



Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica



Capítulo 3

Diseño de Filtros Activos

Electrónica Avanzada

Introducción

Los filtros activos son circuitos que permiten el paso de determinadas bandas de frecuencias de una señal. En otras palabras, modifican la respuesta de frecuencia de una señal, para un requerimiento de cierta aplicación.

Se llaman filtros activos, debido a que utilizan en su diseño, amplificadores operacionales, los cuales deben ser alimentados para que puedan funcionar, de ahí el nombre de activos, pues son dispositivos activos.

A diferencia de los filtros pasivos, los cuales solo poseen dispositivos pasivos, como resistencias, condensadores y bobinas, los filtros activos poseen ventajas y desventajas con respecto a los filtros pasivos:

Ventajas

- 1) No se utilizan bobinas, las cuales son más difíciles de fabricar y más costosas.
- 2) Se usan cuando se requiere una precisión en la aplicación
- 3) No cargan las demás etapas del circuito en general, pues los amplificadores operacionales al tener una alta impedancia de entrada y una baja impedancia de salida, hace que esta etapa del filtro no tenga un efecto de carga en el sistema.
- 4) Los amplificadores operacionales poseen ganancia de lazo abierto muy alta, y como los filtros activos, se construyen con A. O., y con realimentación, se puede modificar la ganancia de lazo cerrado para que el filtro amplifique una cierta cantidad la señal. Sin embargo, esta no es la función que se busca con el filtro, para eso se puede usar un amplificador a la salida del sistema requerido.
- 5) Los amplificadores operacionales son bastantes fáciles de manejar, y de bajo valor monetario, lo que simplifica el diseño de un buen filtro.

Desventajas

- 1) Son sensibles al ruido, y la tensión de Offset que pueda aparecer en un amplificador operacional.
- 2) Son inestables con una temperatura elevada ($T^{\circ} > 75^{\circ}\text{C}$).
- 3) Los amplificadores operacionales tiene un ancho de banda limitado, por lo que también en aplicaciones donde se necesita un gran ancho de banda, los amplificadores operacionales pueden limitar este requerimiento.

Definición de filtro

Como habíamos mencionado un filtro, es un circuito que deja pasar cierta banda de frecuencias y elimina la banda restante de frecuencias, o más bien las atenúa en gran magnitud. Por lo cual podemos ilustrar este comportamiento con el diagrama que se muestra en la figura 3.1.



Figura 3.1. Diagrama simple de un filtro

De acuerdo a la teoría de señales y sistemas, definimos la función de transferencia del filtro $H(s)$, para las señales que se muestran en la figura 3.1, que son tensiones de entrada y salida, respectivamente.

$$H(s) = \frac{e_i(s)}{e_o(s)} \quad (3.1)$$

Si hacemos $s = j\omega$, donde $\omega = 2\pi f$, tenemos:

$$|H(j\omega)| = F(\omega)$$

Donde $F(\omega)$, es ahora la función de transferencia del filtro en función de ω .

Clasificación de los Filtros

De acuerdo a lo que hemos definido, los filtros se pueden clasificar dependiendo que tipo de banda de frecuencias deja pasar, y obviamente no deja pasar.

La clasificación es la siguiente:

- 1) Filtros Pasa Bajos (L. P. *en inglés Low Pass Filter*)
- 2) Filtros Pasa Altas (H. P. *en inglés High Pass Filter*)
- 3) Filtros Pasa Banda (B. P. *en inglés Band Pass Filter*)
- 4) Filtros Rechaza Banda (*NOTCH o de muesca*)

Los filtros pasa bajos solo permiten el paso de frecuencias bajas.

Los filtros pasa altas solo permiten el paso de frecuencias altas.

Los filtros pasa banda solo permiten el paso de una banda de frecuencias específica

Los filtros pasa banda solo permiten el paso de las frecuencias fuera de una cierta banda específica.

Filtros Pasa Bajos (L. P.)

Este tipo de filtros posee una respuesta de frecuencia como se muestra a continuación en la figura 3.2.

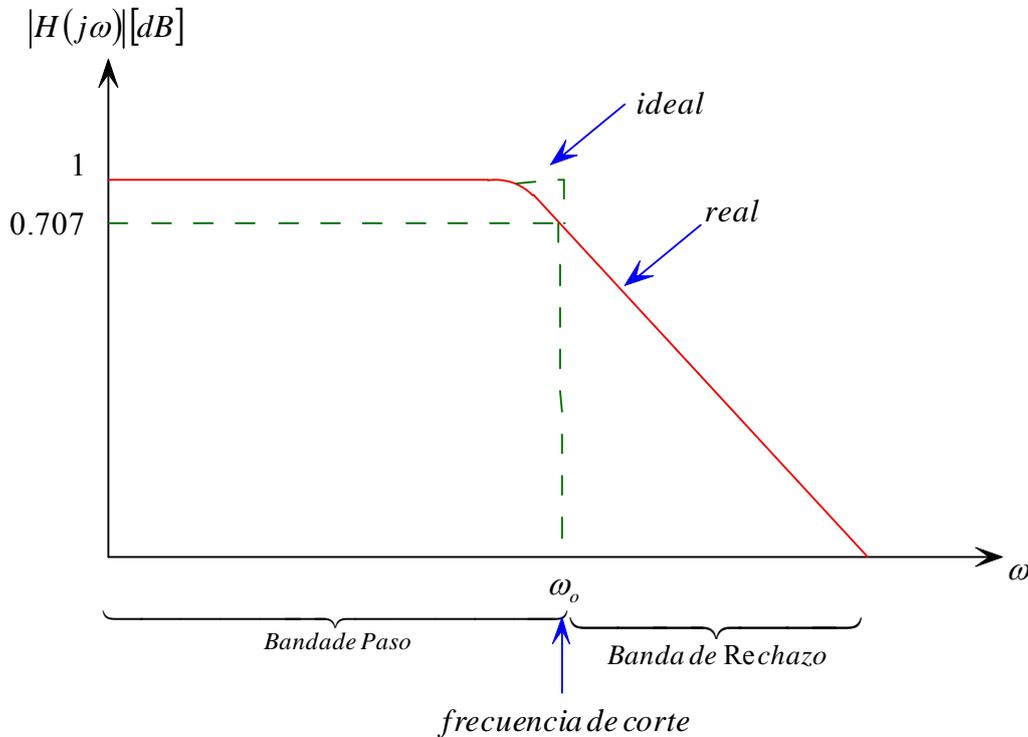


Figura 3.2. Gráfica de función de transferencia de un filtro L. P.

Como se observa en la figura 3.2. la frecuencia de corte se define como la frecuencia donde:

$$e_o(s) = 0.707 \cdot e_i(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e_i(s) \quad (3.2)$$

Es decir donde la ganancia del filtro se reduce en 3 dB, y esto sucede para este valor. Comprobando:

$$|H(j\omega)| = 20 \log \left[\frac{e_o(s)}{e_i(s)} \right] = 10 \log \left[\left(\frac{1/\sqrt{2} \cdot e_i(s)}{e_i(s)} \right)^2 \right] = 10 \log \left[\frac{1}{2} \right] = -3 [dB]$$

La atenuación en la banda de rechazo depende de los *polos* de $H(s)$, determinando el *orden* del filtro.

Los polos van aumentando la atenuación de la banda de rechazo. Esto se puede ver mejor en la figura 3.3.

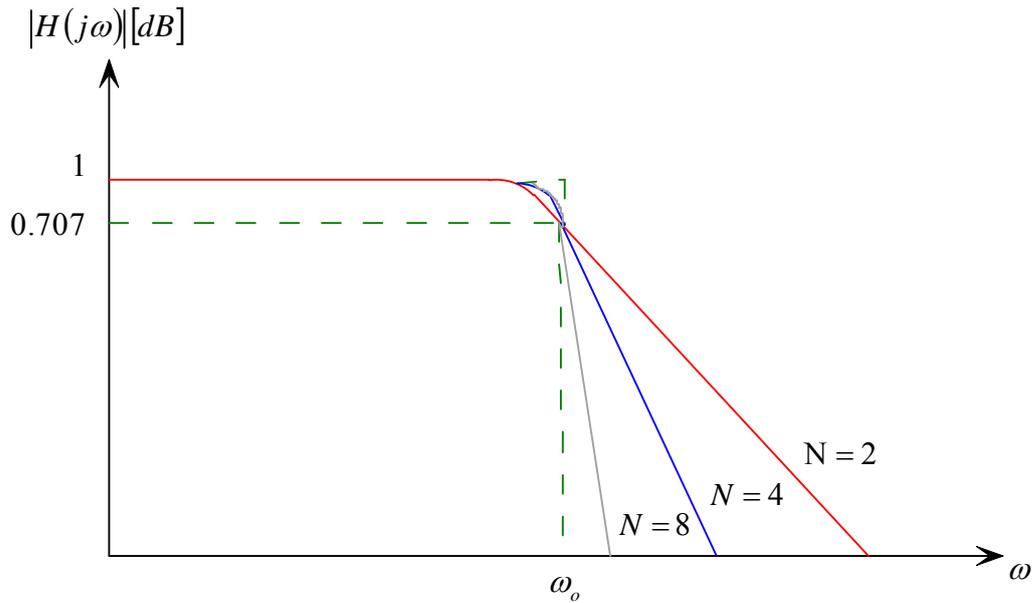


Figura 3.3. Función de transferencia para distintos números de polos.

En otras palabras, el número de polos determina el orden de la función de transferencia del filtro, y por lo tanto del filtro. El número de polos, es igual al orden del filtro.

Recordando la teoría de señales y sistemas:

$$H(s) = k \frac{(s - c_1)(s - c_2) \cdots (s - c_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_m)} \quad (3.3)$$

Donde n es el número de ceros de la función de transferencia y m el número de polos de la función de transferencia.

Los ceros de $H(s)$ hacen cero a la función de transferencia y para su cálculo se iguala el numerador de $H(s)$ a cero.

Los polos de $H(s)$ hacen infinito a la función de transferencia y para su cálculo se iguala en denominador de $H(s)$ a cero.

Para $N = 2$, tenemos que:

$$H(s) = \frac{H_o \cdot \omega_o^2}{s^2 + b \cdot s + \omega_o^2} \quad (3.4)$$

Donde $H_o = |H(j\omega)|$. Sin amplificación, tenemos que: $H_o = 1$

Con $\omega \ll \omega_o$ en banda de paso.

Gráficos de Atenuación versus Frecuencia

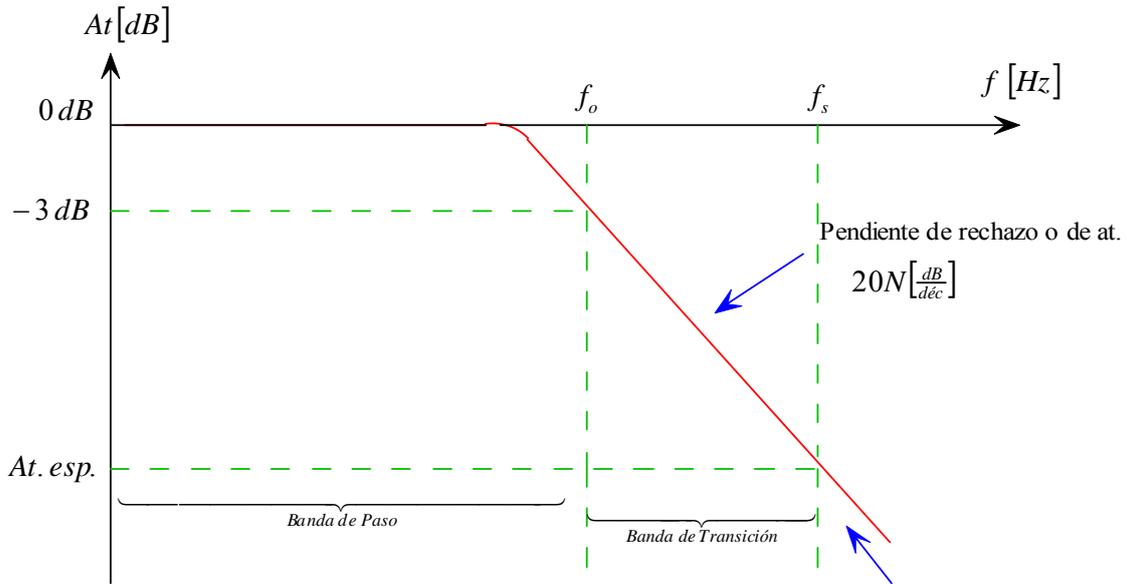


Figura 3.4. Gráficos de atenuación vs frecuencia filtro L. P.

Donde:

$$At [dB] = 20 \log \frac{e_o(s)}{e_i(s)} \quad (3.5)$$

En banda de paso: $At = 20 \log 1 = 0 [dB]$

En f_o : $At = 20 \log 0.707 = -3 [dB]$

f_s es la frecuencia para la cual se desea una atenuación específica (At. Esp.)

Ejemplo:

Se tienen 2 filtros L. P., uno de orden 2 y el otro de orden 4, ambos con $f_o = 1kHz$

Se pide:

- Graficar la atenuación en dB de ambos filtros indicando sus atenuaciones en 1kHz, en 10kHz, y en 100kHz.
- Se excita ambos filtros con una senoide de 10 V de amplitud. Calcular la amplitud de la señal a la salida de los filtros si la frecuencia de la senoide es de: i) 0.5kHz ii) 1kHz iii) 10kHz iv) 100kHz
- Si se excita al filtro $N = 4$ con una señal cuadrada, grafique y especifique la señal de salida del filtro si la frecuencia de la señal cuadrada es de: i) 800 Hz ii) 300 Hz iii) 100 Hz

Solución:

a)

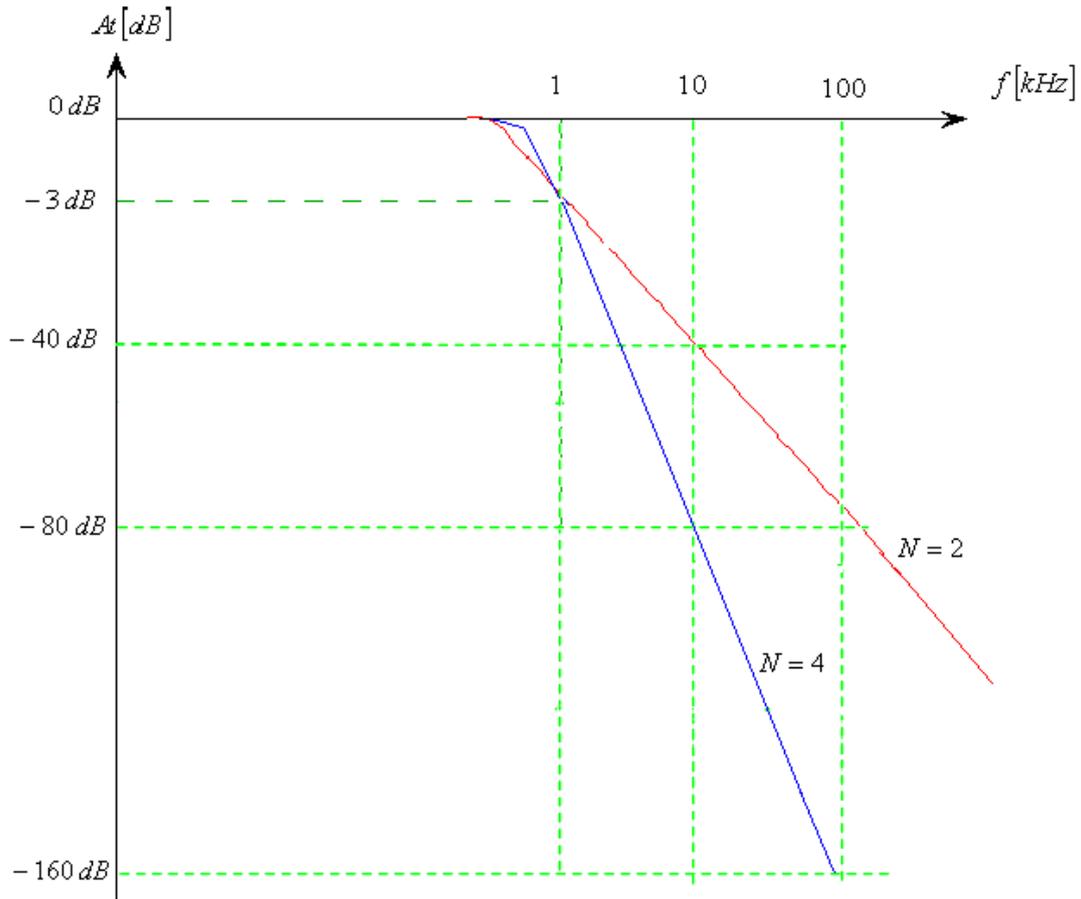


Figura 3.5. Gráfico del ejercicio.

b)

$f [kHz]$	$N = 2 [V]$	$N = 4 [V]$
0.5	10	10
1	0.707	0.707
10	$-40 = 20 \log \frac{e_o}{10}$ $e_o = 100 m$	$-80 = 20 \log \frac{e_o}{10}$ $e_o = 1 m$
100	1 m	$-160 = 20 \log \frac{e_o}{10}$ $e_o = 100 n$

c) De acuerdo a la teoría de las Series de Fourier, que dice que una señal periódica puede ser representada por una suma infinita de términos cosenos y/o senos, la señal cuadrada puede expresarse como:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\text{sen}(\omega t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\omega t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\omega t) + \dots \right]$$

Luego una señal cuadrada tiene infinitos armónicos impares, luego de acuerdo a la señal de excitación (fundamental) de la señal cuadrada, será el resultado a la salida del filtro.

