Ecuaciones Diferenciales [1]
(Edición preliminar)

V. Guíñez, R. Labarca y M. Martínez
Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Ciencias
Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile

[1]Este trabajo fue financiado por el Proyecto de Docencia Usach VG9813

Contenido

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

Ecuaciones diferenciales son igualdades que envuelven derivadas de funciones desconocidas. Por ejemplo:

$$y' + xy = 3 \tag{1.1}$$

$$y'' + 5y' + 6y = \cos(x) \tag{1.2}$$

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E\omega\cos(\omega t) \tag{1.3}$$

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{1.5}$$

Cuando una ecuación envuelve una o más derivadas con respecto a una variable particular, esa variable es llamada **variable independiente**. Una variable es llamada **dependiente** si en la ecuación hay alguna derivada de esa variable.

En las ecuaciones (1.1) y (1.2) la variable dependiente es y y hay una única variable independiente que es x. En la ecuación (1.3) la variable dependiente es i y t es la variable independiente. L, R, C, E, y ω son constantes llamadas parámetros. La ecuación (1.5) tiene una variable dependiente V y dos variables independientes x e y.

Como la ecuación (1.4) puede ser escrita

$$x^2 + y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

o

$$(x^2 + y^2)\frac{dx}{dy} - 2xy = 0\,,$$

podemos considerar cualquiera de las variables como dependiente, pasando a ser la otra independiente.

En las ecuaciones (1.1)-(1.4), tenemos solo una variable independiente y por lo tanto todas las derivadas que aparecen son ordinarias. Tales ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones diferenciales ordinarias**. Cuando la variable dependiente depende de más de una variable independiente, como en la ecuación (1.5), la ecuación se llama **ecuación diferencial parcial**.

Los primeros capítulos de este libro estarán dedicados al estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, abordándose el tema de las ecuaciones diferenciales parciales en la última parte.

Se define el **orden** de una ecuación diferencial como la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2b(\frac{dy}{dx})^3 + y = 0 \tag{1.6}$$

es una ecuación de *orden dos*. A estas ecuaciones también se las conoce como *ecuaciones de segundo orden*. También son de orden dos las ecuaciones (1.2),(1.3) y (1.5), en tanto que las ecuaciones (1.1) y (1.4) son de primer orden.

1.2 Generalidades sobre ecuaciones diferenciales ordinarias

En general, la ecuación

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.7}$$

es llamada ecuación diferencial ordinaria de *enésimo orden*. Bajo restricciones convenientes sobre la función F, la ecuación (1.7) puede resolverse explícitamente para $y^{(n)}$ en término de las otras $n+1$ variables $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$, obteniéndose

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})\,. \tag{1.8}$$

Para los propósitos de este libro asumiremos que esto es siempre posible. Sin embargo, hay que tener en cuenta que una ecuación de la forma (1.7) puede representar más de una ecuación de la forma (1.8).

Por ejemplo, la ecuación

$$x(y')^2 + 4y' - 6x^2 = 0$$

representa dos ecuaciones diferentes,

$$y' = \frac{-2 + \sqrt{4 + 6x^3}}{x} \quad o \quad y' = \frac{-2 - \sqrt{4 + 6x^3}}{x}\,.$$

Una función ϕ definida sobre un intervalo I, es llamada una **solución** de la ecuación diferencial (1.8) si para todo $x \in I$, ϕ es derivable hasta el enésimo orden y se tiene

$$\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n-1)}(x))\,.$$

Por ejemplo, verifiquemos que

$$y = e^{2x}$$

es una solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0\,. \tag{1.9}$$

Sustituyendo nuestro candidato a solución en el miembro izquierdo de la ecuación (1.9) obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 4e^{2x} + 2e^{2x} - 6e^{2x} \equiv 0\,,$$

lo que completa la verificación.

Un concepto importante es el de linealidad o no-linealidad de una ecuación diferencial. La ecuación

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

es llamada **lineal** si la función F es una función lineal de las variables $y, y', \cdots, y^{(n)}$. Así, por ejemplo, una ecuación lineal de orden n puede ser escrita de la forma

$$b_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + b_n(x)y = R(x)\,. \tag{1.10}$$

Con este concepto la ecuación (1.6) anterior es no-lineal, y la ecuación (1.9) es lineal. La ecuación

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 4x^3$$

es también lineal. La forma en que la variable independiente entra en la ecuación no tiene nada que ver con la propiedad de linealidad.

1.3 Motivación

Las ecuaciones diferenciales aparecen frecuentemente en modelos matemáticos que tratan de describir situaciones de la vida real. Muchas leyes naturales y hipótesis pueden ser traducidas vía el lenguaje matemático en ecuaciones que envuelven derivadas. Por ejemplo, derivadas aparecen en física como velocidades y aceleraciones, en geometría como pendientes, en biología como razón de crecimiento de poblaciones, en sicología como razón de aprendizaje, en química como rapidez de reacción, en economía como razón de cambio del costo de vida, y en finanzas como razón de crecimiento de inversiones.

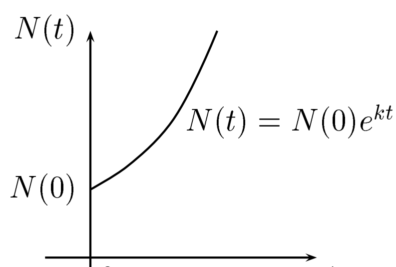
En diversos modelos matemáticos, para obtener una ecuación diferencial que describa un problema real, se asume que la situación es gobernada por leyes muy simples. Una vez que el modelo es construído en la forma de una ecuación diferencial, la siguiente etapa es resolver la ecuación diferencial y utilizar la solución para hacer predicciones relativas al comportamiento del problema real. En el caso que estas predicciones no concuerden razonablemente con la realidad, se debe reconsiderar los supuestos iniciales para obtener un modelo más cercano con la realidad. En muchos casos la modelación de un fenómeno conduce a ecuaciones diferenciales que no se resuelven con la teoría conocida y constituyen motivación para muchos desarrollos matemáticos. En la práctica y, a fin de atacar el problema propuesto, se hacen algunas simplificaciones y modificaciones al modelo para resolverlo de manera exacta o aproximada con la teoría conocida.

Si la función $y = y(x)$ representa una cantidad desconocida que queremos estudiar, del cálculo sabemos que la primera derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ representa la razón de cambio de y por unidad que cambia x. Si por ejemplo se conoce esta razón de cambio (digamos por experiencia o por alguna ley física) y se sabe que es igual a una función $f(x, y)$, entonces la cantidad y satisface la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = f(x, y)$. De idéntica manera pueden plantearse ecuaciones de orden superior. A continuación daremos algunos ejemplos específicos donde aparecen ecuaciones de primer y segundo orden. Algunos de ellos serán analizados con más detalle en capítulos posteriores.

