4ax + a^2) + 2ax^2 - 2a^2x = 0,$$

esto es,

$$x(4x - 3a) = 0.$$

Por lo tanto,  $x = \frac{3a}{4}$ .

La verificación que este valor de  $x$  minimiza  $l$  y el cálculo del valor mínimo de  $l$  se deja al estudiante.

### Ejercicios propuestos

- Entre todos los rectángulos de perímetro dado, encuentre el de mayor área.
- Entre todos los cilindros circulares rectos de volumen dado, hallar el de menor área lateral.
- Se quiere cerrar un potrero en forma rectangular y dejar uno de los lados en un río recto. Si se dispone de 1,000 metros de alambre y el cerco debe ocupar 3 corridas de este alambre, ¿cuál es el potrero de mayor área que se puede cercar con este alambre?
- Una escalera de 6 metros está apoyada sobre una pared de 2,80 metros de altura. Determinar la proyección horizontal máxima del saliente de la escalera al desplazar de la pared el pie de la escalera.

Indicación: Use como variable independiente el ángulo que forma la escalera con el suelo.

- Considere el punto  $(a, b)$  en el primer cuadrante. Hallar los puntos de la curva señalada más próximos al punto  $(a, b)$ .
  - $y = x^2$ .
  - $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ .
  - $x^2 - y^2 = 1$ .

6. El agua sale de un estanque hemisférico (base circular) por un orificio del fondo. Sea  $h$  la altura del agua por encima del orificio y  $V$  el volumen del agua que queda en el estanque en el tiempo  $t$ . La física dice que  $\frac{dV}{dt}$  es proporcional a  $\sqrt{h}$ . Pruebe que el descenso del nivel del agua es mínimo cuando la profundidad es dos tercios del radio de la base.
7. Un camión debe recorrer  $500Km$  a una velocidad constante  $v \frac{Km}{h}$ . El litro de bencina cuesta \$200 y el consumo del camión es  $10 + \frac{v^2}{100}$  litros por hora.

El conductor cobra \$7.500 por hora y cumple (excepcionalmente) las reglas del tránsito, es decir,  $50 \leq v \leq 100$ . Determine la velocidad más económica y el costo del viaje.

## 2.8. Aplicaciones V: Razón de cambio y diferenciales

### 2.8.1. Razones de cambio

La **razón de cambio** de una función  $y = f(x)$  es una forma de interpretar la derivada de la función como veremos a continuación.

Observemos que si el argumento  $x$  se incrementa en  $\Delta x$ , entonces a la función  $y$  le corresponde un incremento  $\Delta y$ . Así tenemos:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

El incremento de la función  $\Delta y$  correspondiente al incremento del argumento  $\Delta x$  se obtiene de:

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

**Definición 2.8.1** 1. La **razón de cambio promedio** de la función  $y$  en el intervalo de valores del argumento desde  $x$  hasta  $x + \Delta x$  se expresa por la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

El cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  indica el número de unidades del incremento de la función por unidades del incremento del argumento.

2. La **razón de cambio instantánea** de la función  $y$ , como ya lo hemos visto, es:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

### Ejercicios resueltos

1. Encontrar la razón de cambio promedio de una función  $y = 4x^3 - 2x + 1$  cuando  $x$  cambia de 2 a 2,5.

**Solución:** Sean  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 2,5$ , entonces  $\Delta x = 2,5 - 2 = 0,5$ . Como  $y_1 = 29$ ,  $y_2 = 58,5$ ; por lo tanto,  $\Delta y = y_2 - y_1 = 29,5$ . Luego,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{29,5}{0,5} = 59.$$

Ahora calcularemos la razón de cambio para cualquier valor del argumento.

$$y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 1,$$

y como

$$y = 4x^3 - 2x + 1$$

Restando obtenemos:

$$\Delta y = 12x^2\Delta x + 12x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 2(\Delta x),$$

entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 12x^2 + 12x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 2.$$

Observemos que si  $\Delta x \rightarrow 0$ , entonces  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 12x^2 - 2$ .