Simulando con el **Electronics Workbench**®. Tenemos:

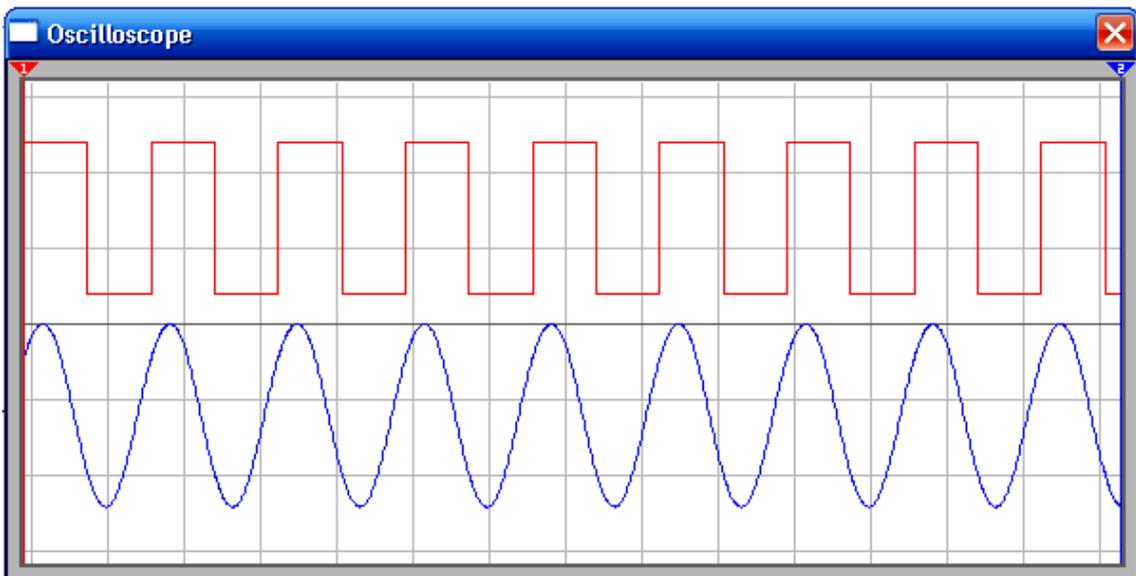


Figura 3.6. Con 800 Hz se ve la fundamental de la señal cuadrada.

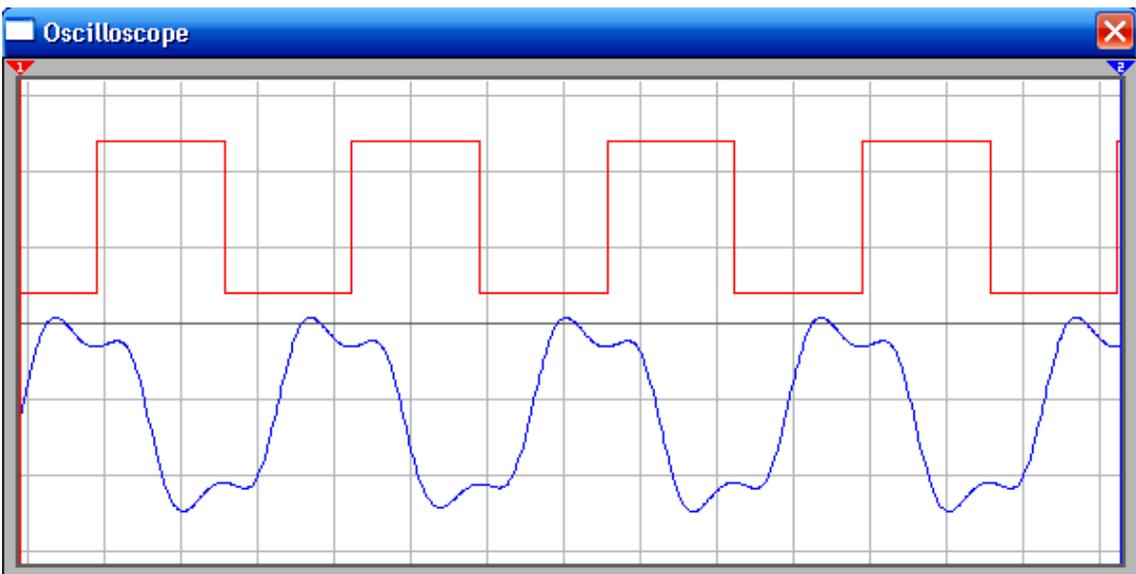


Figura 3.7. Con 300 Hz se ve la fundamental y la tercera armónica de la señal cuadrada.



Figura 3.8. Con 100 Hz se ve la fundamental, la tercera, quinta, séptima y novena armónica de la señal cuadrada.

Circuitos Empleados como Filtros Activos

Los circuitos que veremos a continuación solo sirven para el caso de filtros L. P., pero la configuración para los demás tipos de filtros son las mismas pero con la diferencia que los condensadores y resistencias van en otras posiciones.

Configuración Ganancia Infinita y Realimentación Múltiple

En la figura 3.6 se muestra el circuito de filtro L. P. con este tipo de configuración.

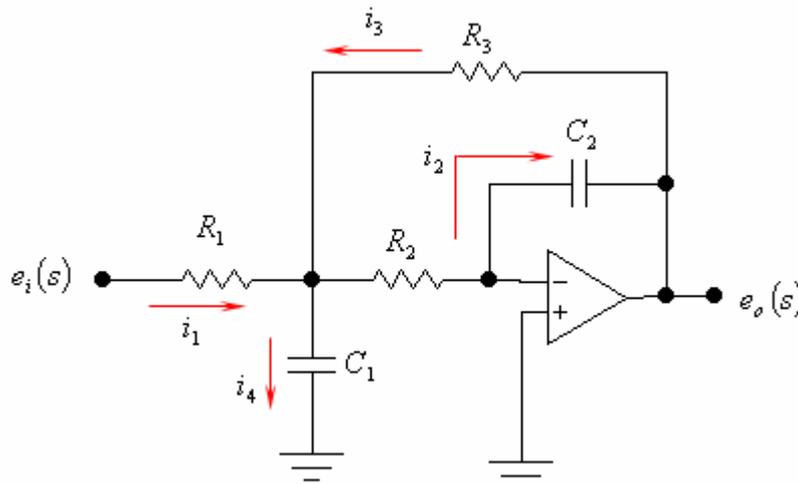


Figura 3.9. Configuración Ganancia Infinita y Realimentación Múltiple para filtro L. P.

Recordando la teoría de los amplificadores operacionales, consideramos tierra virtual, es decir, la tensión de entrada del A. O. es nula ($v_i = 0$) y la corriente de la entrada inversora también es nula ($i_i = 0$).

Por lo tanto:

$$i_1 + i_3 = i_2 + i_4$$

$$i_1 = \frac{e_i(s) - V}{R_1}; \quad i_3 = \frac{e_o(s) - V}{R_3}; \quad i_4 = \frac{V}{1/sC_1} = sC_1V$$

$$i_2 = \frac{V - v_i}{R_2} = \frac{v_i - e_o(s)}{1/sC_2} \rightarrow i_2 = \frac{V}{R_2} = -sC_2e_o(s) \Rightarrow V = -sC_2R_2e_o(s)$$

$$\frac{e_i(s) - V}{R_1} + \frac{e_o(s) - V}{R_3} = -sC_2e_o(s) + sC_1V$$

$$\frac{e_i(s)}{R_1} + \frac{sC_2R_2e_o(s)}{R_1} + \frac{e_o(s)}{R_3} + \frac{sC_2R_2e_o(s)}{R_3} = sC_2e_o(s) - s^2C_1C_2R_2e_o(s)$$

$$\frac{e_i(s)}{R_1} = -e_o(s) \left[\frac{sC_2R_2}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{sC_2R_2}{R_3} + sC_2 + s^2C_1C_2R_2 \right] \quad \left| \times \frac{1}{C_1C_2R_2} \right.$$

$$\frac{e_i(s)}{R_1R_2C_1C_2} = -e_o(s) \left[s \frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{R_2R_3C_1C_2} + s \frac{1}{C_1R_3} + s \frac{1}{C_1R_2} + s^2 \right]$$

Finalmente:

$$H(s) = \frac{e_i(s)}{e_o(s)} = - \frac{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + s \frac{1}{C_1} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right] + \frac{1}{R_2R_3C_1C_2}} \rightarrow \omega_o^2 \quad (3.6)$$

La frecuencia de corte es: $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_2R_3C_1C_2}} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_2R_3C_1C_2}} \quad (3.7)$

$$H_o\omega_o^2 = H_o \frac{1}{R_2R_3C_1C_2} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2} \rightarrow H_o = \frac{R_3}{R_1} \quad (3.8)$$

Si $H_o = 1 \Rightarrow R_3 = R_1$

Configuración Sallen - Key

El circuito de esta configuración se muestra en la figura 3.10. Al igual que la configuración anterior, esta solo pertenece al filtro L. P., para que funcione como otro tipo de filtro, deben cambiarse las posiciones de los condensadores y resistencias.

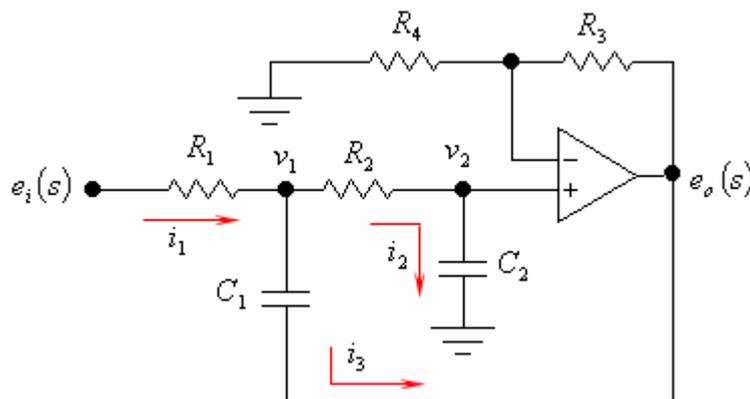


Figura 3.10. Configuración Sallen – Key para filtro L. P.

Nuevamente, consideramos la condición ideal del A. O., es decir, tierra virtual ($v_i = 0$ y $i_i = 0$).

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$i_1 = \frac{e_i(s) - v_1}{R_1}; \quad i_3 = [v_1 - e_o(s)]sC_1; \quad i_2 = \frac{v_1 - v_2}{R_2} = sC_2v_2$$

$$\frac{v_1}{R_2} = v_2 \left[\frac{1}{R_2} + sC_2 \right] \Rightarrow v_1 = v_2 [1 + sC_2R_2] \quad (3.9)$$

Analizando ahora el amplificador no inversor:

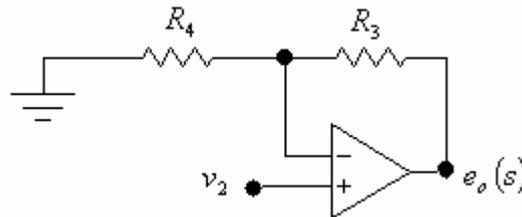


Figura 3.11. Amplificador No-Inversor.

$$A_{vL} = \frac{e_o(s)}{v_2} = 1 + \frac{R_3}{R_4} = K$$

$$v_2 = \frac{e_o(s)}{K} \quad (3.10)$$

Usando las ecuaciones (3.9) y (3.10), obtenemos:

$$v_1 = \frac{e_o(s)}{K} [1 + sC_2R_2]$$

$$\frac{e_i(s) - v_1}{R_1} = sC_2 \frac{e_o(s)}{K} + [v_1 - e_o(s)]sC_1$$

Desarrollando:

$$\frac{e_i(s)}{R_1} - \frac{e_o(s)}{KR_1} [1 + sC_2R_2] = sC_2 \frac{e_o(s)}{K} + \frac{e_o(s)}{K} [1 + sC_2R_2]sC_1 - sC_1e_o(s)$$

$$\frac{e_i(s)}{R_1} - \frac{e_o(s)}{KR_1} - s \frac{C_2R_2e_o(s)}{KR_1} = s \frac{C_2e_o(s)}{K} + s \frac{C_1e_o(s)}{K} + s^2 \frac{C_1C_2R_2e_o(s)}{K} - sC_1e_o(s)$$

$$\frac{e_i(s)}{R_1} = e_o(s) \left[\frac{1}{KR_1} + s \frac{C_2 R_2}{KR_1} + s \frac{C_2}{K} + s \frac{C_1}{K} + s^2 \frac{C_1 C_2 R_2}{K} - s C_1 \right] \quad \left| \frac{K}{C_1 C_2 R_2} \right.$$

$$e_i(s) \frac{K}{C_1 C_2 R_1 R_2} = e_o(s) \left[\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} + s \frac{1}{C_1 R_1} + s \frac{1}{C_1 R_2} + s \frac{1}{C_2 R_2} + s^2 - s \frac{K}{C_1 R_2} \right]$$

Finalmente, tenemos:

$$H(s) = \frac{e_o(s)}{e_i(s)} = \frac{\frac{K}{R_1 R_2 C_1 C_2} \rightarrow H_o \omega_o^2}{s^2 + s \left[\frac{1-K}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \rightarrow \omega_o^2 \quad (3.11)$$

Con $K = 1$.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s \left[\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (3.12)$$

Donde: $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (3.13)$

$$H_o = K$$

Si $H_o = K = 1 \Rightarrow R_3 = 0 \quad R_4 = \infty$

Por lo cual podemos reemplazar el amplificador no inversor como:

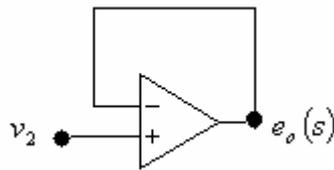


Figura 3.12 Circuito equivalente del amplificador no inversor si $K = 1$.