Biología. Se ha observado que para un gran tipo de colonias de bacterias estas tienden a crecer en una razón proporcional al número de bacterias presentes. Para tales colonias, sea $N = N(t)$ el número de bacterias presentes en cualquier instante t. Entonces, si k es la constante de proporcionalidad, la función $N = N(t)$ satisface la ecuación ordinaria de primer orden

$$\dot{N} = kN \tag{1.11}$$

Esta ecuación es llamada *ley de Malthus* para el crecimiento de poblaciones. T. R. Malthus observó, en 1798, que la población de Europa parecía duplicarse en intervalos regulares de tiempo, y así concluyó que la razón en que la población crece es proporcional a la población presente. Notemos que la función $N(t)$ toma solo valores enteros y luego no es continua y menos diferenciable. Sin embargo, si el número de bacterias es muy grande, podemos asumir que puede ser aproximada por una función diferenciable $N(t)$, ya que los cambios en el tamaño de la población ocurren sobre pequeños intervalos de tiempo. Más adelante estableceremos que su solución es $N(t) = N(0)e^{kt}$, donde $N(0)$ es el número de bacterias presentes inicialmente, es decir, cuando $t = 0$. La solución $N(t)$ puede ser representada gráficamente como en la Figura 1.



Habría que enfatizar que la ecuación (1.11) es un modelo matemático que describe una colonia de bacterias que crece de acuerdo a una ley muy simple, quizás demasiado simple, obteniéndose de esta manera una ecuación diferencial muy simple. Claramente, un modelo más realista se obtiene tomando en cuenta algunos otros factores como crecimiento exponencial, limitaciones de alimento, etc. Por supuesto, la ecuación diferencial que se obtiene en estos casos es mucho más compleja.

Farmacología. Se sabe en farmacología que la penicilina y otras drogas administradas a pacientes desaparecen de sus cuerpos de acuerdo a la siguiente regla: Si $y(t)$ es la cantidad de droga en un cuerpo humano en el instante t, entonces la razón de cambio $\dot{y}(t)$ de la droga es proporcional a la cantidad presente. Esto es, $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\dot{y} = -ky \tag{1.12}$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. El signo negativo en (1.12) es debido al hecho que $y(t)$ decrece cuando t crece, y luego la derivada de $y(t)$ con respecto a t es negativa. Para cada droga, la constante k es conocida experimentalmente.

La solución de la ecuación (1.12) es

$$y(t) = y_0 e^{-kt}\,, \tag{1.13}$$

donde $y_0 = y(0)$ es la cantidad inicial de droga (dosis inicial).

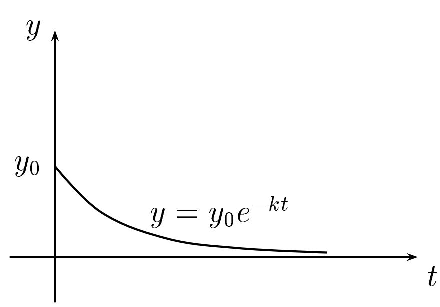


Figura 2

Como se ve de la ecuación (1.13) (ver también Figura 2), la cantidad de droga en el cuerpo del paciente tiende a cero cuando $t \to \infty$. Sin embargo, en muchos casos es necesario mantener (aproximadamente) una concentración constante (y por lo tanto aproximadamente una cantidad constante) de droga en el cuerpo del paciente por largo tiempo. Para lograr esto es necesario dar al paciente una dosis inicial y_0 y luego a intervalos iguales de tiempo, digamos τ horas, dar al paciente una dosis D de la droga. La ecuación (1.13) indica la cantidad de droga en el cuerpo del paciente en cada tiempo t; luego, es simple determinar la cantidad de dosis D. En efecto, al instante τ, y antes de administrar la dosis D, la cantidad de droga presente en el cuerpo es

$$y(\tau) = y_0 e^{-k\tau}\,.$$

Si queremos mantener la cantidad inicial y_0 en los tiempos $\tau, 2\tau, 3\tau, \cdots$, la dosis D, que debemos suministrar al paciente cada τ horas, debe satisfacer la ecuación

$$y_0 e^{-k\tau} + D = y_0 \,.$$

Luego

$$D = y_0(1 - e^{-k\tau})\,.$$

Mecánica. El principio de determinación de Newton establece que el movimiento de una partícula o de un sistema de ellas depende de las posiciones y velocidades del sistema. Aplicando esto a la aceleración $\ddot{x}$ de una partícula, se tiene la ecuación

$$\ddot{x} \;=\; F(t, x, \dot{x})\,, \tag{1.14}$$

que se reconoce como la **Segunda Ley de la Mecánica Newtoniana**. En ella, F es la suma de fuerzas aplicadas y en general depende del tiempo t, de la posición x y de la velocidad $\dot{x}$.

Por ejemplo, si suponemos que un cuerpo de masa m cae bajo la sola influencia de la gravitación, tenemos, considerando un sistema de referencia unidireccional orientado al centro de la tierra

$$F \;=\; m \cdot g\,, \quad g : \text{aceleración de gravedad} = \text{constante}\,, \tag{1.15}$$

donde mg: magnitud única debida a la gravedad, llamada *peso* del cuerpo.

Si $y(t)$ es la posición en que se encuentra el cuerpo en el instante t medida desde una cierta posición fija, su velocidad $v = \frac{dy}{dt}$ es la razón de cambio de posición, y su aceleración $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ es la razón de cambio de velocidad, ambas con respecto al tiempo.

Luego la ecuación (1.15) se convierte en

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \;=\; m \cdot g \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} \;=\; g\,.$$

Si alteramos la situación admitiendo que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad, tenemos

$$F \;=\; m \cdot g \;-\; k \cdot \frac{dy}{dt}$$

y la ecuación diferencial asociada es

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \;=\; m \cdot g \;-\; k \cdot \frac{dy}{dt}\,.$$

Trayectorias Ortogonales. Considere una familia a un parámetro de curvas dada por la ecuación

$$F(x, y) = c\,. \tag{1.16}$$

Diferenciando obtenemos

$$F_x dx + F_y dy = 0\,.$$

donde F_x y F_y son las derivadas parciales de F con respecto a x e y, respectivamente. Así,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \tag{1.17}$$

nos dá la pendiente de cada curva de la familia (1.16). Queremos encontrar otra familia de curvas tal que cada miembro de la nueva familia intercepte a cada miembro de la familia (1.16) en ángulo recto; es decir, queremos encontrar las **trayectorias ortogonales** de la familia (1.16). Debemos tener en cada punto, entonces,que el producto de la pendiente de la curva que pasa por ese punto de la familia (1.16) y la pendiente de la correspondiente trayectoria ortogonal debe ser igual a -1. Así, teniendo en cuenta (1.17), la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}\,, \tag{1.18}$$

nos dá las trayectorias ortogonales de la familia (1.16).

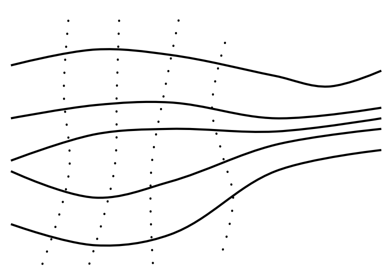


Figura 3

Hay muchas interpretaciones físicas y usos de trayectorias ortogonales:

1. En campos electrostáticos las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante. Así, partiendo de las líneas de potencial se pueden encontrar las líneas de fuerza tal como indican (1.16), (1.17) y (1.18).