2. Calcular la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio.

**Solución:** El área de un círculo es  $A = \pi r^2$ . Luego

$$\frac{\Delta A}{\Delta r} = \frac{\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\Delta r} = 2\pi r + \pi \Delta r.$$

Entonces, cuando  $\Delta r \rightarrow 0$  queda la longitud de la circunferencia.

Si se tiene un círculo cuyo radio es  $2\text{cm}$  ¿Cuánto se incrementa el área si el radio crece en  $1\text{cm}$  ?

Como  $r = 2$ ,  $\Delta r = 1$ , entonces de  $\frac{\Delta A}{\Delta r} = 2\pi r + \pi \Delta r$ , se tiene  $\Delta A = 5\pi$ .

### Ejercicios propuestos

1. Encuentre la razón de cambio promedio de las siguientes funciones:

$$y = 6x^2 - 3x + 1 ; y = \cos x^2 ; y = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{x^2},$$

cuando  $x$  cambia de 3 a 5 y de -1 a 1.

2. Calcule la razón de cambio del área de un triángulo respecto a su perímetro.
3. Calcule la razón de cambio del volumen de un cilindro respecto del área de su base, manteniendo fija la altura. ¿Es esta razón de cambio la misma si ahora mantenemos fija el área de la base y movemos la altura?

4. a) Un objeto circular va aumentando de tamaño de manera cuando el radio es 6, la tasa de variación del mismo es 4. Encuentre la tasa de variación del área cuando el radio es 6.
- b) Suponga que el objeto circular de (a) es la sección transversal de un objeto esférico. Encuentre la tasa de variación del volumen cuando el radio es 6. (Volumen de la esfera =  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .)
- c) Suponga que la tasa de variación del área de la sección transversal circular es 5 cuando el radio es 3. Encuentre la tasa de variación del volumen cuando el radio es 3.
5. Si la población de una ciudad crece a partir de  $10^6$  habitantes a una cantidad  $P(t)$  dada por :

$$P(t) = 10^6 + 10^3 t^2,$$

donde  $t$  se mide en años.

- a) Determine la rapidez con que crece la población.
- b) Determine la población después de 10 años.
- c) ¿Cuál es la tasa de crecimiento cuando  $t = 10$  años ?

### 2.8.2. Diferenciales

La **diferencial** de una función  $y = f(x)$  se define como:

$$df(x) = f'(x)dx \text{ o simplemente } dy = f'(x)dx.$$

Por ejemplo si  $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$ , entonces  $dy = (12x^3 - 2)dx$ . Si  $g(x) = \sin^2 3x$ , entonces,  $dy = -6 \sin 3x \cos 3x dx$ .

Observemos que si  $y = f(x)$ , entonces su diferencial es  $dy = f'(x)dx$  y como ya hemos visto  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ , por lo tanto podemos escribir  $dy = \frac{dy}{dx}dx$ .

Gracias a esta observación podemos realizar formalmente las reglas de operación del cálculo de derivadas con diferenciales. Por ejemplo:

$$d(u \pm v) = \frac{du}{dx}dx \pm \frac{dv}{dx}dx = du \pm dv.$$

$$d(u \cdot v) = u \frac{dv}{dx}dx + v \frac{du}{dx}dx = u dv + v du.$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx}dx - u \frac{dv}{dx}dx}{v^2} = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$



Figura 2.9.1: Comparación entre  $\Delta y$  y  $dy$ .

La diferencial también puede interpretarse como una **función lineal de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$** , de la siguiente manera:  $h \rightarrow f'(x_0)h$ . Es usual denotar esta función por  $dy(h)$ , es decir,  $dy(h) = f'(x_0)h$ .

Observemos que  $x \mapsto dy$  es una función cuyo dominio es el dominio donde  $f$  es derivable y su recorrido está en el espacio de las funciones lineales de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ . Esta interpretación es muy útil, pues para funciones de varias variables no es posible generalizar el concepto de derivada pero sí el de diferencial, que será una aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas tiene por coeficiente las derivadas parciales.