De esto, tenemos que no es necesario poner R_3 y R_4 en el circuito, por lo tanto, el circuito final de la configuración Sallen – Key es el que se muestra en la figura 3.13.

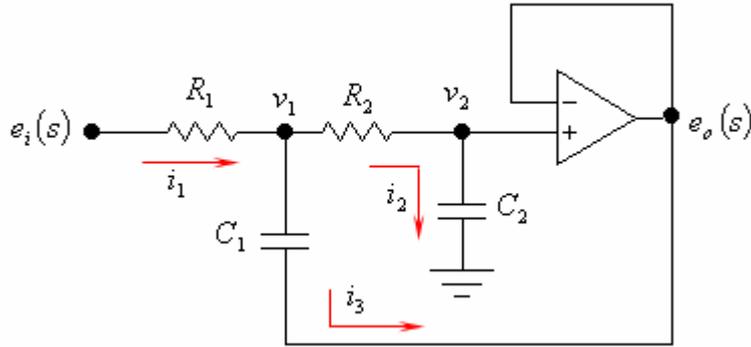


Figura 3.13. Circuito final de la configuración Sallen – Key.

Funciones de Butterworth

Estas funciones se emplean debido a que la ganancia en función de ω , tienen una forma especial y desarrollándolas, se comportan como filtros pasa bajos o los demás filtros, usando transformaciones de variables.

Las funciones de Butterworth, tiene una ganancia del tipo:

$$|G_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad \forall n \geq 1 \quad (3.14)$$

Si analizamos como varía ω , obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega^{2n} \ll 1 &\Rightarrow |G_n(j\omega)| = 1 \\ |G_n(j\omega)|_{dB} &= 20 \log 1 = 0 \text{ dB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega^{2n} = 1 &\Rightarrow |G_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} 0.707 \\ |G_n(j\omega)| &= 20 \log 0.707 = -3 \text{ dB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega^{2n} \gg 1 &\Rightarrow |G_n(j\omega)| = \frac{1}{\omega^n} \\ |G_n(j\omega)| &= -20 \log \omega \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Si } \omega = 10 &\Rightarrow |G_n(j\omega)|_{dB} = -20n \text{ [dB]} \\ \text{Si } \omega = 100 &\Rightarrow |G_n(j\omega)|_{dB} = -40n \text{ [dB]} \\ \text{Si } \omega = 1000 &\Rightarrow |G_n(j\omega)|_{dB} = -60n \text{ [dB]} \end{aligned} \right\} \text{Pendiente} = -20n \left[\frac{dB}{d\text{dec}} \right]$$

Vemos que la pendiente de la banda de atenuación depende del orden del filtro y es $-20n$ [dB]

Gráfico de la Función de Butterworth

El gráfico de atenuación versus frecuencia que describe a este tipo de función es la que aparece en la figura 3.14.

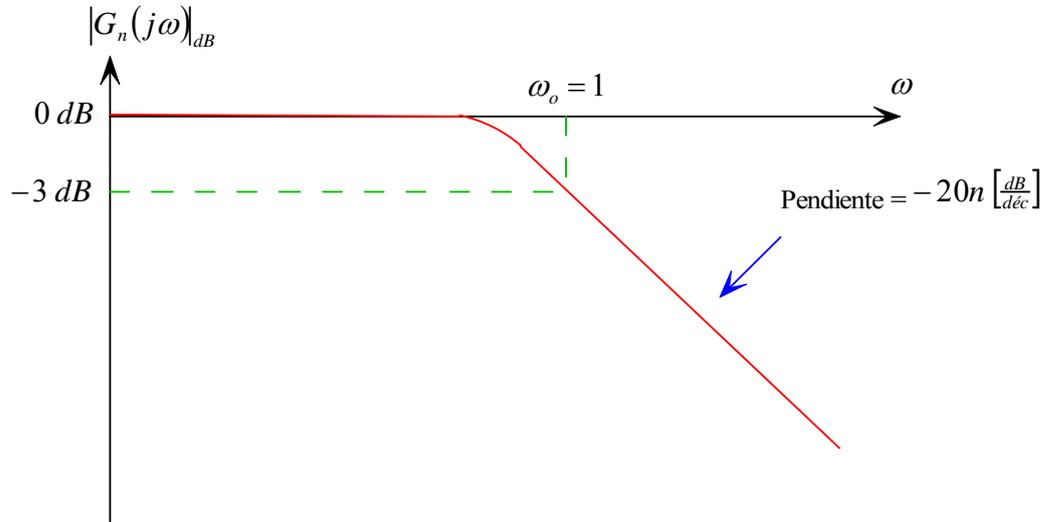


Figura 3.14. Gráfico de atenuación vs frecuencia de Butterworth.

Las funciones de Butterworth se comportan como filtros L. P. estando normalizados a la frecuencia de corte de 3 dB ($\omega_o = 1$) y tienen una pendiente de rechazo de $-20n \text{ [dB/déc]}$

Para trabajar con estas atenuaciones, se usa un gráfico normalizado, que generalmente se encuentra en los textos de la materia, y en la figura 3.15 mostramos este gráfico.

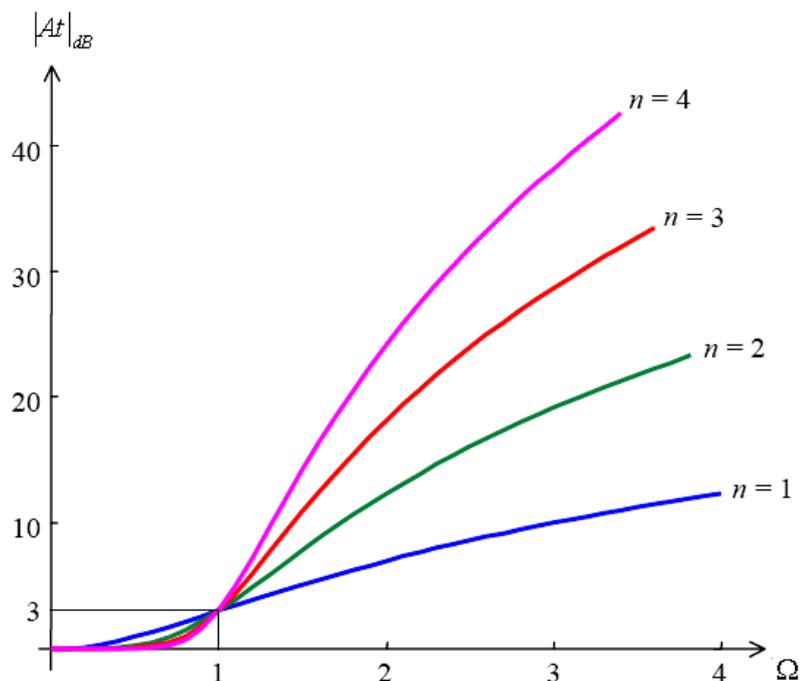


Figura 3.15. Atenuación normalizada de la función de Butterworth.

A continuación mostramos un gráfico más detallado (figura 3.16).

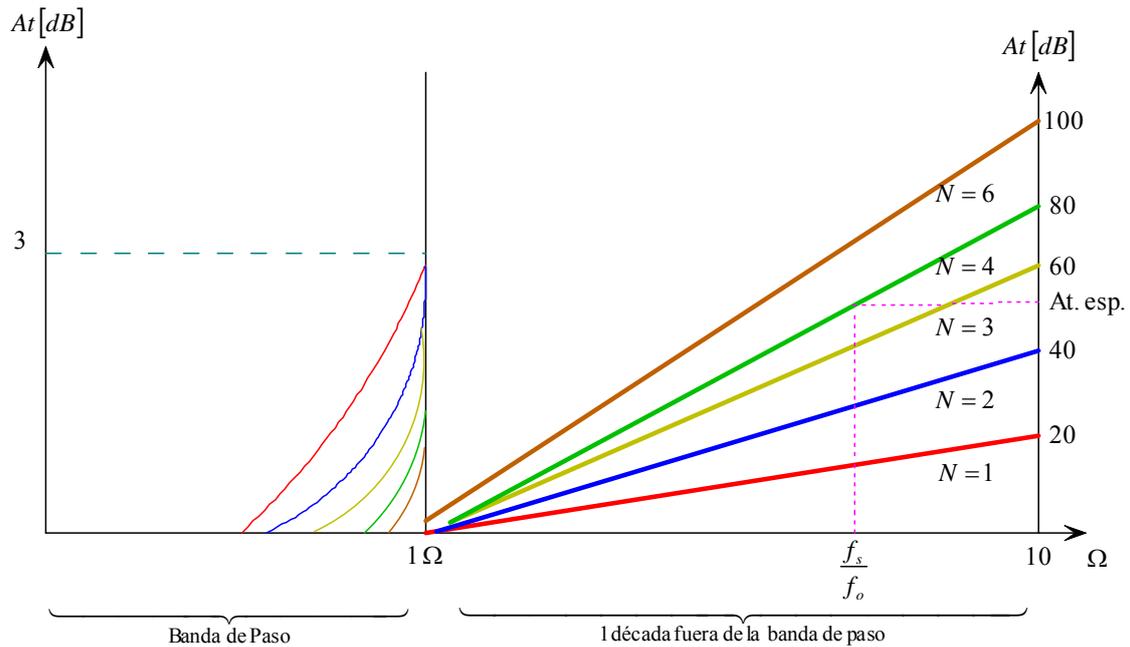


Figura 3.16. Gráfico de atenuación normalizado de Butterworth.

Este gráfico tipo tabla, se puede encontrar en textos especializados en filtros activos. El orden del filtro con normalización se calcula así:

$$\Omega = \frac{f_s}{f_o} = \frac{\text{frecuencia para la cual se desea at. esp.}}{\text{frecuencia de corte de 3 dB}} \quad (3.15)$$

Buscando en la tabla la atenuación dada con la frecuencia de corte y específica dada, tendremos la coordenada para conocer el orden del filtro con polos normalizados.

Ejemplo:

Encontrar el orden del filtro si se desea una atenuación de 30 dB en 300 Hz y 50 dB mínimos en 900 Hz.

Solución:

Usando la tabla tenemos que N = 6.

Los polos de $|G_n(j\omega)|$ se obtienen:

$$1 + \omega^n = 0 \rightarrow \text{Si } s = j\omega \rightarrow 1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = 0 \rightarrow \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = -1$$

$$\frac{s}{j} = \pm(-1)^{\frac{1}{2n}} \rightarrow s = \pm(-j^{2n})^{\frac{1}{2n}}$$

La solución es:

$$s_m = -\operatorname{sen}\left[\frac{2m-1}{2n}\right]\pi + j \cos\left[\frac{2m-1}{2n}\right]\pi \quad m = 1,2,3,\dots,n \quad (3.16)$$

n orden del filtro.

Para $m = 2$.

$$s_1 = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + j \cos\frac{\pi}{4} = -0.707 + j0.707$$

$$s_2 = -\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + j \cos\frac{3\pi}{4} = -0.707 - j0.707$$

$$s_{1,2} = -0.707 \pm j0.707$$

Luego:

$$H(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{(s+0.707-j0.707)(s+0.707+j0.707)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1.414s + 1} \quad (3.17)$$

Ahora como el filtro es de orden 6, y sacamos la función de transferencia normalizada de orden 2, podemos construir este filtro en 3 etapas (conexión en cascada) cada una de orden 2. Luego solo sacaremos los $H(s)$ de solo los pares complejos conjugados.

$$H(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_6)} = H_1(s)H_2(s)H_3(s)$$

Donde:

$$H_1(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{s^2 + b_1s + 1}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{(s-s_3)(s-s_4)} = \frac{1}{s^2 + b_2s + 1}$$

$$H_3(s) = \frac{1}{(s-s_5)(s-s_6)} = \frac{1}{s^2 + b_3s + 1}$$

En fin, debemos obtener los b_i para el diseño del filtro.

En la figura 3.17 mostramos el diagrama de lo que resultaría el circuito final.

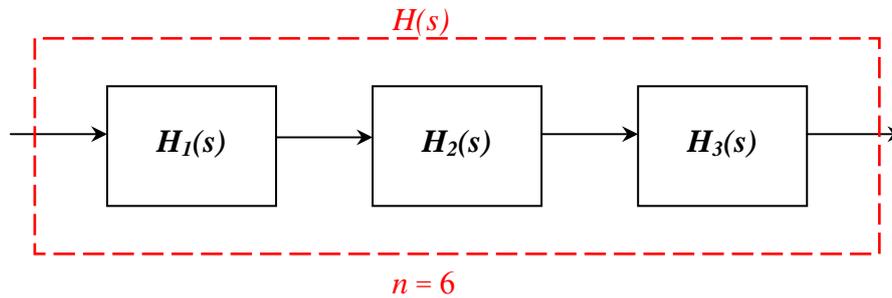


Figura 3.17 Diagrama en bloques de un filtro de orden 6.

Ejercicio de Diseño:

3 dB de atenuación en 1kHz. 30 dB mínimo en 2.5kHz

Solución:

Por la tabla tenemos que $n = 4$.

Los polos adheridos a la tabla son:

$$s_{1,2} = -0.9239 \pm j0.3827$$

$$s_{3,4} = -0.3327 \pm j0.9239$$

Luego:

$$H_1(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{1}{s^2 + 1.1478s + 1}$$

$$H_1(s) = \frac{1}{(s - s_3)(s - s_4)} = \frac{1}{s^2 + 0.7654s + 1}$$

Escogiendo configuración de ganancia infinita y realimentación múltiple, tenemos:

$$H(s) = \frac{e_o(s)}{e_i(s)} = - \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s \underbrace{\frac{1}{C_1} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right]}_{b_i} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}} \rightarrow 1 \tag{3.18}$$

Sea $C_1 = C$ y $C_2 = lC$

Además $R_1 = R_3$. Luego obtendremos, de la ecuación (3.18):

$$\frac{1}{R_2 R_3 l C^2} = 1 \rightarrow R_2 = \frac{1}{R_3 l C^2} \quad (3.19)$$

Además:

$$\frac{1}{C} \left[\frac{2}{R_3} + R_3 l C^2 \right] = b$$

$$\rightarrow l C^2 R_3^2 - b C R_3 + 2 = 0 \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) es una ecuación cuadrática en R_3 , luego tendremos 2 soluciones para R_3 . Resolviendo esta ecuación:

$$R_3 = \frac{bC \pm \sqrt{(bC)^2 - 8lC^2}}{2lC^2} \quad (3.21)$$

Vemos que el discriminante debe tener una condición para que las raíces de R_3 no sean complejas. Esta es la restricción:

$$(bC)^2 \geq 8lC^2$$

$$l \leq \frac{b^2}{8} \quad (3.22)$$

Ejercicio:

Demostrar que para la configuración **Sallen – Key**:

$$l \leq \frac{b^2}{4} \quad \text{Si } C_1 = C \text{ y } C_2 = lC \quad (K = 1)$$

Volviendo al diseño con la configuración de ganancia infinita y realimentación múltiple, tenemos que:

$$b = 1.8478 \quad l \leq 0.426$$

Elegiremos $l = 0.1$ y $C = 1$, para que los valores de los condensadores sean de valores nominales comerciales.