2. En flujos de fluidos bi-dimensionales las líneas de movimiento del flujo son ortogonales a las líneas equipontenciales del flujo (ver Figura 3).

3. En meteorología las trayectorias ortogonales de las *isobaras* (curvas conectando los puntos que reportan igual presión barométrica) indican la dirección del viento desde áreas de alta a baja presión.

Estas son algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales. Otras serán desarrolladas en detalle a lo largo del texto.

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

2.1 Preliminares

Dado un subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ y una función $f : \Lambda \to \mathbb{R}$, consideramos el problema de encontrar un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y una función diferenciable $\phi : I \to \mathbb{R}$, tal que para todo $t \in I$,

(a) $(t, \phi(t)) \in \Lambda$, y

(b) $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$.

Este problema es llamado: **ecuación diferencial ordinaria de orden 1**, y es denotado por

$$y' = f(t, y)\,. \tag{2.1}$$

Si tal función ϕ existe y verifica (a) y (b) en I, entonces ϕ es llamada una **solución** de (2.1) en I.

2.2 Ejemplos preliminares

Consideremos primero el caso en que f es independiente de y, es decir, consideremos la ecuación

$$y' = f(t)\,, \tag{2.2}$$

donde f está definida en algún intervalo I. El problema es encontrar una función diferenciable ϕ en I, tal que $\phi'(t) = f(t)$. Este problema ya fue estudiado en cálculo, y sabemos que si f es continua sobre I, la función ψ definida por

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds\,,$$

donde t_0 es algún punto fijo de I, es una solución de (2.2). Además si ϕ es cualquier solución de (2.2), entonces para todo $t \in I$

$$\phi'(t) - \psi'(t) = f(t) - f(t) \equiv 0$$

lo que implica que existe una constante c tal que

$$\phi(t) = \psi(t) + c\,, \quad \forall t \in I\,. \tag{2.3}$$

Observe que cualquier función de la forma (2.3) es solución. Así todas las soluciones de (2.2) son conocidas en el caso en que f es continua sobre I, y todo se reduce a un problema de integración.

Consideremos ahora la ecuación

$$y' = ky\,, \tag{2.4}$$

que sirve de modelo para el crecimiento de poblaciones (ver (1.11)) si $k > 0$ o de desintegración radiactiva (ver (1.12)) si $k < 0$. Primero que nada tenemos la solución obvia $\phi(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Podemos también verificar fácilmente que dada una constante c arbitraria, funciones de la forma

$$\phi(t) = ce^{kt} \tag{2.5}$$

son soluciones, que están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ y nunca se anulan si $c \neq 0$. Por otra parte si $\psi(t)$ es una solución cualquiera de (2.4), que es positiva en un intervalo I, tenemos para todo $t \in I$

$$k = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}\,,$$

lo que implica, vía integración, que para t_0 fijo en I

$$k(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)}{\psi(s)} ds\,, \tag{2.6}$$

y haciendo la sustitución $u = \psi(s)$, obtenemos

$$k(t - t_0) = \int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} \frac{1}{u} du = \ln(\frac{\psi(t)}{\psi(t_0)})\,.$$

Finalmente, exponenciando se obtiene para todo $t \in I$

$$\psi(t) = \psi(t_0) e^{k(t - t_0)} \tag{2.7}$$

que es de la forma (2.5) y está en realidad definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Si partimos ahora con una solución ψ que es negativa en el intervalo I, en (2.6) debemos hacer la sustitución $u = -\psi(s)$ obteniéndose

$$k(t - t_0) = \int_{-\psi(t_0)}^{-\psi(t)} \frac{1}{u} du = \ln(\frac{\psi(t)}{\psi(t_0)}) \,,$$

y se llega nuevamente a la función (2.7).

Estableceremos en la sección subsiguiente, que para condiciones bien generales sobre la función $f(t, y)$ (que son verificadas por $f(t, y) = ky$), si dos soluciones ϕ y ψ de

$$y' = f(t, y)$$

definidas sobre el mismo intervalo abierto J, coinciden en un punto $t_0 \in J$, entonces $\phi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in J$.

Usando esto podemos entonces concluir, que todas las soluciones de (2.4) son de la forma (2.5).

2.3 Campos de direcciones e isoclinas

El problema planteado por la ecuación $y' = f(t, y)$ tiene una interpretación geométrica simple. Para facilitar, supongamos f está definida para todos los valores de t e y. Entonces para cada punto (t, y) en el plano tenemos el número real $f(t, y)$. ¿ Qué significa este número ? Nuestros ejemplos sugieren que es la razón de cambio de y con respecto de t en ese punto. Para interpretar esto geométricamente pensemos en una línea recta, o un segmento de línea recta, de pendiente $f(t, y)$ por el punto (t, y). La longitud de tal segmento no importa; solo su pendiente interesa. Así a todo punto del plano es asignado un segmento de línea recta o, lo que es lo mismo, una pendiente. Observe que no hay segmentos paralelos al eje y, tales segmentos tienen pendiente *infinita* y correspondería a puntos en donde f no está definida. La correspondencia de líneas rectas (o pendientes) a puntos del plano (t, y) será llamado un **campo de direcciones**. La Figura 4 muestra una parte del campo de direcciones de la ecuación $dy/dt = ky$ con $k = 2$. El carácter autónomo de la ecuación (f es independiente de t) se refleja en el hecho que puntos sobre una línea paralela al eje t se les asigna la misma pendiente: la pendiente en el punto (t, y) es $2y$, y por lo tanto es independiente de t.

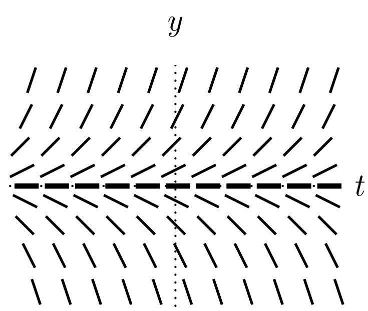


Figura 4

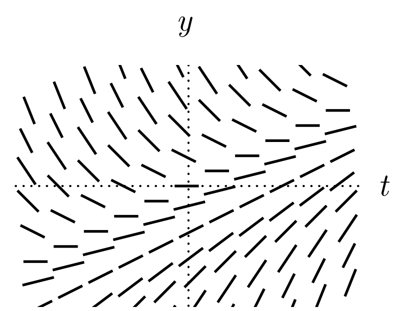


Figura 5

La Figura 5 muestra el campo de direcciones de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = t - 2y\,. \tag{2.8}$$

En ambos ejemplos, la función f está definida en todo el plano (t, y). Ejemplos de ecuaciones diferenciales definidas solamente en una parte del plano son $dy/dt = \sqrt{ty}$, que está definida solo para $ty \geq 0$, es decir, en el primer y cuarto cuadrante incluyendo sus fronteras, y la ecuación $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2-y^2}}$ que está solamente definida para $t^2 + y^2 < 1$, es decir, en el interior del círculo de centro en el origen y radio 1.