### Ejercicios resueltos

1. Si  $f(x) = 3x^4 - 2x + 1$ , entonces  $dy = (12x^3 - 2)dx$ .
2. Si  $g(x) = \operatorname{sen}^2 3x$ , entonces  $dy = -6 \operatorname{sen} 3x \cos 3x dx$ .
3. Si  $y = x^3$ , entonces  $dy = 3x^2 dx$ .
4.  $d(\operatorname{tg} \theta) = \sec^2 \theta d\theta$ .
5. Si  $y = x^2$ ,  $x = \operatorname{sen} \theta$ , entonces  $dy = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} d\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta$ .
6. Calcular  $\frac{d(\operatorname{sen} x^3)}{dx}$ .

$$d(\operatorname{sen} x^3) = (\cos x^3)d(x^3) = \cos x^3(3x^2 dx) = 3x^2 \cos x^3 dx.$$

7. Calcular  $\frac{dy}{dx}$  si  $x^2 + y^3 - 2xy^2 = 0$ .

Tomando formalmente diferenciales a ambos lados de la ecuación: tenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= d(x^2) + d(y^3) + d(-2xy^2) \\ &= 2x dx + 3y^2 dy - 2d(xy^2) \\ &= 2x dx + 3y^2 dy - 2y^2 dx - 4xy dy \\ &= (2x - 2y^2) dx + (3y^2 - 4xy) dy \end{aligned}$$

Despejando en la última ecuación, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - 2x}{3y^2 - 4xy}.$$

**Observación:** Estos diferenciales que, en rigor, se llaman diferenciales de primer orden son de gran utilidad para calcular antiderivadas o primitivas de funciones, como se verá más adelante. También existen los diferenciales de orden superior y su operatoria formal es la de las derivadas de orden superior.

Si  $dy = f'(x)dx$ , entonces  $d^2y = f''(x)dx^2$  y, en general,  $d^k y = f^{(k)}(x)dx^k$ .

8. Si  $y = f(x) = 2 \cos^3 x$ , entonces  $dy = -6 \cos^2 x \operatorname{sen} x dx$ .

$$d^2y = (12 \cos x \operatorname{sen}^2 x - 6 \cos^3 x)dx^2.$$

9. Encontrar  $\frac{d^2y}{dx^2}$  cuando  $y$  viene dada implícitamente por la expresión  $x^3 - 2xy + y^4 = 1$ .

$$0 = 3x^2 dx - 2y dx - 2x dy + 4y^3 dy$$

$$0 = (3x^2 - 2y)dx + (4y^3 - 2x)dy.$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3x^2}{4y^3 - 2x}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(4y^3 - 2x)(2\frac{dy}{dx} - 6x) - (2y - 3x^2)(12y^2\frac{dy}{dx} - 2)}{(4y^3 - 2x)^2}.$$

Reemplazando  $\frac{dy}{dx}$  en la última expresión, nos queda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2x + 2)(2y - 3x^2)(4y^3 - 2x) - 6x(4y^3 - 2x)^2 - 12y^2(2y - 3x^2)^2}{(4y^3 - 2x)^3}.$$

### Ejercicios Propuestos

1. Calcule un valor aproximado de dos decimales para:

a)  $\sqrt{4,6}$

b)  $\sqrt[3]{7,8}$

c)  $\operatorname{sen}(0,2)$

d)  $\operatorname{cos}(-0,2)$

2. Determine una solución aproximada en  $[0, \pi]$ , con dos decimales, para la ecuación:

$$\cot x - 1, 1 = 0$$

3. Determine solución aproximada, con dos decimales, de la ecuación:

$$x^3 + 8,4 = 0$$

4. ¿Cuánto varía el área de un disco, cuando el radio crece de 2 a 2.007 cm?
5. Cuánto varía el volumen de un cubo, cuando su arista varía de  $a$  a  $a + \Delta l$  cm.