$C_1 = 1$ y $C_2 = 0.1$ son valores normalizados en amplitud y frecuencia.

Por lo tanto el resultado para las resistencias es:

Para $H_1(s)$:

$$\left. \begin{aligned} R_3 &= 9.239 \pm 8.084 \\ R_{31} &= 17.323 = R_{11} \\ R_{21} &= 0.577 \end{aligned} \right\} \text{Valores normalizados en amplitud}$$

$$\begin{aligned} R_{32} &= 1.155 = R_{12} \quad (\text{Para el caso de la resta}) \\ R_{22} &= 8.658 \end{aligned}$$

Para $H_2(s)$:

$$b = 0.7654 \quad l \leq 0.0732$$

Se elige: $l = 0.01$ y $C = 1$

$$C_1 = 1 \text{ y } C_2 = 0.01$$

$$\begin{aligned} R_{31} &= 73.831 = R_{11} \\ R_{21} &= 1.3544 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{32} &= 2.709 = R_{12} \\ R_{22} &= 36.913 \end{aligned}$$

Criterio de Desnormalización

Sea el mayor de los condensadores igual a $0.1\mu\text{F}$. Luego la ecuación para desnormalizar las resistencias y condensadores es:

$$\begin{array}{ccc} C_n = R_o \omega_o C = R_o 2\pi f_o C & & (3.23) \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow & & \\ 1 \quad \quad \quad 0.1\mu\text{F} & & \end{array}$$

R_o es la constante de normalización en amplitud.

$$R_o = \frac{C_n}{\omega_o C}$$

Para el ejemplo que estamos viendo:

$$R_o = \frac{1}{2\pi \cdot 1000 \cdot 0.1 \cdot 10^{-6}} = 1592$$

Para las resistencias:

$$R_n = \frac{R}{R_o} \quad (3.24)$$

R_n Valor normalizado

R Valor nominal de la resistencia en $[\Omega]$

Para $H_1(s)$:

$$C_1 = 0.1\mu F ; \quad C_2 = 0.01\mu F$$

Para R_3 y R_1 :

$$1.155 = \frac{R}{1592} \rightarrow R_3 = R_1 = 1839 [\Omega]$$

Para R_2 :

$$8.658 = \frac{R}{1592} \rightarrow R_2 = 13784 [\Omega]$$

Para $H_2(s)$:

$$C_1 = 0.1\mu F ; \quad C_2 = 1nF$$

Para R_3 y R_1 :

$$2.709 = \frac{R}{1592} \rightarrow R_3 = R_1 = 4313 [\Omega]$$

Para R_2 :

$$36.913 = \frac{R}{1592} \rightarrow R_2 = 58765 [\Omega]$$

Estos valores son los que conforman el circuito final que se muestra en la figura 3.18, los cuales seguirán una nomenclatura igual para el criterio de sumar o restar para obtener los valores normalizados de las resistencias, pero de acuerdo a que $H(s)$ pertenecen. Es decir:

$$C_{km} \quad y \quad R_{km}$$

Donde k es el número del condensador o resistencia según su posición (respetando lo definido en cada configuración), y m se refiere a que $H(s)$ pertenece tal dispositivo.

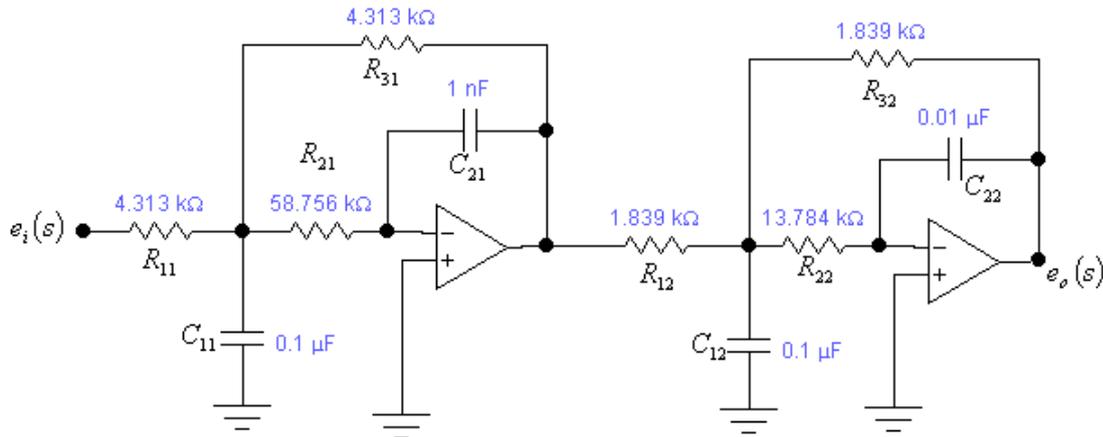


Figura 3.18. Circuito final del filtro L. P. diseñado.

Ejercicio de Diseño 2:

Se desea tener un filtro L. P. que tenga una atenuación de 3 dB en 5kHz y 50 dB mínimos en 15kHz.

Se pide el diseño teórico del filtro, simular en el **Electronics Workbench** mostrando en el Plotter de Bode la atenuación a los 5kHz, 15kHz y en 50kHz.

Excitar al filtro con una señal cuadrada y visualizar las señales a la entrada y a la salida con el osciloscopio. La frecuencia de la señal cuadrada debe ser tal que en la salida se visualice:

- i) La fundamental
- ii) La fundamental y la tercera armónica
- iii) La fundamental, la tercera armónica y la quinta armónica.

Diseño del Filtro L. P.

Para el diseño de este filtro pasa bajo realizamos los siguientes pasos para obtener los valores de resistencias y los valores de los condensadores.

Se tiene que la frecuencia de corte del filtro pasa bajo es de $f_c = 5kHz$, y a los 15kHz posee una *atenuación específica* de 50 dB. Tenemos la relación:

$$\Omega = \frac{f_s}{f_c} = \frac{\text{frecuencia para la cual se desea at.esp.}}{\text{frecuencia de corte de 3 dB}} = \frac{15kHz}{5kHz} = 3$$

Con $\Omega = 3$, revisamos la tabla *normalizada* de las **Funciones de Butterworth**, y encontramos que el filtro que se busca diseñar es de orden $N = 6$, el cual posee los siguientes polos:

$$s_{1,2} = -0.9659 \pm j0.2585$$

$$s_{3,4} = -0.7071 \pm j0.7071$$

$$s_{5,6} = -0.2585 \pm j0.9659$$

Luego la *función de transferencia* del filtro $H(s)$, se compone de tres filtros pasa bajos de orden 2 cada uno, conectados en cascada, y los cuales poseen las funciones de transferencia, $H_1(s)$, $H_2(s)$ y $H_3(s)$ respectivamente.

$$H_1(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{(s^2 + 1.9318s + 1)} \quad b_1 = 1.9318 \quad l_1 \leq \frac{b_1^2}{8} = \frac{1.9318^2}{8} = 0.466$$

Por lo tanto se utiliza para valores comerciales un $l_1 = 0.1$

$$H_2(s) = \frac{1}{(s-s_3)(s-s_4)} = \frac{1}{(s^2 + 1.4142s + 1)} \quad b_2 = 1.4142 \quad l_2 \leq \frac{b_2^2}{8} = \frac{1.4142^2}{8} = 0.25$$

Por lo tanto se utiliza para valores comerciales un $l_2 = 0.1$

$$H_3(s) = \frac{1}{(s-s_5)(s-s_6)} = \frac{1}{(s^2 + 0.5170s + 1)} \quad b_3 = 0.5170 \quad l_3 \leq \frac{b_3^2}{8} = \frac{0.5170^2}{8} = 0.033$$

Por lo tanto se utiliza para valores comerciales un $l_3 = 0.01$

Donde $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot H_3(s)$

Nota: elegimos el l en base a obtener valores comerciales para los condensadores, ya que para las resistencias usamos potenciómetros.

Escogemos como circuito a usar, la **configuración de ganancia infinita y realimentación múltiple**, donde:

Si $C_{1m} = C$ y $C_{2m} = l_m C$ Además: $R_{1m} = R_{3m} \quad m = 1,2,3$ (Filtros 1, 2 y 3)

$$R_{2m} = \frac{1}{R_{3m} l_m C^2} \quad (3.25) \quad \Rightarrow \quad R_{3m} = \frac{b_m C \pm \sqrt{(b_m C)^2 - 8 l_m C^2}}{2 l_m C^2} \quad (3.26)$$

Sea $C = 1 \quad \forall m$

Para $H_1(s)$: $C = 1 \quad \wedge \quad l_1 = 0.1$

$$C_{11} = 1 ; C_{21} = 0.1$$

Usando y reemplazando los valores en la ecuación (3.26), tenemos que:

$$\therefore R_{31} = R_{11} = 18.22$$

Usando la ecuación (3.25):

$$R_{21} = 0.548$$

Para $H_2(s)$: $C = 1 \wedge l_2 = 0.1$

$$C_{12} = 1; C_{22} = 0.1$$

Usando la ecuación (3.26):

$$\therefore R_{32} = R_{12} = 12.54$$

Usando la ecuación (3.25)

$$R_{22} = 0.797$$

Para $H_3(s)$: $C = 1 \wedge l_3 = 0.01$

$$C_{13} = 1; C_{23} = 0.01$$

Usando la ecuación (3.26):

$$\therefore R_{33} = R_{13} = 47.4$$

Usando la ecuación (3.25)

$$R_{23} = 2.11$$

Criterio de Desnormalización

Sea el condensador de valor más grande igual a $0.1\mu F$. Entonces:

$$C_n = R_o \omega_o C \quad \Rightarrow \quad R_o = \frac{C_n}{\omega_o C} = \frac{1}{2\pi \cdot 5kHz \cdot 0.1\mu F} = 318.31$$

Para las resistencias:

$$R_n = \frac{R}{R_o}$$

Para $H_1(s)$: $C_{11} = 0.1\mu F$ $C_{21} = l_1 \cdot C = 10nF$

Las resistencias:

$$R_{31} = R_{11} = R_n R_o = 5800[\Omega] \quad R_{21} = R_n R_o = 174[\Omega]$$

Para $H_2(s)$: $C_{12} = 0.1\mu F$ $C_{22} = l_2 \cdot C = 10nF$

Las resistencias:

$$R_{32} = R_{12} = R_n R_o = 3992[\Omega] \quad R_{22} = R_n R_o = 254[\Omega]$$

Para $H_3(s)$: $C_{13} = 0.1\mu F$ $C_{23} = l_3 C = 1nF$

Las resistencias:

$$R_{33} = R_{13} = R_n R_o = 15113[\Omega] \quad R_{23} = R_n R_o = 672[\Omega]$$

Construcción del Filtro L. P.

Una vez, calculadas todas las resistencias y condensadores construimos el filtro L. P. de orden 6, el cual se muestra en la figura 3.19

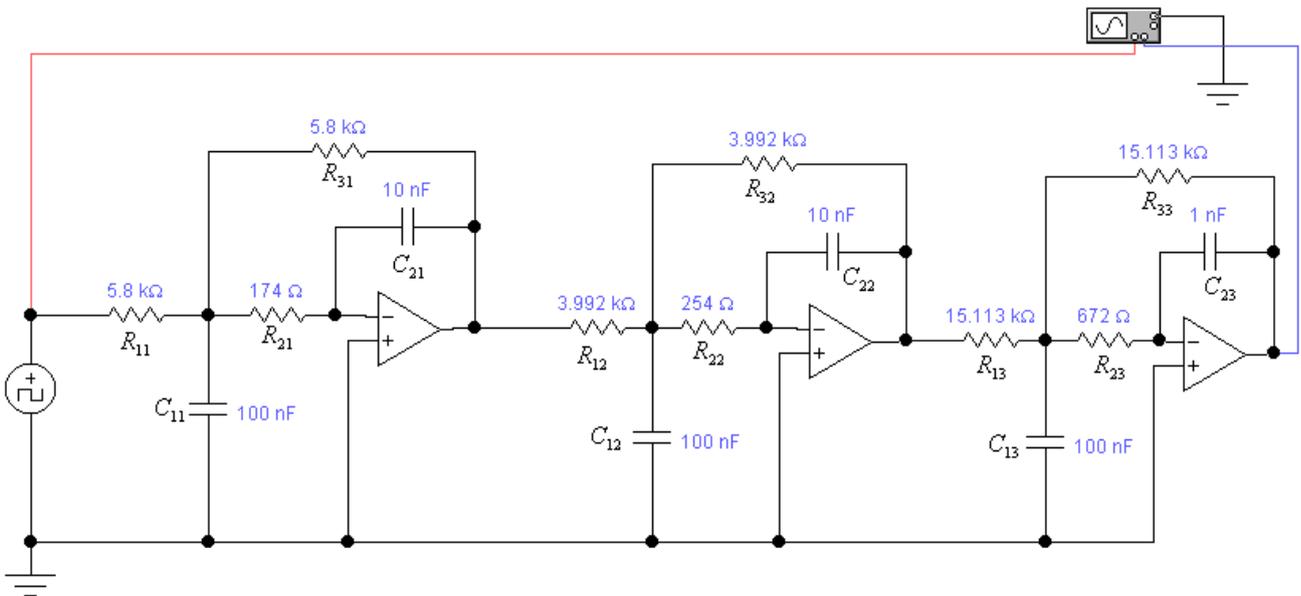


Figura 3.19. Filtro L. P. diseñado.

Como se ve en la figura 3.19, el filtro fue excitado con una fuente de señal cuadrada, más conocida como reloj (clock), para visualizar el resultado en la salida.

Para poder visualizar la fundamental, la señal cuadrada tenía una frecuencia de 3kHz.

Para poder visualizar la fundamental y la tercera armónica, la frecuencia de la señal cuadrada fue ajustada a 1.5kHz.

Para poder visualizar la fundamental, la tercera y quinta armónica, la frecuencia de la señal cuadrada fue de 800 Hz.

Esto se ve gráficamente en el osciloscopio virtual del Electronics Workbench, en las figuras 3.20, 3.21 y 3.22, respectivamente.

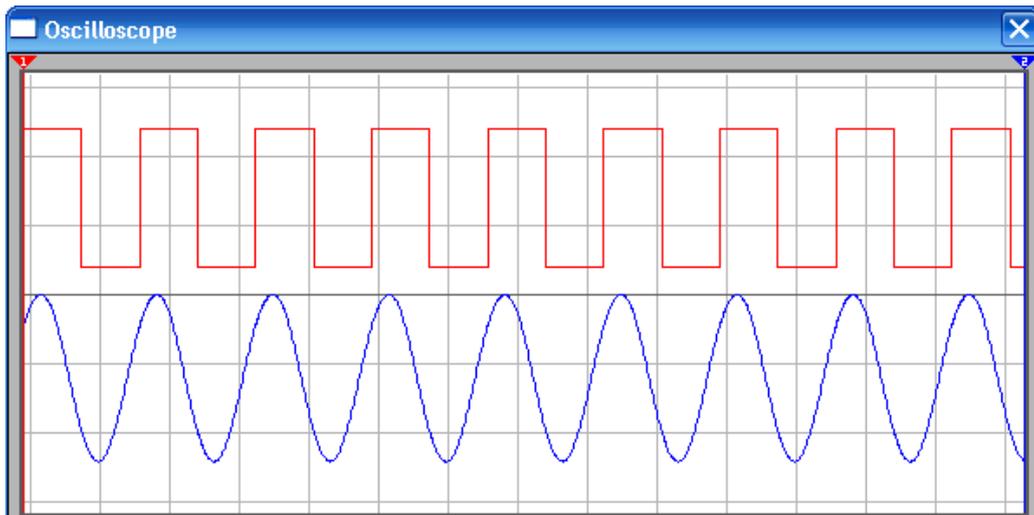


Figura 3.20. La fundamental a la salida del filtro L. P.