Las curvas $f(t, y) =$ constante son llamadas **isoclinas** de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$. A menudo es más fácil dibujar el campo de direcciones si previamente se dibujan algunas isoclinas. Observe que las isoclinas de una ecuación autónoma son rectas paralelas al eje t. Las isoclinas de la ecuación (2.8) son las rectas $t - 2y = c$.

Supongamos ahora que podemos encontrar una curva en el plano (t, y) que es tangente en cada uno de sus puntos a la recta asignada a ese punto por la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$. Tales curvas tienen, por definición, una tangente en cada uno de sus puntos. Como estas tangentes nunca son paralelas al eje y, la curva es el gráfico $y = \phi(t)$ de una función ϕ definida sobre algún intervalo del eje t y tiene derivada en cada punto de este intervalo. La pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto $(t, \phi(t))$ es, por definición, la pendiente $f(t, \phi(t))$ asignado a ese punto. Por otra parte, esta pendiente es igual a $\phi'(t)$, el valor de la derivada de ϕ en t. Así $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ para todo t en el intervalo de definición de ϕ. Luego ϕ es una solución de la ecuación diferencial.

Inversamente, si tenemos una función ϕ que es una solución de $y' = f(t, y)$, es obvio que su gráfico $y = \phi(t)$ es tangente en cada uno de sus puntos a la recta asignada a ese punto por la ecuación diferencial.

Llamaremos **curva solución** al gráfico de una solución. Las Figuras 6 y 7 muestran algunas curvas solución de las ecuaciones (1.11) con $k = 2$ y de (2.8), respectivamente.

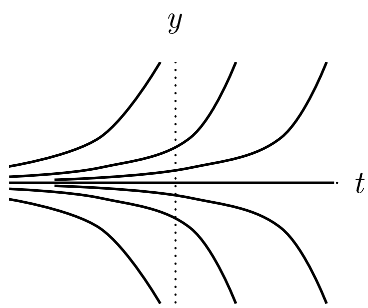


Figura 6

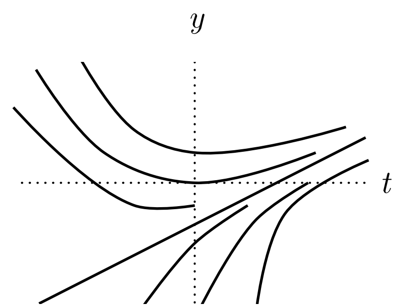


Figura 7

2.4 Existencia y unicidad de soluciones

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3}\,.$$

Es fácil comprobar que las funciones $u(t) = 0$ y $v(t) = t^3$ son soluciones, que ambas están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, y que $u(0) = v(0) = 0$. Es decir ambas curvas solución pasan por el punto $(0,0)$ y por supuesto $u \neq v$.
Por otra parte si consideramos la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{-\mid y - t \mid}\,,$$

que está definida solo sobre la recta $y = t$, podemos comprobar fácilmente que no tiene soluciones. En efecto, nuestra función $f(t, y) = 0$ para todo (t, y) en su dominio de definición. Si existiera solución u, esta tendría que estar definida sobre algún intervalo abierto $a < t < b$ y para cada t en ese intervalo deberíamos tener: $(t, u(t))$ pertenece al dominio de definición de f, lo que implica $u(t) = t$; y además $u'(t) = f(t, u(t)) = 0$, lo cual no es posible.

Estos ejemplos nos muestran que es posible que una ecuación diferencial no tenga soluciones, y que también es posible que dos curvas soluciones diferentes de la misma ecuación diferencial de primer orden se intercepten entre sí. Queremos excluir tales casos. Queremos estar seguros que una curva solución pasa por cada punto de la región donde la ecuación diferencial está definida, y también deseamos estar seguros que solamente una curva solución pasa por cada punto. La primera de estas demandas parece más razonable que la segunda. Hay muchas razones puramente matemáticas para esta última, pero las más simple es más científica que matemática. Cuando decimos que un sistema físico es *gobernado* por una ecuación de primer orden $dy/dt = f(t, y)$, queremos decir que si en el instante t_0 el sistema está en el estado y_0, sus estados futuros están completamente determinados por la ecuación diferencial - esto es, guiados por el campo de direcciones. De esta forma una ecuación diferencial puede gobernar un sistema físico solamente si a un punto dado (t_0, y_0), le corresponde exactamente una solución u que satisface $u(t_0) = y_0$. Cuando este es el caso, decimos que la ecuación tiene la propiedad de la *unicidad*. Afortunadamente, es posible garantizar que una ecuación tiene la propiedad de la unicidad si la función f tiene ciertas propiedades que pueden ser verificadas directamente.

Para establecer este resultado necesitamos una definición. Decimos que un subconjunto D del plano es *abierto* si todo punto de D es el centro de un rectángulo abierto que está contenido en D. Más precisamente, D es abierto si para todo punto (t_0, y_0) en D, existen números positivos a y b tales que cualquier punto (t, y) satisfaciendo $| t - t_0 | < a$ y $| y - y_0 | < b$ también pertenece a D. El plano mismo es abierto; otros ejemplos son (1) el conjunto de los puntos (t, y) satisfaciendo $t^2 + y^2 < 1$; (2) el conjunto de los puntos (t, y) satisfaciendo $y < 0$; (3) el plano menos una línea. Ejemplos de conjuntos que no son abiertos son (1) una línea; (2) el conjunto $y \geq 0$; (3) el conjunto $0 < t < 1, 0 \leq y < 1$.

Ahora ya estamos en condiciones de establecer el teorema fundamental de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden. Su demostración, y la demostración de los Teoremas 2.4.2 y 2.4.3, que son consecuencia de éste, necesitan un mayor manejo de conceptos matemáticos y serán omitidas en esta presentación.

Teorema 2.4.1 *Sea D un conjunto abierto del plano (t, y) y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga además que f tiene derivada parcial con respecto a y en todo punto de D y que $\partial f / \partial y$ es continua sobre D. Sea (t_0, y_0) un punto de D. Entonces la ecuación diferencial $dy/dt = f(t, y)$ tiene una solución u definida en un intervalo alrededor de t_0 que verifica $u(t_0) = y_0$. Más aún, si v es una solución definida en el mismo intervalo que u, y $v(t_0) = y_0$, entonces $v = u$.*

El punto (t_0, y_0) es frecuentemente llamado una *condición inicial*, y el problema de encontrar una solución u tal que $u(t_0) = y_0$ es llamado un *problema de valores iniciales*. El Teorema (2.4.1) podríamos interpretarlo diciendo que bajo ciertas circunstancias un problema de valores iniciales tiene una única solución. Si pensamos un poco nos daremos cuenta que esta no es una descripción muy correcta del teorema, y más aún nos daríamos cuenta que no hemos sido muy precisos al introducir el concepto de unicidad. Como lo hemos planteado ninguna ecuación de primer orden tiene la propiedad de la unicidad. En efecto, si tenemos una solución cuyo gráfico pasa por un punto dado, siempre podemos encontrar otra solución diferente cuyo gráfico pasa por el mismo punto: basta tomar como intervalo de definición de la segunda solución un intervalo un poco más pequeño que el intervalo de definición de la solución original, y definir la segunda solución de la misma forma que la primera.