## 2.9. Aplicaciones VI: Física del movimiento

Supongamos una partícula que se mueve en línea recta en el eje cartesiano. Sea  $s(t)$  el **desplazamiento** de la partícula, es decir, la coordenada de la partícula en el instante  $t$ . El desplazamiento más elemental ocurre cuando  $s(t)$  es una función de tipo lineal de  $t$ ; en tal caso,

$$s(t) = vt + s_0, \text{ con } v, s_0 \in \mathbb{R}.$$

$s_0$  se puede interpretar como la **posición inicial** ( posición de la partícula en el tiempo  $t = 0$ ) Veamos ahora como podemos interpretar la constante  $v$ .

Observemos que para dos valores cualesquiera de  $t$ , digamos,  $t_1$  y  $t_2$  se tiene

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = v$$

$v$  se llamará la **velocidad** de la partícula, que en términos físicos es la variación del desplazamiento durante un intervalo de tiempo dividido por el tiempo transcurrido. El valor absoluto de este número se llama la **rapidez del movimiento**. Si la velocidad es positiva, la partícula se mueve hacia la derecha y si esta velocidad es negativa se mueve hacia la izquierda.

Recíprocamente, supongamos que la velocidad de la partícula es constante e igual a  $v$  y su desplazamiento en el instante  $t_0$  es  $s_0$ , entonces podemos calcular el desplazamiento en cualquier instante del tiempo por:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = v,$$

lo que implica  $s(t) = s(t_0) + v(t - t_0)$ . El gráfico de  $s(t)$  es una línea recta con pendiente  $v$ .

Ahora si  $s(t)$  no es una función lineal de  $t$  (como hemos visto en la introducción de este capítulo en un cuerpo en caída libre  $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ ), entonces la razón:

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

deja de ser constante. ¿Qué entenderemos ahora por velocidad? A este cociente lo llamaremos **velocidad media** de la partícula en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$ . Este número da una buena idea de la velocidad promedio; pero nuestro objetivo es dar una idea de **velocidad instantánea**. Queremos  $v = v(t)$ . Para ello se procede como ya lo hemos explicado, considerando  $t_1 = t$ ,  $t_2 = t + h$  y tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , es decir,

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = s'(t)$$

Si conocemos  $v(t)$  y el desplazamiento en un instante  $t_0$ , ya no es tan fácil calcular el desplazamiento en un instante cualquiera  $s(t)$ , pues debemos resolver una ecuación del siguiente tipo:

$$s'(t) = v(t), \quad \text{con } s(t_0) = s_0.$$

Por ejemplo, si  $v(t) = gt$ , entonces  $s(t) = \frac{g}{2}(t - t_0)^2 + s_0$ . Estas ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales y la incógnita es una función de la cual se conocen relaciones entre sus derivadas. Volvamos a nuestra partícula. Si suponemos ahora que la velocidad  $v(t)$  es una función lineal del tiempo  $t$ , es decir,

$$v(t) = at + a_0, \quad \text{con } a, v_0 \in \mathbb{R}.$$

$v_0$  se puede interpretar como la **velocidad inicial** (velocidad de la partícula en el tiempo  $t = 0$ ) Veamos ahora como podemos interpretar la constante  $a$ . Llamaremos **aceleración media** a la variación de la velocidad durante un intervalo de tiempo dividido por el tiempo transcurrido:

$$\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = a.$$

De igual manera que la velocidad, el signo de la aceleración significa que la velocidad crece o decrece con el tiempo dependiendo si es positiva o negativa .

Si este cociente deja de ser constante, procedemos como en la velocidad instantánea para definir la aceleración instantánea:

$$a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = v'(t).$$

Como ya sabemos que  $v(t) = s'(t)$ , entonces  $a(t) = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)$ . Es decir, la aceleración es la segunda derivada del desplazamiento respecto del tiempo.

Realicemos ahora el camino al revés, supongamos que la aceleración es constante e igual a  $a$ , la velocidad en el instante  $t_0$  es  $v_0$  y la posición inicial en  $t_0$  es  $s_0$ . Calculemos  $v(t)$  y  $s(t)$ . Como

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = a,$$

entonces  $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ .