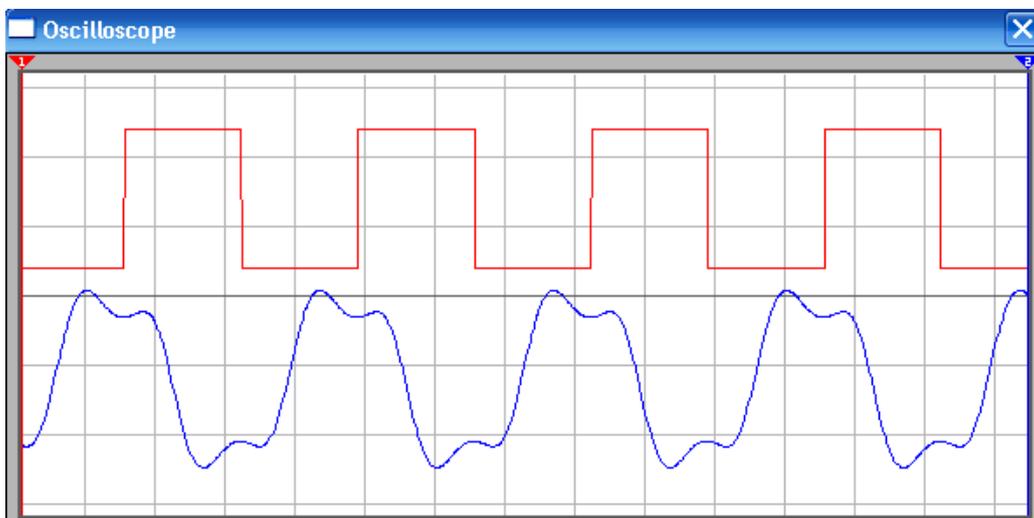


Figura 3.21. La fundamental y tercera armónica a la salida del filtro L. P.

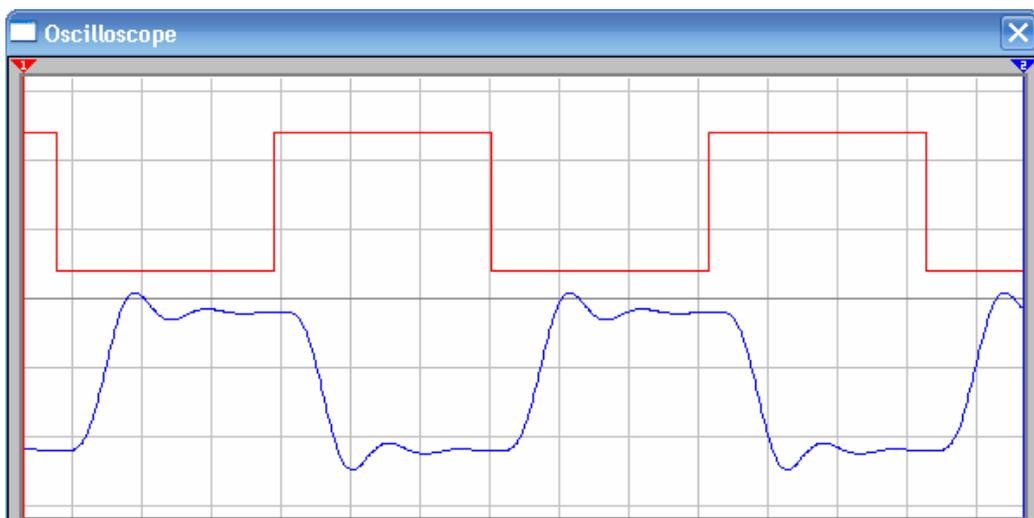


Figura 3.22. La fundamental, tercera y quinta armónica a la salida.

Ahora visualizaremos la atenuación del filtro en 5kHz, 15kHz y 50kHz, con el plotter de Bode.

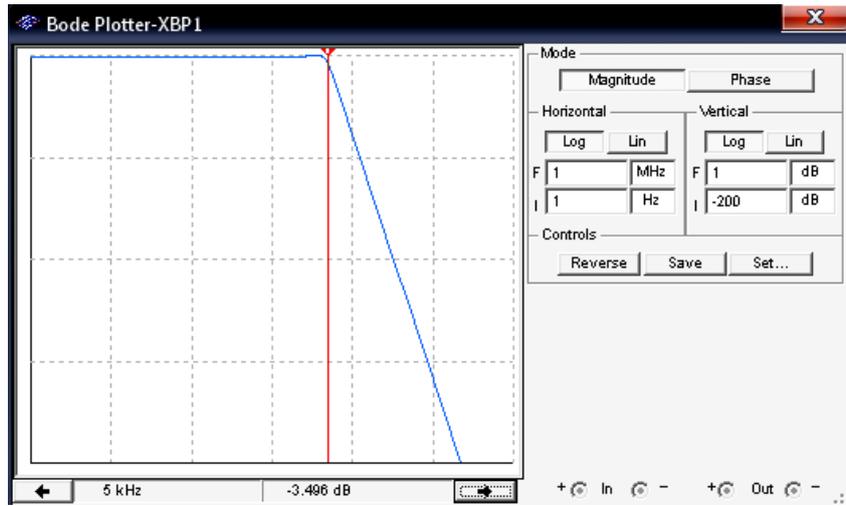


Figura 3.23. Atenuación de -3.496 dB a 5kHz.

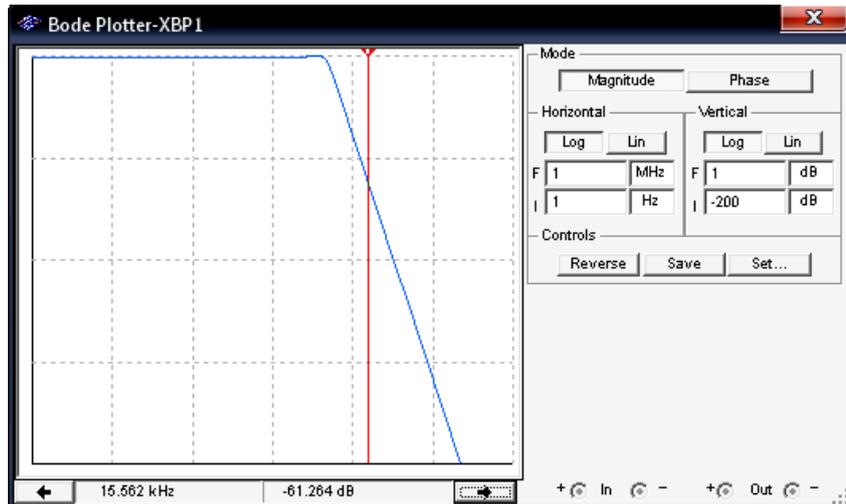


Figura 3.24. Atenuación de -61.264 dB en 15kHz (15.562kHz).

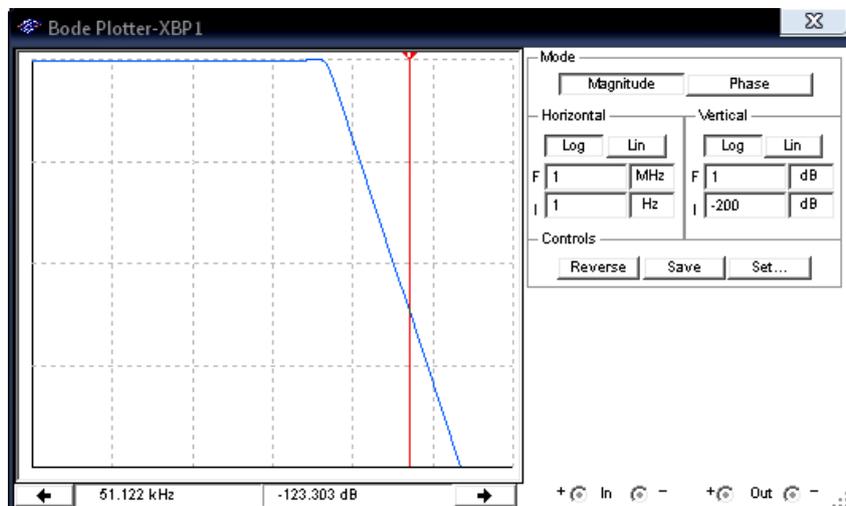


Figura 3.25. Atenuación de -123.303 dB en 50kHz (51.122kHz).

Filtros Pasa Altos (H. P.)

Los filtros Pasa Altos (H. P.) se caracterizan por tener una respuesta de frecuencia (ganancia vs frecuencia) como se muestra en la figura 3.26.

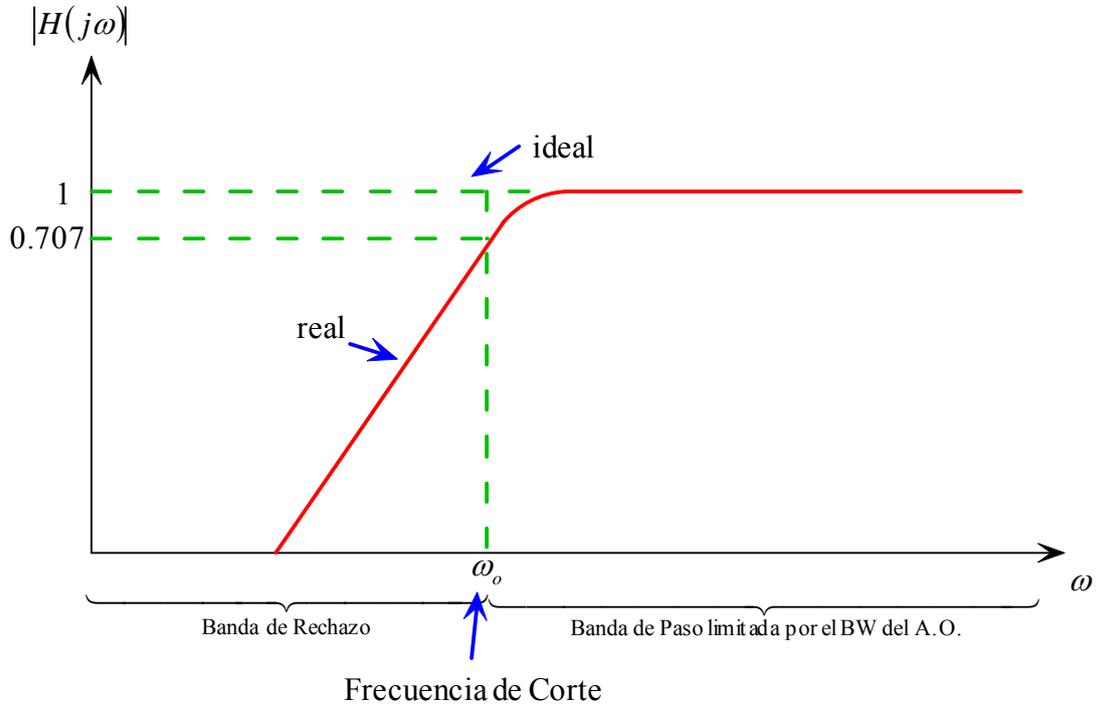


Figura 3.26. Respuesta de Frecuencia de un filtro Pasa Alto (H. P.).

Para $n = 2$:

$$H(s) = \frac{H_o s^2}{s^2 + bs + \omega_o^2} \quad (3.27)$$

Donde: $H_o = |H(j\omega)|$

Sin amplificación: $H_o = 1$

En Banda de Paso: $\omega \gg \omega_o$

Gráfico de Atenuación versus Frecuencia de un Filtro H. P.

Este gráfico, muestra la atenuación de la respuesta de frecuencia del filtro H. P. a determinadas frecuencias, y se muestra en la figura 3.27.

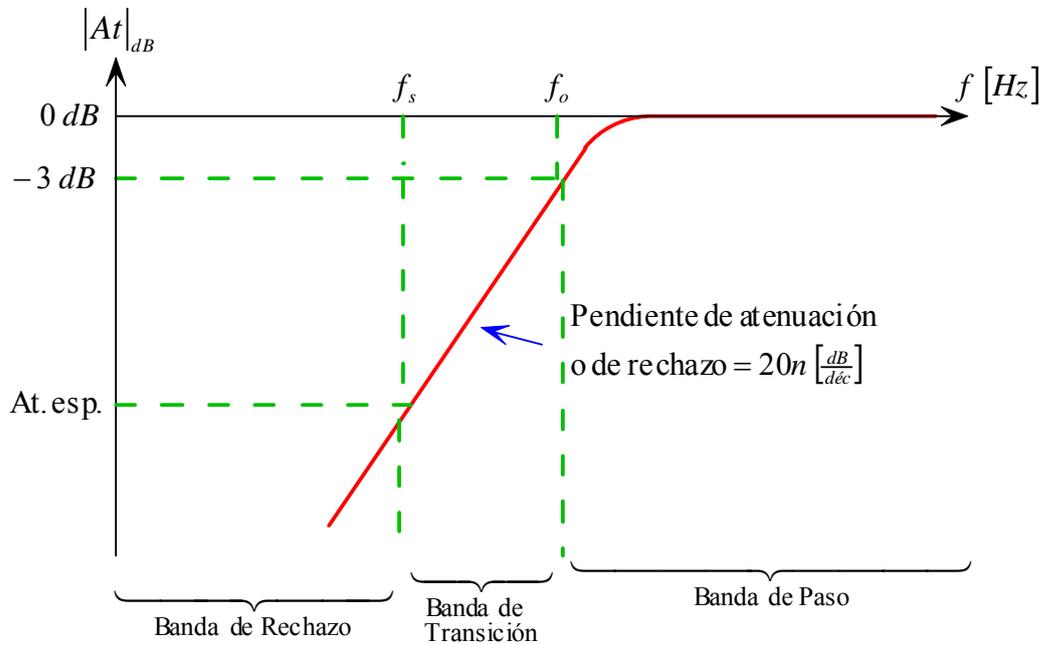


Figura 3.27. Gráfico de atenuación versus frecuencia del filtro H. P.

Circuitos que se emplean como Filtros H. P.

Configuración Ganancia Infinita y Realimentación Múltiple

Al igual que en los filtros L. P., los filtros H. P. utilizan esta configuración, pero como mencionamos anteriormente con la posición de condensadores y resistencias intercambiadas, tal como se muestra en la figura 3.28

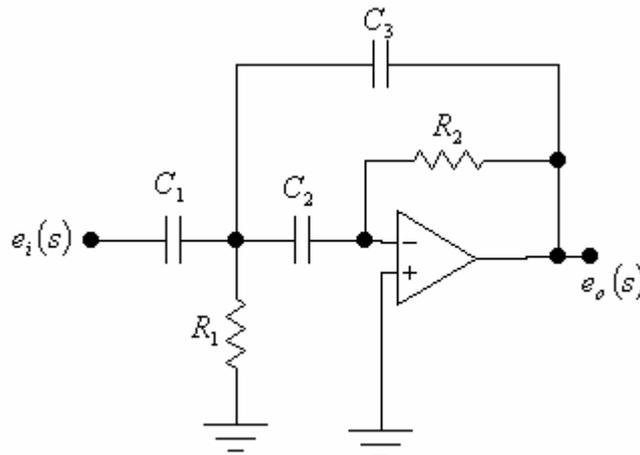


Figura 3.28. Configuración Ganancia Infinita y Realimentación Múltiple para filtro H. P.