Sea u una solución de $dy/dt = f(t, y)$ definida sobre un intervalo I. Sea v una solución definida sobre un intervalo I' que contiene al intervalo I pero no coincide con él. Si $v(t) = u(t)$ para todo t en I, diremos que v es una **continuación** de u. El gráfico de u es entonces simplemente una parte del gráfico de v. Si u no tiene continuación, diremos que u es una solución **máxima**. Asumiendo que f satisface el Teorema (2.4.1), una solución definida sobre un intervalo de la forma $[a, b]$ no puede ser máxima. En efecto, si ponemos $t_1 = b$ y $y_1 = u(t_1)$ y aplicamos el teorema al punto (t_1, y_1), obtenemos una solución v definida sobre un intervalo $[a_1, b_1]$, con $a_1 < t_1 < b_1$, tal que $v(t_1) = y_1$. Como $u(t_1) = v(t_1)$, la parte correspondiente a la unicidad del Teorema (2.4.1) implica que $u(t) = v(t)$ para $a_2 \leq t \leq b$, donde $a_2 = \max\{a, a_1\}$. Definimos, entonces, una función w sobre el intervalo $[a, b_1]$ poniendo, $w(t) = u(t)$ para $a \leq t \leq b$ y $w(t) = v(t)$ para $b \leq t \leq b_1$. Entonces v es una continuación de u a la *derecha*. Aplicando el mismo procedimiento al punto $(a, u(a))$ podemos mostrar que u tiene también continuación a la *izquierda*. De esta forma si el intervalo de definición de una solución contiene el extremo derecho o el izquierdo, la solución no es máxima. El intervalo de definición de una solución máxima es siempre un intervalo abierto.

El siguiente teorema, que es una simple extensión del Teorema (2.4.1), también recibe el nombre de *teorema fundamental de existencia y unicidad*.

Teorema 2.4.2 *Suponga que f y $\partial f/\partial y$ están definidas y son continuas sobre un conjunto abierto D del plano (t, y). Sea (t_0, y_0) un punto de D. Entonces la ecuación $dy/dt = f(t, y)$ tiene una solución máxima u tal que $u(t_0) = y_0$. Si v es cualquier otra solución que verifica $v(t_0) = y_0$, entonces u es una continuación de v.*

Suponga que u es una solución máxima. ¿ Podemos asegurar que ella esté definida para todo t? Un primer requisito para tener esto es que f esté definida para todo t. Pero aún si D es todo el plano, algunas o todas las soluciones máxima pueden estar definidas sobre intervalos con extremos finitos. Por ejemplo consideremos la ecuación $dy/dt = y^2$. Entonces $f(t, y) = y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$, y ambas funciones son continuas en todas partes. A pesar de esto, la solución $u(t) = -1/t$, definida para $t < 0$ es máxima. Cualquier continuación tendría que estar definida y ser continua en $t = 0$ y coincidir con u para $t < 0$, lo que es claramente imposible. Este ejemplo muestra que el intervalo de definición de una solución máxima u puede tener un punto extremo finito si $u(t) \to \infty$ o $u(t) \to -\infty$ cuando t se aproxima a ese punto. El siguiente teorema nos dice que esta es la única posibilidad.

Teorema 2.4.3 *Suponga que f y $\partial f/\partial y$ están definidas y son continuas en todo el plano. Sea u solución máxima de $dy/dt = f(t, y)$. Si el intervalo de definición de u tiene un punto extremos finito α, entonces $\mid u(t) \mid \to \infty$ cuando $t \to \alpha$.*

2.5 Solución general y problema de valores iniciales

Cuando nos enfrentamos a una ecuación diferencial nuestro primer impulso podría ser tratar de encontrar todas sus soluciones. También idealmente nos gustaría escribir estas soluciones en término de funciones bien conocidas. Esto puede hacerse para muchas ecuaciones importantes. Por ejemplo en la subsección (2.1) se determinó que toda solución de

$$y' = f(t), \quad (f \quad \text{continua}), \tag{2.9}$$

es de la forma

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + c\,, \tag{2.10}$$

donde t_0 es algún punto del intervalo donde f está definida, y c es una constante. También mostramos que todas las soluciones de

$$y' = ky \tag{2.11}$$

son de la forma

$$\phi(t) = ce^{kt}\,, \tag{2.12}$$

donde c es una constante.

Diremos que una familia de funciones, que generalmente depende de un cierto número de constantes, es la **solución general** de una ecuación diferencial, si toda solución de dicha ecuación pertenece a la familia. De esta forma (2.10) y (2.12) son, respectivamente, las soluciones generales de (2.9) y (2.11).

Pero algunas veces, queremos encontrar soluciones particulares que cumplan ciertas características especiales. De ellas conviene destacar a las que son solución del problema de *valores iniciales*

$$y' = f(t, y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,, \tag{2.13}$$

Observe que si $f(t, y)$ verifica las condiciones del Teorema 2.4.1, entonces el problema de valores iniciales 2.13 tiene una única solución máxima. En general nos referimos a esta solución, como la solución particular de la ecuación $y' = f(t, y)$ que verifica la condición $y(t_0) = y_0$ o como la curva solución que pasa por el punto (t_0, y_0).

Ejemplo 2.5.1 Encuentre la solución particular de la ecuación $y' = 2y$ que verifica $y(1) = 2$.

La solución general de nuestra ecuación es

$$y(t) = ce^{2t}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar nuestra solución particular resolvemos la ecuación

$$2 \;=\; y(1) \;=\; ce^2 \quad \Longrightarrow \quad c \;=\; 2e^{-2}\,.$$

Luego la solución buscada es

$$y(t) \;=\; 2e^{-2}e^{2t}\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

o bien

$$y(t) \;=\; 2e^{2(t-1)}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

2.6 Ecuaciones de variables separables

Para ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y) \tag{2.14}$$

es posible, en ciertos casos, encontrar fórmulas para las soluciones. La técnica que se usa es conocida como *separación de variables*, y una ecuación de la forma (2.14) es llamada una ecuación de *variables separables*. Observamos que los sistemas autónomos son ejemplos de estas ecuaciones.

Daremos una simplificada descripción de esta técnica, que nos permitirá desarrollar rigurosamente algunos ejemplos.

Supongamos que la ecuación diferencial (2.14) está definida en un conjunto $\Lambda = I \times J$, donde I y J son intervalos abiertos de la recta real, y que las funciones $g : I \to \mathbb{R}$ y $h : J \to \mathbb{R}$ son continuas.