Ahora queremos calcular  $s(t)$ ; primero observemos que  $s(t)$  no puede ser una función lineal en  $t$ , pues debemos tener,

$$s'(t) = v(t) = v_0 + a(t - t_0).$$

Entonces, pensando en el ejemplo de caída libre y lo que conocemos de cálculo diferencial:

$$s(t) = v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + s_0.$$

El problema es más complicado si la aceleración  $a(t)$  no es constante, debemos resolver en este caso

$$a(t) = v'(t) \text{ y } s'(t) = v(t)$$

es decir,

$$s''(t) = a(t).$$

que es nuevamente una ecuación diferencial, pero ahora es de segundo orden, pues aparecen involucradas derivadas de orden dos.

Los siguientes ejercicios, que son los típicos de un curso de física elemental ayudarán a entender estas definiciones.

### Ejercicios resueltos

1. Estudiemos la siguiente situación:

Lancemos verticalmente desde el suelo con un resorte una pelota al aire con una velocidad inicial  $v_0 = 29,4 \frac{m}{seg}$  y supongamos que el desplazamiento en el instante  $t$  está dado por

$$s(t) = 29,4t - 4,9t^2$$

- a) Calculemos la velocidad media en el primer medio segundo, un segundo después y desde el primer al segundo segundo.

$$v = \frac{s(\frac{1}{2}) - s(0)}{\frac{1}{2}} = 19,6 \frac{m}{seg}$$

$$v = \frac{s(1) - s(0)}{1} = 24,5 \frac{m}{seg}$$

$$v = \frac{s(2) - s(1)}{1} = 14,7 \frac{m}{seg}$$

- b) ¿Cuál es la velocidad al cabo de medio segundo, un segundo, tres segundos? Primero calculemos la velocidad en función de  $t$ . Esta es:

$$v(t) = s'(t) = 29,4 - 9,8t.$$

Luego,

$$v(\frac{1}{2}) = 24,5 \frac{m}{seg}, \quad v(1) = 19,6 \frac{m}{seg}, \quad v(3) = 0 \frac{m}{seg}.$$

- c) ¿Cuándo alcanzará la pelota su altura máxima y cuándo caerá al suelo? En la altura máxima  $v(t) = 0$ , es decir,  $29,4 - 9,8t = 0$ , lo que implica  $t_1 = 3seg$ . Caerá al suelo cuando  $s(t) = 0$ , es decir:  $29,4t - 4,9t^2 = 0$  y  $t > 0$ , lo que implica  $t_2 = 6seg$ .

d) ¿Cuál es la altura máxima ?

La altura máxima es  $s(t_1) = 44,1$  m.

e) ¿Qué velocidad tendrá al caer al suelo ? La velocidad al llegar al suelo es  $v(t_2) = -29,4 \frac{m}{seg}$ .

f) ¿Cómo se puede saber si la pelota sube o baja?

Si el signo de  $v(t)$  es positivo, entonces la pelota sube; si  $v(t) < 0$  entonces baja.

Luego,

$$v(t) > 0 \iff 29,4 - 9,8t > 0 \iff 0 < t < t_1 = 3 \text{ seg.}$$

$$v(t) < 0 \iff 29,4 - 9,8t < 0 \iff t_1 < t < t_2 = 6 \text{ seg.}$$

En  $t = 3 \text{ seg}$  y  $t = 6 \text{ seg}$  la pelota está detenida y corresponde a la altura máxima y al momento en que cae al suelo.

g) ¿Qué se puede decir de la aceleración?

$$a(t) = v'(t) = -9,8 \frac{m}{seg^2} \text{ para todo } t \in [0, t_2].$$

Es decir, la aceleración es constante y obviamente corresponde a la aceleración de gravedad promedio  $g = -9,8 \frac{m}{seg^2}$ .

2. Supongamos que dos partículas parten del mismo punto en línea recta.

Sean  $s_1(t) = \frac{1}{20}t^5 + \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$  y  $s_2(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + 1$ , las ecuaciones del desplazamiento de las partículas. Determinar los instantes  $t$  donde ambas aceleraciones coinciden.