Para el cálculo de la función de transferencia postulamos las ecuaciones de malla y nudo, tal como en el caso del filtro L. P., de tal modo que desarrollando, obtendremos:

$$H(s) = \frac{e_o(s)}{e_i(s)} = \frac{s^2 \frac{C_1}{C_3} \rightarrow H_o}{s^2 + s \frac{1}{R_2} \left[\frac{C_1}{C_2 C_3} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right] + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_3}} \rightarrow \omega_o^2 \quad (3.28)$$

Sin amplificación: $H_o = 1 \Rightarrow C_1 = C_3$

Configuración Sallen – Key

Al igual que en el caso anterior, este tipo de configuración sirve para un filtro activo, con el intercambio de condensadores y resistencias.

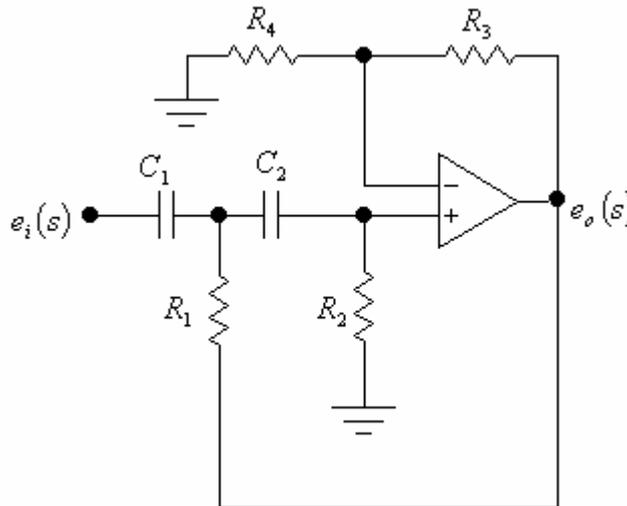


Figura 3.29. Configuración Sallen – Key para un Filtro H. P.

De la misma manera, postulando las ecuaciones de mallas y de nudos, podemos determinar la función de transferencia de este circuito, la cual es:

$$H(s) = \frac{s^2 K \rightarrow H_o}{s^2 + s \left[\frac{1-K}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_2 R_2} \right] + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} \rightarrow \omega_o^2 \quad (3.29)$$

$K = 1 + \frac{R_3}{R_4}$ (Del amplificador no inversor). Luego: $K = \frac{e_o(s)}{v_2}$

Si $K = 1 \Rightarrow R_3 = 0 \quad R_4 = \infty$

El circuito equivalente del amplificador no inversor, se muestra en la figura 3.30.

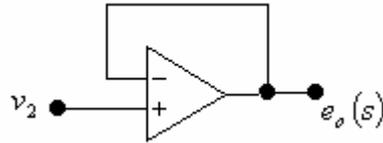


Figura 3.30. Amplificador no inversor cuando $K = 1$.

El circuito final para este tipo de filtro H. P. es:

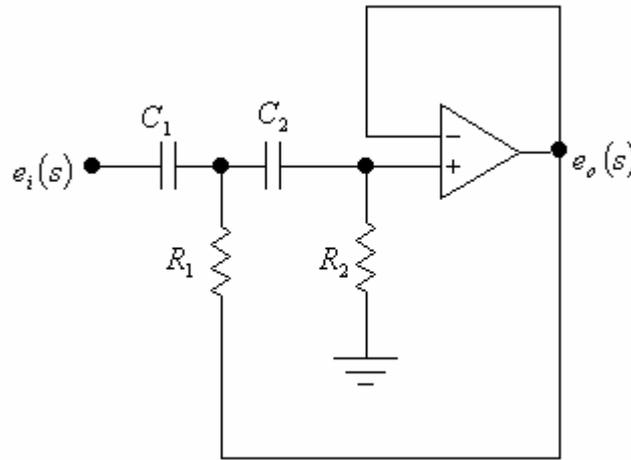


Figura 3.31 Configuración Sallen – Key para filtro H. P.

Diseño de un Filtro H. P.

Se comienza con la siguiente función de transferencia, de un filtro L. P. orden 2:

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{s^2 + bs + 1}$$

Se aplica la siguiente transformación de frecuencia:

$$s_{LP} \rightarrow \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{s^2}{s^2 + bs + 1} \quad (3.30)$$

Filtro H. P. normalizado de orden 2.

El comportamiento de esta nueva función de transferencia para un filtro H. P., lo podemos ver gráficamente en la figura 3.32.

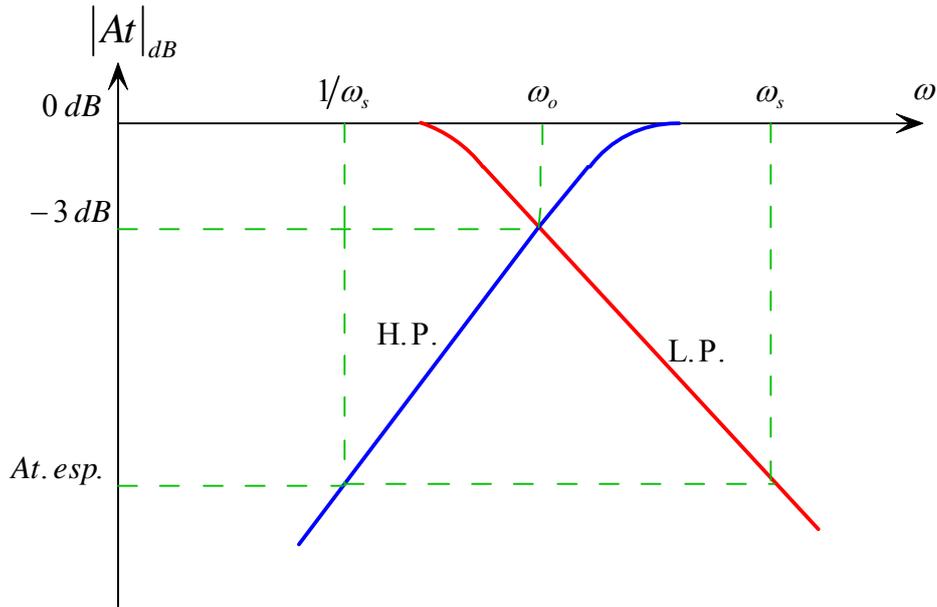


Figura 3.32. Gráfico de atenuación para el filtro H. P. a partir del L. P.

Requerimiento original del Filtro H. P.

3 dB de atenuación en f_o , y atenuación específica en f_s

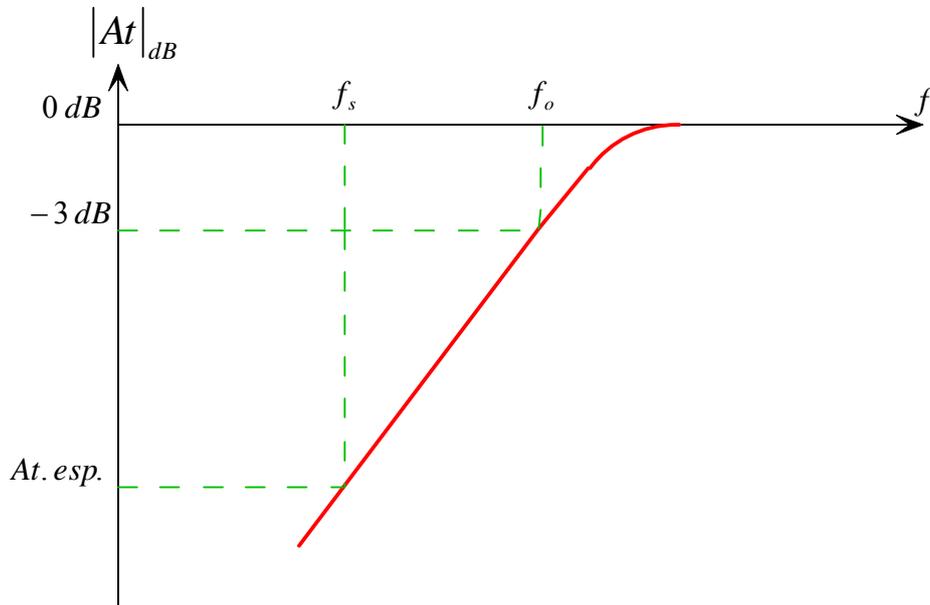


Figura 3.33 Gráfico de requerimiento original del filtro H. P.

Requerimiento del Filtro L. P. equivalente

3 dB de atenuación en $1/f_o$, y atenuación específica en $1/f_s$

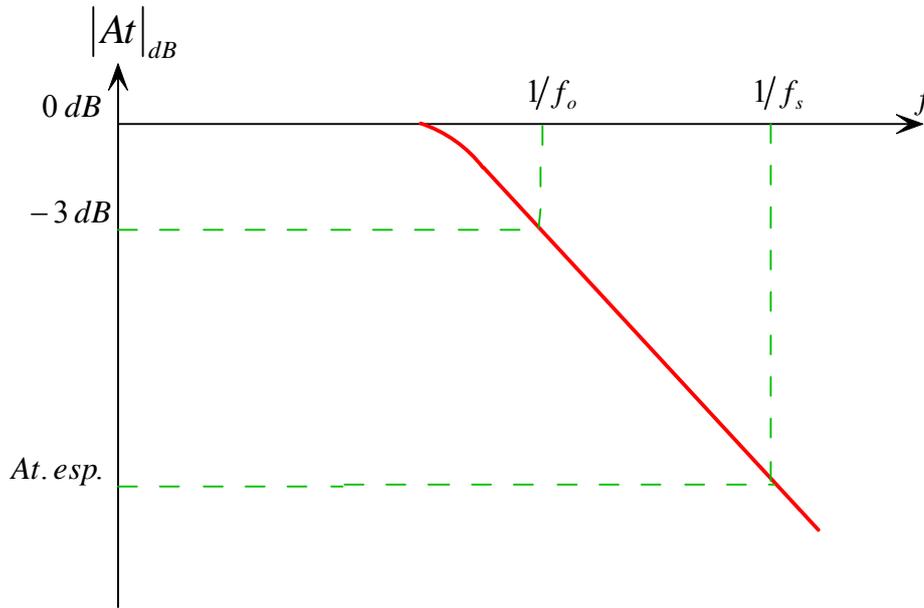


Figura 3.34. Requerimiento del filtro L. P. equivalente.

Requerimiento del Filtro L. P. equivalente normalizado

3 dB de atenuación en $\Omega = 1$, y atenuación específica en $\Omega = \frac{1/f_s}{1/f_o} = \frac{f_o}{f_s}$

De las curvas:

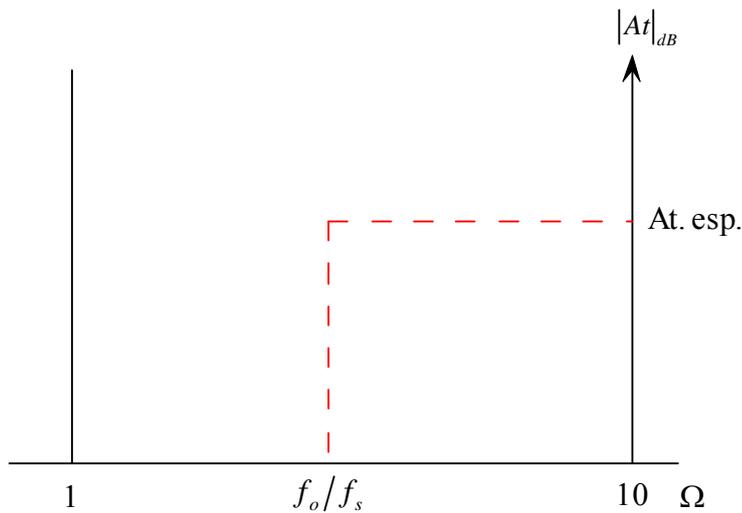


Figura 3.35. Requerimiento normalizado filtro LP equivalente.

Se obtiene n , el orden del filtro L. P. equivalente normalizado de las tablas de los polos.
Se obtienen los polos del L. P. equivalente normalizado:

$$H_{LPi}(s) = \frac{1}{s^2 + b_i s + 1} \quad (3.31)$$

Se aplica $s_{LP} \rightarrow \frac{1}{s} \rightarrow H_{HPi}(s) = \frac{s^2}{s^2 + b_i s + 1}$ (3.32)

Eligiendo la configuración Sallen – Key con $K = 1$.

$$H_{HP}(s) = \frac{s^2}{s^2 + s \underbrace{\frac{1}{R_2} \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right]}_{b_i=b} + \underbrace{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}_1}$$

Sea $C_1 = 1$; $C_2 = lC$

$$\frac{1}{R_2} \left[\frac{1}{C} + \frac{1}{lC} \right] = b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_2 C} \left[\frac{l+1}{l} \right] = b$$

$$R_2 = \frac{l+1}{b l C} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_1 \frac{l+1}{b l C} l C^2} = 1$$

$$R_1 = \frac{b}{C[l+1]} \quad \therefore \text{Se eligen } C = 1 \text{ y } l = 1$$

$$C_1 = C_2 = 1$$

$$R_2 = \frac{2}{b} \quad (3.33)$$

$$R_1 = \frac{b}{2} \quad (3.34)$$

Vemos que un filtro H. P. es mucho más sencillo de diseñar, debido a la sencillez de cálculo de las resistencias y los condensadores, pues, estos últimos son los que se deben fijar en un valor comercial, pues no es fácil obtener un capacitor variable.

Criterio de Desnormalización

Se usa el mismo criterio de desnormalización que en los filtros L. P.

$$C = 0.1\mu F \quad \therefore C_1 = C_2 = 0.1\mu F$$

$$C_n = R_o \omega_o C$$

Obteniendo R_o , podremos desnormalizar las resistencias como sigue:

$$R_n = \frac{R}{R_o}$$

Ejercicios:

1) Demostrar que para la configuración ganancia infinita y realimentación múltiple. Si $C_1 = C_3 = C$ y $C_2 = lC$, se obtiene:

$$R_2 = \frac{l+2}{b l C} \quad R_1 = \frac{b}{(l+2)C}$$

Se elige: $l = 1$; $C = 1$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 1$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{3}{b} \quad R_1 = \frac{b}{3}$$

2) Diseñar el siguiente filtro: 3 dB de atenuación en 2kHz, y 80 dB mínimos en 400 Hz. Comprobarlo en el Electronic Workbench ®.

Filtros Pasa Banda (B. P.)

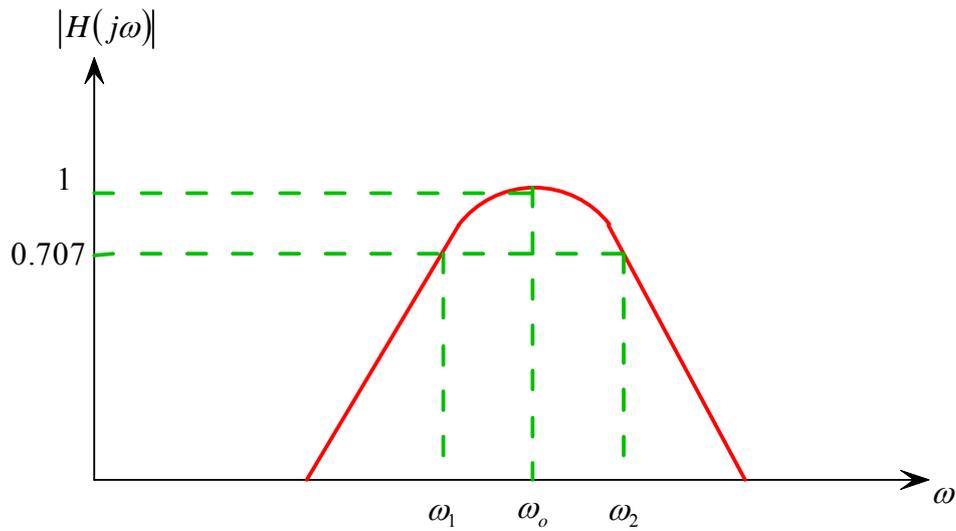


Figura 3.36. Respuesta de frecuencia de un filtro pasa banda (B. P.).

$$\omega_o \text{ es la frecuencia central} \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (3.35)$$

$$BW = \omega_2 - \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \text{es el ancho de banda} \quad (3.36)$$

$$Q = \frac{\omega_o}{BW} = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_o}{f_2 - f_1} \quad \Rightarrow \quad \text{es el factor de calidad.} \quad (3.37)$$

El factor de calidad Q , indica el grado de *selectividad* del filtro, es decir, que cantidad de frecuencias puede aceptarse dentro del ancho de banda.