Primero observamos que si para $y_0 \in J$ tenemos $h(y_0) = 0$, entonces la función constante $y(t) = y_0\,,\ t \in I$ es solución de nuestra ecuación diferencial.

Sea ahora J_0 un intervalo abierto contenido en J, tal que $h(y) \neq 0$ para todo $y \in J_0$ y que sea maximal con esta propiedad (es decir, si existe intervalo J_1 que contiene a J_0 tal que $h(y) \neq 0$ para todo $y \in J_1$, entonces $J_1 = J_0$). Para $(t, y) \in I \times J_0$, podemos escribir la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t)dt\,,$$

y así las variables son *separadas* dejando solamente $y's$ a la izquierda y $t's$ a la derecha. Tomamos ahora integrales indefinidas a ambos lados, obteniendo

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt + c\,,$$

donde c es una constante arbitraria. No es necesario poner una constante arbitraria al lado izquierdo, ya que esta constante puede ser combinada con la del lado derecho. Esta última ecuación puede ser escrita

$$H(y) = G(t) + c\,,$$

donde H y G son las integrales indefinidas de $1/h$ y g, respectivamente. Ahora resolvemos esta ecuación para y. Para cada c (posiblemente restringido a cierto rango), la función resultante nos dará una o más soluciones de la ecuación diferencial (2.14).

Ejemplo 2.6.1

$$\frac{dy}{dt} = 2ty^2\,. \tag{2.15}$$

La ecuación está definida en $\Lambda = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ y $h(y) = y^2$ se anula solo para $y = 0$. Luego ya tenemos la solución constante $y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}$.

Para $y \neq 0$ separamos variables

$$\frac{dy}{y^2} = 2tdt\,,$$

y tomamos integral indefinida a ambos lados:

$$-\frac{1}{y} = t^2 + c\,.$$

Resolviendo para y obtenemos

$$y = \frac{-1}{t^2 + c}\,. \tag{2.16}$$

Verifiquemos que para cada c, la función $\phi(t) = \frac{-1}{t^2+c}$ satisface (2.15). Diferenciando obtenemos $\phi'(t) = \frac{2t}{(t^2+c)^2}$, y como también $2t(\phi(t))^2 = \frac{2t}{(t^2+c)^2}$, tenemos $\phi'(t) = 2t(\phi(t))^2$ y la ecuación es satisfecha.

Ahora separamos estas funciones en soluciones, es decir, funciones definidas sobre intervalos. Para toda c positiva, la fórmula (2.16) nos da una función definida para todo t. Todas estas soluciones son negativas; sus gráficos son las curvas mostradas en la Figura 41. Para $c = 0$, obtenemos dos curvas, definidas respectivamente para $t < 0$ y $t > 0$; ambas son negativas. Para cada valor negativo de c obtenemos tres curvas. Una de estas es positiva y está definida para $-\sqrt{-c} < t < \sqrt{-c}$; las otras dos son negativas y están definidas para $t < -\sqrt{-c}$ y $t > \sqrt{-c}$, respectivamente. Note que todas las soluciones obtenidas son maximales.

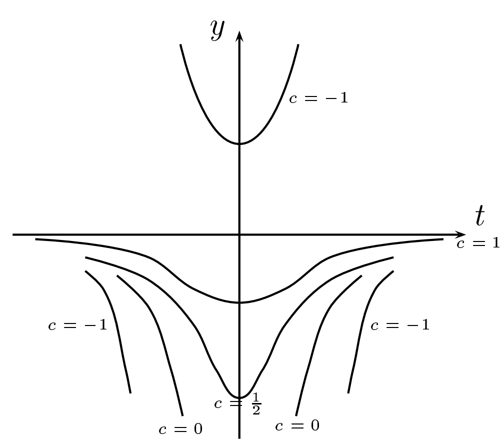


Figura 8

¿ Como podemos asegurarnos que no hay otras soluciones maximales ? Esto se responde usando el teorema de existencia y unicidad (Teorema (2.4.1)). Como $f(t, y)$, que es igual a $2ty^2$, y $\partial f(t, y)/\partial y$, que es igual a $4ty$, son continuas en todo el plano, una y solo una curva solución pasa a través de cualquier punto dado (t_0, y_0). Si nos damos cuenta que hay un punto que no está en ninguna de las curvas solución que hemos encontrado, entonces claramente nuestra familia de curvas solución es incompleta. Por otra parte, si por cada punto (t_0, y_0) podemos encontrar en nuestra familia una solución u que verifica $u(t_0) = y_0$, entonces nuestra familia es completa. La primera afirmación es consecuencia de la parte de la *existencia* del teorema: por todo punto (t_0, y_0), existe una solución u tal que $u(t_0) = y_0$. La segunda afirmacón es consecuencia de la parte de la *unicidad*: no puede haber más de una curva solución a través de cualquier punto; si nuestras soluciones cubren todo el plano, no hay otras.

El asunto se reduce a: dado un punto (t_0, y_0), ¿ hay un número c tal que $y_0 = \frac{-1}{t_0^2+c}$? Resolviendo esta ecuación obtenemos $c = -t_0^2 - 1/y_0$, si $y_0 \neq 0$. ¿ Que pasa si $y_0 = 0$? En este caso, la solución es la función constante $y(t) = 0\,,\ t \in \mathbb{R}$. Luego, la familia

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y(t) & = & \frac{-1}{t^2+c}\,, c \in \mathbb{R} \\ y(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

con t en el intervalo que corresponde según c, es la solución general de nuestra ecuación.

Ejemplo 2.6.2

$$\frac{dy}{dt} = y\,. \tag{2.17}$$

Esta ecuación tiene la solución constante $y \equiv 0$. Para $y \neq 0$, la ecuación se escribe

$$\frac{dy}{y} = dt\,.$$

Si $y > 0$ integrando obtenemos

$$\ln(y) = t + c\,.$$

Para despejar y, tomamos exponencial a ambos lados:

$$y = e^{t+c} = e^c e^t = ke^t\,,$$

donde k es una constante positiva arbitraria.
Si $y < 0$ la ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{-dy}{-y} = dt\,,$$

e integrando se obtiene

$$\ln(-y) = t + c \quad \Longrightarrow \quad -y = e^{t+c} = e^c e^t = ke^t\,,$$

y luego

$$y = -ke^t\,,$$

donde k es una constante positiva arbitraria. Así

$$y = \pm k e^t\,,$$

dependiendo de si $y > 0$ o $y < 0$. Esta fórmula es equivalente a

$$y = c e^t\,, \tag{2.18}$$

donde c es una constante no nula arbitraria.

Diferenciando (2.18) se obtiene $dy/dt = ce^t = y$, luego (2.17) se verifica. También notamos que $c = 0$ produce la solución constante, por lo que (2.18) es solución para todos los valores de c. Todas estas soluciones están definidas para todo t. Finalmente, observamos que $y_0 = ce^{t_0}$ tiene la solución $c = y_0 e^{-t_0}$, por lo que las curvas (2.18) cubren todo el plano. Como (2.17) tiene la propiedad de la *unicidad*, hemos encontrado todas las soluciones. Algunas curvas solución son mostradas en la Figura 42.