Sean  $a_1(t)$  y  $a_2(t)$  las aceleraciones de las partículas. Entonces,

$$a_1(t) = v_1'(t) = s_1''(t) = t^3 + 2t - 1 = (t^2 + t - 1)(t + 1)$$

$$a_2(t) = v_2'(t) = s_2''(t) = t + 1$$

Luego  $a_1(t) = a_2(t)$  si y sólo si  $t^2 + t - 2 = 0$ , es decir,  $t = -2$  o  $t = 1$ . Pero sólo tiene sentido físico  $t = 1 \text{ seg}$

El hecho que ambas partículas tengan la misma aceleración en el mismo instante, no significa que estén en el mismo punto ni con la misma velocidad. En efecto,  $s_1(1) \neq s_2(1)$  y  $v_1(1) = s_1'(1) \neq v_2(1) = s_2'(1)$ .

3. El problema fundamental en la mecánica clásica es el problema recíproco del tratado anteriormente, es decir, se quiere encontrar la función desplazamiento conociendo los principios de la dinámica de Newton. El segundo principio por ejemplo, dice en breve, que la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa, esto es,

$$F = C \cdot m \cdot a = C \cdot m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

(Sin pérdida de generalidad podemos suponer  $C = 1$ )

Esta fórmula es una ecuación diferencial de segundo orden donde la incógnita es la función del tiempo  $s(t)$ . En definitiva, se quiere calcular el desplazamiento conociendo la ecuación diferencial del movimiento y esto se puede hacer conociendo tanto técnicas de derivación como de integración. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

Supongamos que tenemos una partícula de masa  $m$  sujeta a un muro por un resorte que puede deslizarse en forma horizontal. La ley de Hooke dice que un resorte estirado o comprimido reacciona con una fuerza proporcional a su deformación y que tiende a su posición de equilibrio. Esto significa que cuando la masa está en el punto  $s$ , la fuerza sobre ella es  $-Ks$ , donde  $K$  es la constante de rigidez del resorte.

La ecuación del movimiento, en este caso, estará dada según el segundo principio de Newton por

$$m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + Ks = 0, \quad K > 0$$

Esto se puede escribir como:

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} - \omega_0^2 s(t) = 0; \quad \text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Una solución general de esta ecuación diferencial es  $s(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ .

Por lo ya visto en el capítulo de trigonometría esta solución es una senoide del tipo:

$$s(t) = R \cos(\omega_0 t - \alpha); \quad \text{con } R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ y } \alpha = \arctan \frac{c_2}{c_1}$$

¿Qué conclusiones físicas se pueden obtener de esta solución? Veamos algunas:

- El sistema oscila perpetuamente con período  $T = \frac{\pi}{\omega_0}$ .
- $s(t)$  oscila entre  $-R \leq s(t) \leq R \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- $\omega_0$  es el número de oscilaciones en un tiempo igual a  $2\pi$  y se llama **frecuencia natural** del sistema. Esta frecuencia crece si aumenta la rigidez del resorte y disminuye si aumenta su masa.

La ecuación  $m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + Ks = 0$  se conoce con el nombre de la ecuación del **movimiento oscilatorio conservativo** (no hay transformación de energía).

Un cuadro un poco más realista es considerar el **roce ó fricción** de la masa con la superficie de deslizamiento. En este caso el roce es proporcional a la velocidad y tiene sentido contrario a esta. La ecuación del movimiento resulta entonces:

$$m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \mu \frac{ds}{dt} + Ks = 0, \mu > 0$$

La solución general de esta ecuación dependerá de relaciones entre  $\mu, K$ , y  $m$ . Por ejemplo, si  $\mu^2 - 4mK \geq 0$ , entonces:

$$s(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \text{ con } \lambda_{1,2} = \frac{1}{2m} [-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mK}]$$

Como estos números son negativos, el sistema tiende exponencialmente al equilibrio, sin oscilar.