Para esto, mostramos un ejemplo en la figura 3.37.

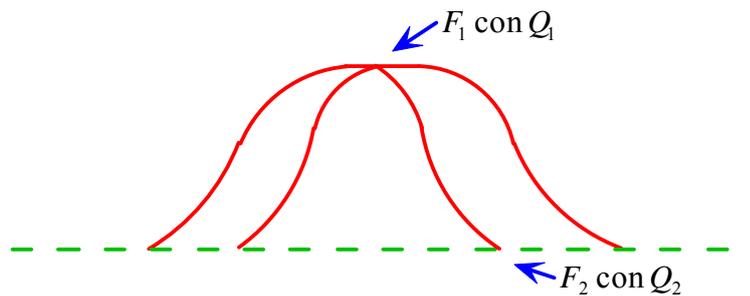


Figura 3.37. Dos respuestas de frecuencia de filtros B. P. con Q distinto.

$$Q_2 > Q_1 \quad \Rightarrow \quad F_2 \text{ es más selectivo que } F_1.$$

Para $N = 2$,

$$H(s) = \frac{H_o BWs}{s^2 + BWs + \omega_o^2} \quad (3.38)$$

Donde $H_o = |H(j\omega)|_{\omega=\omega_o}$. Sin amplificación: $H_o = 1$

División

- Si $Q \leq 2.5 \Rightarrow$ el filtro es de banda ancha
- Si $Q > 2.5 \Rightarrow$ el filtro es de banda angosta

Circuitos empleados para Filtros B. P.

Existen diferentes circuitos para diferentes Q:

Filtro para $Q \leq 10$

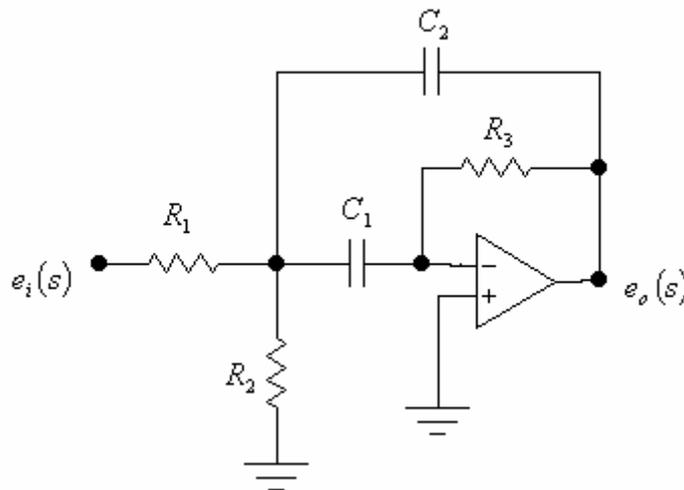


Figura 3.38. Circuito de Filtro B. P. para $Q \leq 10$

Desarrollando las ecuaciones de nudo y malla, tal como en las anteriores configuraciones, obtendremos:

$$H(s) = \frac{e_o(s)}{e_i(s)} = - \frac{s \frac{1}{R_1 C_2} \rightarrow H_o BW}{s^2 + s \underbrace{\frac{1}{R_3} \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right]}_{BW} + \underbrace{\frac{1}{R_3 C_1 C_2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]}_{\omega_o^2}} \quad (3.39)$$

Comparando la ecuación (3.38) con la (3.39):

$$BW = \frac{1}{R_3} \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right] \quad (3.40)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{R_3 C_1 C_2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]} \quad (3.41)$$

$$H_o = \frac{R_3 C_1}{R_1 [C_1 + C_2]} \quad (3.42)$$

$$Q = \frac{\omega_o}{BW} = \frac{\sqrt{R_3 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]}}{\sqrt{\frac{C_1}{C_2} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}}} \quad (3.43)$$

Filtro para $Q \leq 100$

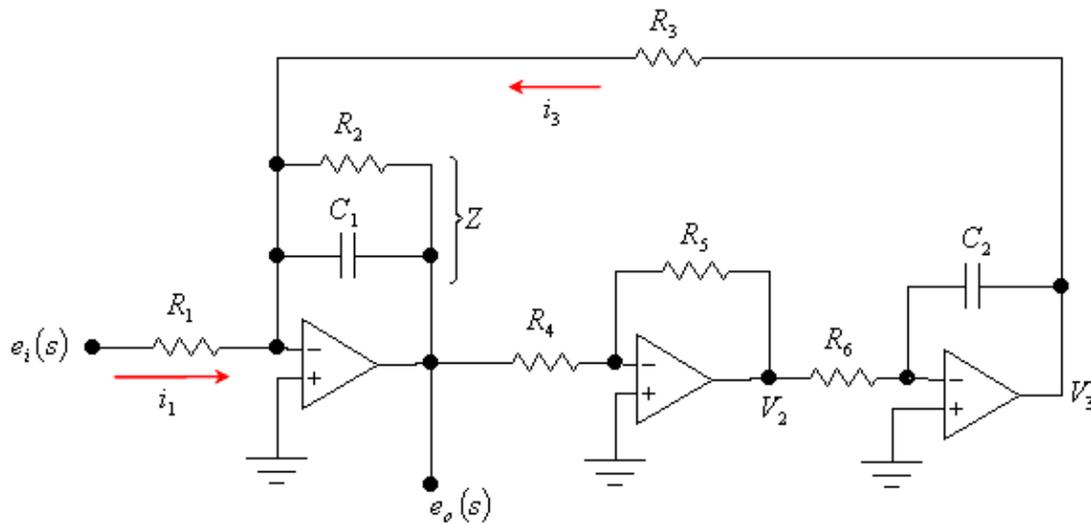


Figura 3.39. Circuito de filtro B. P. para un $Q \leq 100$

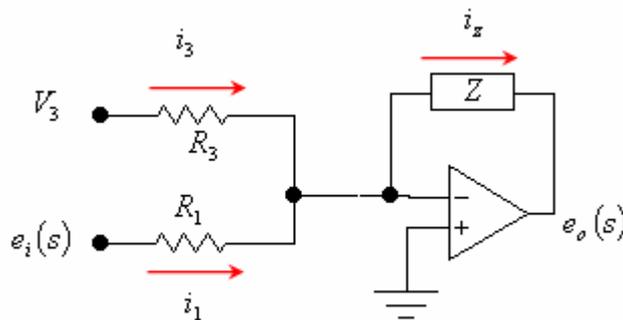


Figura 3.40. Circuito sumador de la primera etapa.

Del circuito sumador, tenemos:

$$Z = R_2 \parallel 1/sC_1 = \frac{R_2}{sC_1R_2 + 1} \quad (3.44)$$

$$i_z = i_1 + i_3 \quad (3.45)$$

$$i_z = -\frac{e_o(s)}{Z} \quad (3.46)$$

$$i_1 = \frac{e_i(s)}{R_1} \quad (3.47)$$

$$i_3 = \frac{V_3}{R_3} \quad (3.48)$$

De los circuitos de la realimentación:

$$V_3 = -\frac{1}{sC_2R_6}V_2 \quad (3.49)$$

$$V_2 = -\frac{R_5}{R_4}e_o(s) \quad (3.50)$$

Reemplazando la ecuación (3.50) en la (3.49):

$$V_3 = \frac{R_5}{sC_2R_4R_6}e_o(s) \quad (3.51)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.46), (3.47) y (3.48) en la (3.45), y también reemplazando la ecuación (3.51) en la (3.48):

$$-\frac{e_o(s)}{Z} = \frac{e_i(s)}{R_1} + \frac{R_5}{sC_2R_4R_6}e_o(s)$$

Desarrollando:

$$\frac{e_o(s)}{e_i(s)} = -\left[\frac{R_2}{sC_1R_2}\right] \cdot \left[\frac{1}{R_1} + \frac{R_5}{sC_2R_3R_4R_6}\right]$$

Finalmente:

$$H(s) = \frac{e_o(s)}{e_i(s)} = -\frac{s \frac{1}{C_1R_1} \rightarrow H_oBW}{s^2 + s \underbrace{\frac{1}{C_1R_2}}_{BW} + \underbrace{\frac{R_5}{C_1C_2R_3R_4R_6}}_{\omega_o^2}} \quad (3.52)$$

De la ecuación (3.52), tenemos que:

$$H_o = \frac{R_2}{R_1} \quad (3.53)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{R_5}{C_1 C_2 R_3 R_4 R_6}} \quad (3.54)$$

$$BW = \frac{1}{C_1 R_2} \quad (3.55)$$

$$Q = \frac{\omega_o}{BW} = R_2 \sqrt{\frac{R_5 C_1}{C_2 R_3 R_4 R_6}} \quad (3.56)$$

Filtro Rechaza Banda (NOTCH)

Un filtro rechaza banda, tiene como respuesta de frecuencia, la que se muestra en la figura 3.41.

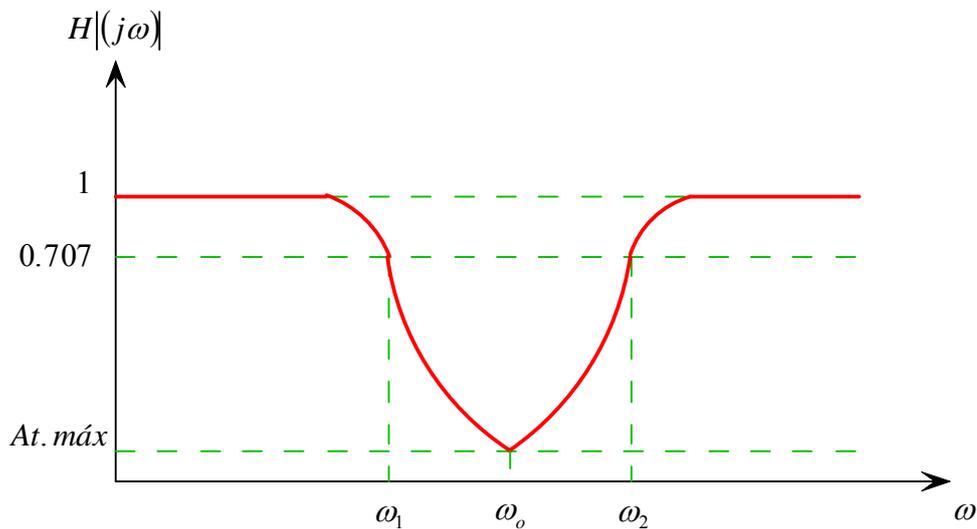


Figura 3.41. Respuesta de frecuencia de un filtro rechaza banda.

Las ecuaciones que describen el comportamiento de este tipo de filtro son iguales a las del filtro B. P.:

$$\omega_o = \sqrt{\omega_1 \omega_2}; \quad BW = \omega_2 - \omega_1; \quad Q = \frac{\omega_o}{BW}$$

Para $N = 2$,

$$H(s) = \frac{H_o (s^2 + \omega_o^2)}{s^2 + BWs + \omega_o^2} \quad (3.57)$$

Donde: $H_o = |H(j\omega)|_{\omega=\omega_o} \rightarrow$ Atenuación Máxima

Ejercicio:

Demostrar que el siguiente circuito se comporta como un filtro NOTCH.

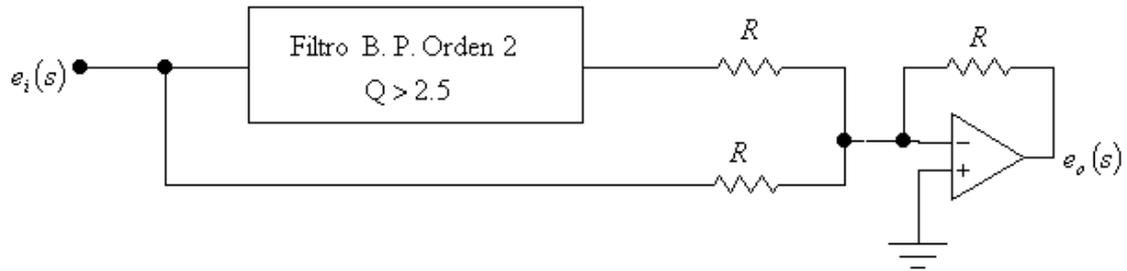


Figura 3.42. Filtro rechaza banda.

Ejercicio:

Se tiene el siguiente filtro B. P.: $f_o = 12kHz$, $Q = 50$.

- Calcular las frecuencias de corte de 3 dB.
- Si a este filtro se le excita con una señal cuadrada, grafique y especifique la salida del filtro si la frecuencia de la señal cuadrada es:
 - 4 kHz
 - 2.4 kHz
 - 6 kHz
 - 12 kHz.

Solución:

$$a) BW = \frac{f_o}{Q} = \frac{12000}{50} = 240 [Hz]$$

$$\therefore \Rightarrow f_2 = 12000 + 120 = 12,12 [kHz]$$

$$\therefore \Rightarrow f_1 = 12000 - 120 = 11,88 [kHz]$$

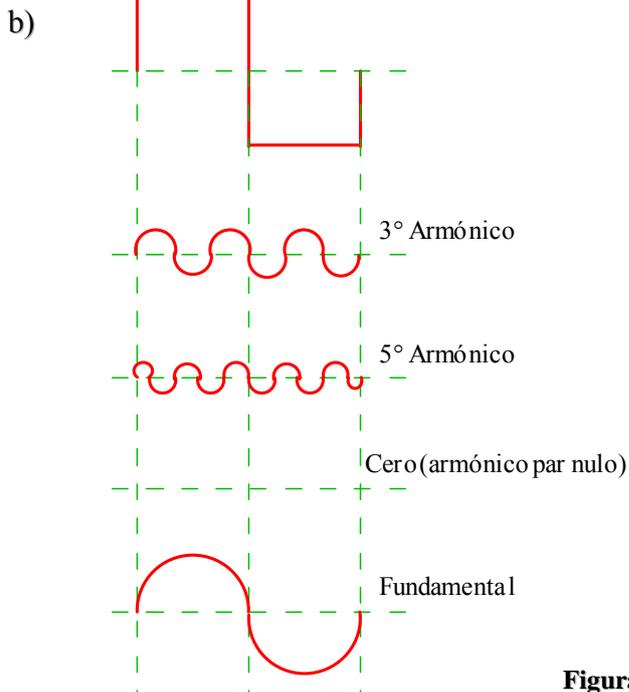


Figura 3.43. Salida del filtro B. P.