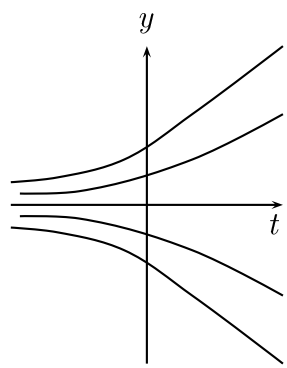


Figura 9

Ejemplo 2.6.3

$$\frac{dy}{dt} = \cos^2(y)\,. \tag{2.19}$$

Las soluciones de $\cos^2(y) = 0$ nos dan una cantidad infinita de soluciones constantes de la ecuación diferencial. Estas son $y \equiv (n + \frac{1}{2})\pi$, donde n es un número entero arbitrario. Si $\cos^2(y) \neq 0$, podemos escribir

$$\frac{dy}{\cos^2(y)} = dt\,.$$

Como $1/\cos^2(y) = \sec^2(y)$ y $\int \sec^2(y)dy = \tan(y)$, tenemos, después de integrar

$$\tan(y) = t + c\,. \tag{2.20}$$

Para resolver esta ecuación para y, podemos simplemente poner $y = \arctan(t + c)$. Si hacemos esto, tendríamos que asumir que y está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$; y todas las soluciones de (2.19) obtenidas de esta forma estarían en esta franja. En lugar de esto, debemos asumir que y está en alguno de los infinitos intervalos abiertos cuyos extremos son ceros consecutivos de $\cos^2(y)$. Supongamos, entonces, que $-\pi/2 + n\pi < y < \pi/2 + n\pi$ para algún entero n, y así, $-\pi/2 < y - n\pi < \pi/2$. Como $\tan(y) = \tan(y - n\pi)$, podemos escribir (2.20) de la forma

$$\tan(y - n\pi) = t + c$$

y aplicando tangente inversa a ambos lados obtenemos

$$y = n\pi + \arctan(t + c)\,. \tag{2.21}$$

En esta fórmula c es arbitraria, y n es un entero arbitrario. Dejamos al lector verificar que las funciones definidas por esta fórmula son realmente soluciones, y que junto con las soluciones constantes cubren el plano. Como (2.19) tiene la propiedad de la unicidad, tenemos que todas las soluciones han sido encontradas. Note que cada una de ellas está definida para todo t.

Ejemplo 2.6.4

$$\frac{dy}{dt} = 2t\sec(y)\,, \quad -\pi/2 < y < \pi/2\,. \tag{2.22}$$

Como la secante no tiene ceros, no hay soluciones constantes. Separando variables e integrando obtenemos

$$\operatorname{sen}(y) = t^2 + c\,. \tag{2.23}$$

En los ejemplos anteriores, la constante de integración era completamente arbitraria. Aquí, sin embargo, no tiene sentido permitir que c asuma el valor 2, por ejemplo. Si lo hacemos no podríamos resolver la ecuación para y, sin importar como restrinjamos los valores de t. El lado derecho nunca sería menor que 2, mientras que $\operatorname{sen}(y)$ no puede exceder de 1. Por lo tanto debemos solamente permitir valores de c para los cuales la ecuación (2.23) sea satisfecha a lo menos por un par de valores (t, y). Este requerimiento junto con las restricciones $-\pi/2 < y < \pi/2$ implican que $c < 1$. Elegido $c < 1$, debemos restringir t para tener $-1 < t^2 + c < 1$, es decir $-1-t^2 < c < 1-t^2$. En la Figura 43 se grafica la región del plano (t, c) que satisface esta desigualdad.

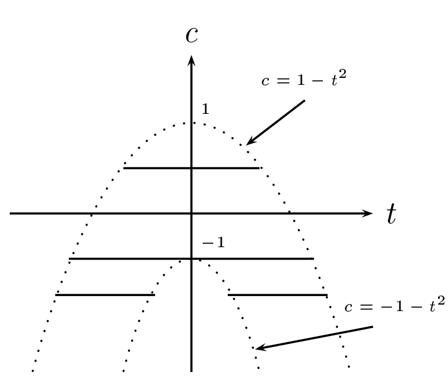


Figura 10

Si $-1 \le c < 1$ se cumple que la región intersecta a $c =$ constante en un solo intervalo $I_c =]-\sqrt{1-c}, \sqrt{1-c}\,[$. Si ocurre que $c < -1$ se cumple que la región intersecta a $c =$ constante en dos intervalos $I_c^1 =]-\sqrt{1-c}, -\sqrt{-1-c}\,[$ y $I_c^2 =]\sqrt{-1-c}, \sqrt{1-c}\,[$. Ahora ya podemos resolver y obtener la fórmula

$$y = \arcsin(t^2 + c)\,. \tag{2.24}$$

Hay una curva solución de (2.22) si $-1 \leq c < 1$, y dos curvas solución si $c \leq -1$.

2.6.1 Ecuaciones que se reducen a ecuaciones de variables separables

1. Ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} \;=\; f(ax + by + c)$$

se reducen a variables separables haciendo el cambio de variables $z \;=\; ax + by + c$. En efecto

$$z \;=\; ax + by + c \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} \;=\; a + b\frac{dy}{dx}\,,$$

y reemplazando en nuestra ecuación se obtiene

$$\frac{dz}{dx} \;=\; a + bf(z)$$

que es de variables separables.

Ejemplo 2.6.5 Aplicando lo anterior resolvamos

$$\frac{dy}{dx} \;=\; 3y \;-\; x\,.$$

El cambio de variables $z \;=\; 3y \;-\; x$, implica $\frac{dz}{dx} \;=\; 3\frac{dy}{dx} \;-\; 1$. Luego, en las nuevas variables nuestra ecuación es

$$\frac{dz}{dx} \;=\; 3z \;-\; 1\,.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dz}{3z - 1} \;=\; dx\,,$$

e integrando

$$\frac{1}{3}\ln(3z - 1) \;=\; x \;+\; \ln(c)\,.$$

Luego

$$3z - 1 \;=\; ce^{3x} \quad \Longrightarrow \quad z(x) \;=\; ce^{3x} + \frac{1}{3}\,,$$

y volviendo a nuestras variables originales, tenemos

$$3y - x \;=\; ce^{3x} + \frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad y(x) \;=\; \frac{x}{3} \;+\; ce^{3x} \;+\; \frac{1}{9}\,.$$

2. Ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx} \;=\; f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se reducen a variables separables haciendo el cambio de variables $z \;=\; \frac{y}{x}$.
En efecto

$$z \;=\; \frac{y}{x} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dz}{dx} \;=\; \frac{\frac{dy}{dx}x - y}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dz}{dx} \;=\; \frac{f(z) - z}{x}\,,$$

que es de variables separables.