Si ahora  $\mu^2 - 4mK < 0$ , entonces:

$$s(t) = R e^{\frac{-\mu}{2m} t} \cos \left( \frac{\sqrt{4mK - \mu^2}}{2m} t - \alpha \right)$$

es la solución general y concluimos que  $s(t)$  oscila tendiendo al equilibrio (grafique  $s(t)$  en su calculadora). Esta ecuación se conoce como la ecuación del **movimiento oscilatorio amortiguado** (o disipativo), pues transforma, debido al roce, energía potencial elástica en calórica.

Si estamos interesados en mantener el sistema oscilando, debemos aplicar una fuerza externa a la masa  $m$ , por ejemplo,  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ . La ecuación del movimiento es entonces:

$$m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \mu \frac{ds}{dt} + Ks = F_0 \cos \omega t$$

Una solución de esta ecuación es:

$$g(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \beta)}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2}}, \text{ con } \beta = \arctan \frac{\mu \omega}{K - m\omega^2}$$

Compruebe que efectivamente  $g(t)$  es una solución y que  $g(t) + s(t)$  con  $s(t)$  solución de la ecuación amortiguada es la solución general para esta ecuación, que se conoce con el nombre de ecuación del **movimiento oscilatorio amortiguado y forzado**.

4. Dos partículas  $P$  y  $Q$  se encuentran en  $t = 0$  en los puntos  $A$  y  $B$  de la recta real respectivamente, con  $A < B$ . Ambas partículas se están moviendo hacia la derecha.

Suponga que  $P$  dobla en aceleración a  $Q$  en cada instante y  $Q$  triplica a  $P$  en velocidad en  $t = 0$ . ¿Es posible determinar en qué instante y lugar se encontrarán?

**Solución:** Sean  $s_1(t), v_1(t)$  y  $a_1(t)$ , la posición, velocidad y aceleración de  $P$  y  $s_2(t), v_2(t)$  y  $a_2(t)$ , los mismos parámetros para  $Q$ .

Por hipótesis tenemos  $s_1(0) = A$ ,  $s_2(0) = B$ ,  $v_2(0) = 3v_1(0)$  y  $a_1(t) = 2a_2(t)$ .

Esta última expresión es  $\frac{d^2 s_1(t)}{dt^2} = 2\frac{d^2 s_2(t)}{dt^2}$ , por lo tanto, por ejercicio resuelto 2.3.3,1(b), se tiene:

$$\frac{ds_1(t)}{dt}(t) = 2\frac{ds_2}{dt}(t) + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Luego  $v_1(t) = 2v_2(t) + \alpha$ , lo que implica por el mismo ejercicio  $s_1(t) = 2s_2(t) + \alpha t + \beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Calculemos ahora  $\alpha$  y  $\beta$ :  $v_1(0) = 2v_2(0) + \alpha$ , entonces por hipótesis,  $v_1(0) = 6v_1(0) + \alpha$  implica  $\alpha = -5v_1(0)$ .

Por otro lado  $s_1(t) = 2s_2(t) - 5v_1(0)t + \beta$  y evaluando en  $t = 0$  se tiene  $A = 2B - 5v_1(0) \cdot 0 + \beta$  implica  $\beta = A - 2B$

Si  $T$  es el instante del encuentro y  $C$  el lugar donde este ocurre, tenemos:

$$C = 2C - 5v_1(0)T + (A - 2B), \text{ es decir, } C = 5v_1(0)T + 2B - A$$

Esto es una relación entre el instante y el lugar del encuentro. Para determinar estos parámetros debemos tener otros datos adicionales. ¿Qué tipo de datos pondría Ud.?

5. Suponga que en  $t = 0$  un proyectil situado en el punto  $(x_0, y_0)$  del plano cartesiano es lanzado con una velocidad inicial  $v_0$ . Esta velocidad es vectorial. Si  $\theta_0$  es el ángulo que forma este vector con el eje de las abscisas, entonces las componentes de  $v_0$  son:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \theta_0 \\ v_{0y} &= v_0 \operatorname{sen} \theta_0 \end{aligned}$$

La trayectoria del proyectil está determinada por la fuerza gravitacional que actúa sobre él (y la resistencia del ambiente). El segundo principio de Newton, en este caso, escrito en componentes es:

$$F_x = m \cdot a_x \text{ y } F_y = m \cdot a_y$$

Entonces las componentes de la aceleración son:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = 0 \text{ y } a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{-mg}{m} = -g$$