Diseño de un Filtro B. P. de Banda Angosta

Para el diseño de un filtro B. P. banda angosta, se comienza de:

$$H_{LP}(s) = \frac{H_o}{s+1} \rightarrow \text{Filtro LP de orden 1}$$

Se aplica la siguiente transformación de frecuencia:

$$s_{LP} = s + \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 1}{s}$$

Donde: s es la acción del L. P. y $1/s$ es la acción del H. P. Luego:

$$H(s) = \frac{H_o}{\frac{s^2 + 1}{s} + 1} \Rightarrow H_{BP}(s) = \frac{H_o s}{s^2 + bs + 1} \quad (3.58)$$

Que corresponde a un filtro B. P. de orden 2, con $\omega_o = BW = 1$

Para $\omega_o \neq BW \neq 1$

$$s_{LP} = \frac{s^2 + \omega_o^2}{BWs} \Rightarrow H_{BP}(s) = \frac{H_o}{\frac{s^2 + \omega_o^2}{BWs} + 1}$$

$$\therefore H_{BP}(s) = \frac{H_o BWs}{s^2 + BWs + \omega_o^2} \quad (3.59)$$

Filtro B. P. de orden 2 con $\omega_o \neq BW \neq 1$.

Entonces, diremos que un filtro L. P. de orden 1, da origen a un filtro B. P. de orden 2, es decir, un polo de L. P. produce 2 polos de B. P. Generalizando un filtro L. P. de orden n con n polos, da origen a un filtro B. P. de orden $2n$, con $2n$ polos.

La demostración gráfica de esto se puede ver en la figura 3.44.

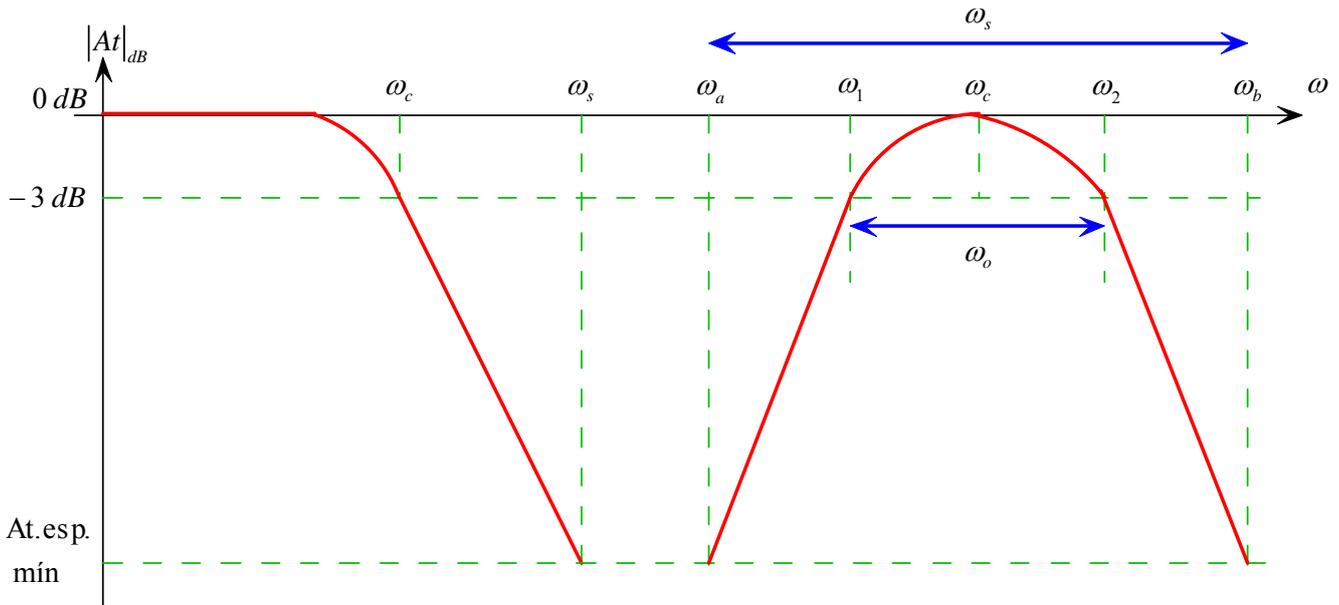


Figura 3.44. Demostración gráfica de la conversión de filtro L. P. a B. P.

Requerimiento original

El requerimiento que debe tener el filtro B. P. de banda angosta es que debe presentar **simetría aritmética**. Es decir:

$$3 \text{ dB de atenuación en } f_o \pm \Delta f_c \begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases}$$

$$\text{Atenuación Específica en } f_o \pm \Delta f_H \begin{cases} f_a \\ f_b \end{cases}$$

Para darle mayor rigurosidad al filtro, es decir, un menor ancho de banda, se pasa a **simetría geométrica**. Se debe cumplir que:

$$f_o = \sqrt{f_1 f_2}$$

$$\text{Y además: } f_o = \sqrt{F_A f_b} \quad \text{ó} \quad f_o = \sqrt{f_a F_B}$$

Donde el par elegido presenta mayor rigurosidad al filtro (un menor ancho de banda).

Cálculo:

$$\text{Dado } f_b \Rightarrow F_A = \frac{f_o^2}{f_b} \tag{3.60}$$

$$BW_1 = f_b - F_A \tag{3.61}$$

$$\text{Dado } f_a \Rightarrow F_B = \frac{f_o^2}{f_a} \quad (3.62)$$

$$BW_2 = F_B - f_a \quad (3.63)$$

Suponiendo $BW_1 > BW_2$, el par elegido es F_A y f_b

Requerimiento con Simetría Geométrica

3 dB de atenuación en f_1 y f_2

Atenuación específica mínima en F_A y f_b

Requerimiento de Filtro L. P. Equivalente

3 dB de atenuación en $f_c = f_2 - f_1$

Atenuación específica mínima en $f_s = f_b - F_A$

Requerimiento de Filtro L. P. Equivalente Normalizado

3 dB de atenuación en $\Omega = 1$

$$\text{Atenuación específica en } \Omega = \frac{f_s}{f_c} = \frac{f_b - F_A}{f_2 - f_1}$$

De las curvas se obtiene N, el orden del filtro L. P. equivalente normalizado. Si se conocen los polos del Filtro L. P. se obtienen los del filtro B. P.:

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{s^2 + b_i s + 1}$$

$$\text{Se aplica: } s_{LP} = \frac{s^2 + \omega_o^2}{BW_s}$$

$$\text{Y se obtiene: } H_{BP2i}(s)$$

Ejemplo:

0 dB de atenuación en 100 Hz

3 dB de atenuación en 95 Hz y 105 Hz

35 dB de atenuación mínimos en 75 y 125 Hz

$$\text{Dado } f_a = 75 \text{ Hz} \Rightarrow F_B = \frac{100^2}{75} = 133.3 \text{ Hz}$$

$$BW_1 = 133.3 - 75 = 58.3 \text{ Hz}$$

$$\text{Dado } f_b = 125 \text{ Hz} \Rightarrow F_A = \frac{100^2}{125} = 80 \text{ Hz}$$

$$BW_2 = 125 - 80 = 45 \text{ Hz}$$

Vemos que $BW_2 < BW_1$, luego el par elegido es 125 Hz y 80 Hz.

Requerimiento con simetría geométrica

0 dB de atenuación en 100 Hz

3 dB de atenuación en 95 y 105 Hz

35 dB de atenuación en 80 y 125 Hz

Requerimiento de Filtro L. P. Equivalente

3 dB de atenuación en $f_c = 105 - 95 = 10 \text{ Hz}$

35 dB de atenuación en $f_s = 125 - 80 = 45 \text{ Hz}$

Requerimiento de Filtro L. P. Equivalente Normalizado

3 dB de atenuación en $\Omega = 1$

35 dB de atenuación en $\Omega = \frac{45}{10} = 4.5$

Usando las tablas de las funciones de Butterworth, tenemos que el orden del filtro es 3.

Los polos son:

$$s_1 = 1 \quad s_{2,3} = -0.5 \pm j0.866$$

Transformación de par de polos complejos conjugados L. P. a B. P.

Dado: $s_{1,2} = -a \pm jb$

Dado: $a, b, Q = 10, f_o = 100$ del filtro completo, la siguiente serie de cálculos permiten obtener los valores de Q_i y f_{oi} para las 2 secciones B. P. de orden 2 a las que se da origen:

1) $C = a^2 + b^2$

6) $k = \frac{9Q_{1,2}}{Q}$

2) $D = \frac{2a}{Q}$

7) $w = k + \sqrt{k^2 - 1}$

3) $E = \frac{C}{Q^2} + 4$

8) $f_{o1} = \frac{f_o}{w}$

4) $G = \sqrt{E^2 - 4D^2}$

9) $f_{o2} = f_o w$

5) $Q_{1,2} = \sqrt{\frac{E+G}{2D^2}}$

Se debe trabajar con 6 decimales como mínimo para todos los cálculos.
Usando el ejemplo anterior:

$$a = 0.5 \quad b = 0.866 \quad Q = 10 \quad f_o = 100$$

$$C = 0.999956$$

$$D = 0.10$$

$$E = 4.00999956$$

$$G = 4.005008923$$

$$Q_{2,3} = 20.01875181$$

$$k = 1.000937591$$

$$w = 1.044251103$$

$$f_{o2} = 95.76 \text{ Hz}$$

$$f_{o3} = 104.43 \text{ Hz}$$

Cálculo de los H_{oi} de cada etapa

En general se tienen N etapas de filtros B. P. de orden 2, como muestra la figura 3.45

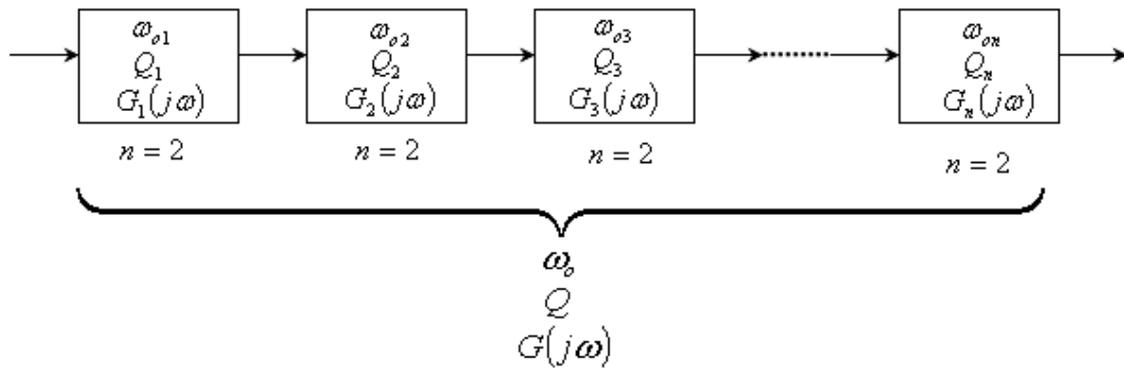


Figura 3.45 Sistema de filtros B. P. de orden 2 en cascada.

$$|G(j\omega)|_{\omega=\omega_o} = |G_1(j\omega)|_{\omega=\omega_1} |G_2(j\omega)|_{\omega=\omega_2} |G_3(j\omega)|_{\omega=\omega_3} \cdots |G_n(j\omega)|_{\omega=\omega_n} \quad (3.64)$$

Se postula:

$$|G_i(j\omega)|_{\omega=\omega_{oi}} = \sqrt[N]{|G(j\omega)|_{\omega=\omega_o}} \quad (3.65)$$

De la Teoría de **Amplificadores Sintonizados**:

$$|G_i(j\omega)| = \frac{H_{oi}}{\sqrt{1 + Q_i^2 \left[\frac{\omega}{\omega_{oi}} - \frac{\omega_{oi}}{\omega} \right]^2}} \quad (3.66)$$

Luego:

$$H_{oi} = \underbrace{N|G(j\omega)|_{\omega=\omega_o}}_1 \cdot \sqrt{1 + Q_1^2 \left[\frac{\omega_o}{\omega_{oi}} - \frac{\omega_{oi}}{\omega_o} \right]^2} \quad (3.67)$$

Del ejemplo:

$$H_{o2} = 1 \cdot \sqrt{1 + 20.02^2 \left[\frac{100}{95.76} - \frac{95.76}{100} \right]^2} = 2.003$$

$$H_{o3} = 1 \cdot \sqrt{1 + 20.02^2 \left[\frac{100}{104.43} - \frac{104.43}{100} \right]^2} = 2.003$$

Finalmente:

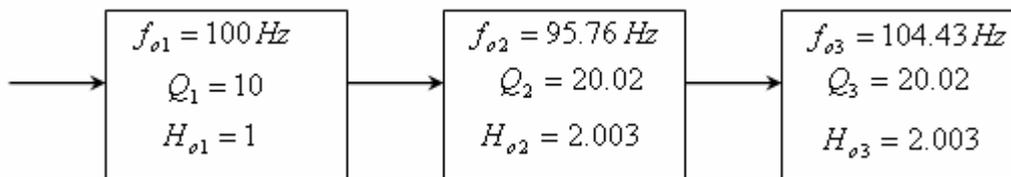


Figura 3.46. Filtro final del sistema.

Se empleará filtro con $Q \leq 100$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{R_5}{C_1 C_2 R_3 R_4 R_6}} \quad BW = \frac{1}{C_1 R_2} \quad H_o = \frac{R_2}{R_1}$$

$$Q = R_2 \sqrt{\frac{R_5 C_1}{C_2 R_3 R_4 R_6}}$$

Son 3 ecuaciones independientes y 8 incógnitas: $C_1, C_2, R_1, R_2, R_3, \dots, R_6$. Luego existen 5 grados de libertad.

Los grados de libertad se escogen de acuerdo a la sintonía del filtro.

Método 1

$$C_1 = C_2 = C \quad R_4 = R_5 = R \quad R_3 = R_6$$

Reemplazando en las ecuaciones, se obtiene:

$$R_3 = R_6 = \frac{1}{\omega_o C} \quad R_2 = \frac{Q}{\omega_o C} \quad R_1 = \frac{Q}{H_o \omega_o C}$$

Para la sintonía del filtro:

Con R_1 se regula H_o

Con R_2 se regula Q

Con R_3 y/o R_6 se regula ω_o

Método 2

$$C_1 = C_2 = C \quad R_5 = R_6 = R \quad R_3 = R_4$$

Reemplazando en las ecuaciones, se obtiene:

$$R_3 = R_4 = \frac{1}{\omega_o C} \quad R_2 = \frac{Q}{\omega_o C} \quad R_1 = \frac{Q}{H_o \omega_o C}$$

Para la sintonía del filtro:

Con R_1 se regula H_o

Con R_2 se regula Q

Con R_3 y/o R_4 se regula ω_o

Para el ejemplo que hemos estado llevando:

Etapas	1	2	3
$C_1 = C_2$	0.1 μ F	0.1 μ F	0.1 μ F
$R_4 = R_5$	1 K Ω	1 K Ω	1 K Ω
$R_3 = R_6$	$\frac{1}{2\pi 100 \cdot 0.1\mu}$	$\frac{1}{2\pi 95.76 \cdot 0.1\mu}$	$\frac{1}{2\pi 104.43 \cdot 0.1\mu}$
R_2	$10R_3$	$R_3 \cdot 20.02$	$R_3 \cdot 20.02$
R_1	R_2	$R_2 \cdot 20.02$	$R_2 \cdot 20.02$

Documento elaborado por el alumno Andrés Zepeda,
estudiante de Ingeniería Eléctrica USACH para el ramo de
electrónica avanzada

Documento digitalizado por el alumno Ariel Reyes A.
Estudiante de Ingeniería de Ejecución en electricidad



Y Tu...

¿Compartes tu papeo?