Pero como ya hemos visto  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0 \implies v_x = Cte = v_{0x}$  y como  $v_x = \frac{dx}{dt}$ , entonces  $x = v_{0x}t + x_0$

También  $a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -g \implies v_y = -gt + v_{0y}$  y como  $v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_{0y}$ , entonces  $y = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + y_0$ . Luego reemplazando las condiciones iniciales, tenemos:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + (v_0 \cos \theta_0)t \\y(t) &= y_0 + (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \frac{g}{2}t^2\end{aligned}$$

La distancia de  $(x_0, y_0)$  al proyectil es  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

La rapidez del proyectil es  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

La dirección de la velocidad en función del ángulo  $\theta$  es  $\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$

Supongamos para simplificar que  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . De las ecuaciones de  $x(t)$  e  $y(t)$ , podemos reemplazar  $t$  y resulta:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \quad \text{y} \quad y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}x^2,$$

es decir, la trayectoria  $y(x)$  del proyectil es una parábola.

### Ejercicios propuestos

1. Realice un estudio similar al del movimiento oscilatorio para la ecuación de un **cir-cuito eléctrico** elemental, constituido por una inductancia ( $L$ ), una resistencia ( $R$ ) y un condensador ( $C$ ). Si un generador produce un voltaje  $V(t) = V_0 \operatorname{sen} \omega t$ , entonces la corriente  $I$  del circuito está dada por la ecuación:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = V_0 \cos \omega t$$

Interprete sus respuestas del punto de vista físico.

2. Considere un proyectil lanzado desde el origen del plano cartesiano con una velocidad inicial  $v_0 = 26 \frac{m}{seg}$  y un ángulo de elevación  $\theta_0 = 53^\circ$ .
  - a) Determine la posición del proyectil, la magnitud y la dirección de su velocidad cuando  $t = 2seg$ .

- b) Calcule el tiempo que demora el proyectil en alcanzar el punto mas alto de su trayectoria y calcule la altura de dicho punto.
  - c) Calcule el alcance del proyectil (mayor distancia alcanzada) y el tiempo que se demora en llegar a ese punto.
3. Se lanza una pelota desde el suelo a otra pelota que está a una altura  $h$  y a una distancia  $c$ . Suponga que al momento de ser lanzada la primera pelota, la segunda es soltada en caída libre.

Calcule dónde y en qué instante ellas chocan. ¿Siempre chocan?

## 2.10. Bibliografía

1. A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev y otros : *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza Universidad, Madrid,(1985).
2. T. Apostol : *Calculus*. Editorial Reverté (1965).
3. R. Bartle y D. Sherbert : *Introducción al análisis matemático de una variable*. Editorial Limusa (1989).
4. Colección H.E.C.: *Elementos de trigonometría*. Santiago.
5. F. Granero : *Cálculo*. McGraw - Hill. Madrid (1991).
6. J. Guajardo y J. Urrea: *Cuarenta problemas resueltos de cálculo integral*. Trabajo de Titulación, Fac de Ciencias - USACH (2002).
7. J. Kitchen.: *Cálculo*. McGraw - Hill (1986).
8. I. D. Kudriáv'tsev, A.D. Kutásov, V.I.Chejlov, M.I.Shsbunin : *Problemas d Análisis Matemático*. Ed. Mir Moscú.
9. K. Kuratowski : *Introduction to calculus*. Pergamon Press (1961).
10. H. Larsen.: *Tables, Formulas and curves*. Holt, Rinehart and Winston (1953).
11. E. Lima.: *Análise real*. IMPA (1989).
12. E. A. Maxwell : *An analytical calculus* . Cambridge University Press (1959).
13. Réunion de professeurs : *Exercices de trigonométrie*. Ligel, París (1960).
14. R. Rothe : *Matématica superior*. Tomos I y II. Editorial Labor (1959).
15. M. Spivak : *Calculus*. Reverté. 1970.