Ejemplo 2.6.6 Resolvamos

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{x+y}{x-y}\,.$$

Esta ecuación la podemos escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}\,.$$

Por otra parte $z \;=\; \frac{y}{x}$, implica $y = zx$, y por lo tanto $\frac{dy}{dx} \;=\; x\frac{dz}{dx} + z$. Luego tenemos

$$x\frac{dz}{dx} + z \;=\; \frac{1+z}{1-z} \quad\Longrightarrow\quad x\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{1+z^2}{1-z} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1-z}{1+z^2}dz \;=\; \frac{dx}{dx}\,.$$

Integrando obtenemos

$$\arctan(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) - \ln(x) \;=\; c\,,$$

y volviendo a nuestra variables originales

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \;-\; \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \;=\; c\,.$$

Observe que nuestra solución general está dada en forma implícita. Así, una función $y = y(x)$ definida sobre un intervalo I es solución solo si al ser reemplazada en el lado izquierdo de la expresión anterior resulta constante, para todo x en I.

3. Ecuaciones del tipo

$$M(x,y)\,dx \;+\; N(x,y)\,dy \;=\; 0\,,$$

donde M, N son funciones homogéneas de grado n.

Recuerde que una función $F(x,y)$ se dice *homogénea de grado* n si

$$F(tx,ty) \;=\; t^n\,F(x,y)\,,$$

para todo x,y,t tales que los puntos (x,y) y (tx,ty) están en el dominio de definición de F.
La ecuación es de la forma

$$\frac{dy}{dx} \;=\; F(x,y)\,,$$

donde $F(x,y) \;=\; -M(x,y)/N(x,y)$ es claramente homogénea de grado 0. Entonces

$$F(x,y) \;=\; F\left(x, x\frac{y}{x}\right) \;=\; x^0\,F\left(1,\frac{y}{x}\right) \;=\; F\left(1,\frac{y}{x}\right)\,.$$

De esta forma nuestra ecuación es del tipo anterior

$$\frac{dy}{dx} \;=\; f\left(\frac{y}{x}\right)\,,$$

con $f\left(\frac{y}{x}\right) \;=\; F\left(1,\frac{y}{x}\right)$.

Ejemplo 2.6.7 Considere la ecuación

$$(x^2-2y^2)\,dx \;+\; xy\,dy \;=\; 0\,\cdot$$

La ecuación se escribe

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{x^2-2y^2}{xy} \;=\; -\frac{1-2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}\,,$$

y poniendo $z=\frac{y}{x}$ tenemos

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} \;-\; \frac{1}{x}\frac{y}{x} \;=\; -\frac{1}{x}\left(\frac{1-2z^2}{z} \;+\; z\right) \;=\; -\frac{1}{x}\,\frac{1-z^2}{z}\,\cdot$$

Separando variables y multiplicando por 2 obtenemos

$$\frac{2z}{z^2-1}\,dz \;=\; \frac{2}{x}\,dx\,,$$

integrando

$$\ln(z^2-1) \;=\; 2\,\ln(x) \;+\; \ln(c)\,,$$

y exponenciando

$$z^2 \;=\; 1 \;+\; c\,x^2\,.$$

Finalmente volviendo a las variables originales, obtenemos la solución general

$$y \;=\; \pm\,x\,\sqrt{1 \;+\; c\,x^2}\,.$$

4. Ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{ex+fy+g}\right).$$

Si el determinante del sistema

$$\begin{cases} ax+by+c &= 0 \\ ex+fy+g &= 0 \end{cases}$$

es no nulo, es decir si $af - be \neq 0$, el sistema tiene una única solución, digamos $x = h, y = k$. Entonces si hacemos el cambio de coordenadas $X = x - h, Y = y - k$, tenemos $dX = dx, dY = dy$, y

$$\frac{aX+bY}{eX+fY} = \frac{ax+by+c}{ex+fy+g}.$$

Luego en las nuevas coordenadas tenemos la ecuación homogénea

$$\frac{dY}{dX} = F\left(\frac{aX+bY}{eX+fY}\right),$$

que es del tipo 2.
Si $af - be = 0$, existe k tal que $ex+fy = k\,(ax+by)$. Ponemos entonces $z = ax+by$ y la ecuación queda de la forma

$$\frac{dz}{dx} = a + bF\left(\frac{z+c}{kz+g}\right),$$

que es de variables separables.

Ejemplo 2.6.8 Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+2}{x+y-2}.$$

Resolvemos primero el sistema

$$\begin{cases} x-y+2 &= 0 \\ x+y-2 &= 0\,, \end{cases}$$

cuya solución es $x = 0, y = 2$. Hacemos entonces el cambio de coordenadas $X = x, Y = y - 2$ y obtenemos la ecuación

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}.$$

Para transformarla en una ecuación de variables separables, ponemos como antes $Z = \frac{Y}{X}$, y obtenemos la ecuación

$$X\frac{dZ}{dX} + Z \;=\; \frac{1-Z}{1+Z}\,.$$

Por lo tanto

$$X\frac{dZ}{dX} \;=\; \frac{1-2Z-Z^2}{1+Z}\,,$$

y separando variables

$$\frac{1+Z}{1-2Z-Z^2}dZ \;=\; \frac{dX}{X}\,.$$

Integrando

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2Z-Z^2) \;=\; \ln(X)+\ln(c) \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{1-2Z-Z^2} \;=\; \frac{c}{X}\,,$$

y elevando al cuadrado

$$1-2Z-Z^2 \;=\; \frac{c}{X^2}\,.$$

Volviendo a las variables X, Y, obtenemos

$$1-2\frac{Y}{X}-\frac{Y^2}{X^2} \;=\; \frac{c}{X^2} \quad\Longrightarrow\quad X^2-2XY-Y^2 \;=\; c\,,$$

y en las coordenadas x, y, la solución general (en forma implícita)

$$x^2-2x(y-2)-(y-2)^2 \;=\; c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

2.7 Ecuaciones Diferenciales Exactas y Factor Integrante

Consideremos ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \;=\; 0\,. \tag{2.25}$$

Definición 2.7.1 *Diremos que la ecuación (2.25) es una* **ecuación diferencial exacta** *en D, si existe una función $u(x,y)$ tal que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \;=\; M(x,y) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; N(x,y) \quad \forall (x,y)\in D\,.$$

En tal caso

$$du \;=\; \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \;=\; M(x,y)dx + N(x,y)dy \;=\; 0\,,$$

y (2.25) es equivalente a

$$du \;=\; 0\,.$$

Luego

$$y = y(x)\,, \quad x \in I \quad \text{es solución de (2.25)} \quad \Longleftrightarrow \quad u(x, y(x)) = c\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Proposición 2.7.2 *Sean M, N funciones con derivadas parciales continuas de primer orden en una bola abierta $B \subset \mathbb{R}^2$. Entonces*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \;=\; 0 \quad \textit{es exacta en } B \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} \;\equiv\; \frac{\partial N}{\partial x} \quad \textit{en } B\,.$$

Demostración. *Suficiencia.* Supongamos existe u tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ en B. Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Necesidad. Sabemos que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ en B. Debemos encontrar u tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ en B.
Fijemos un punto (x_0, y_0) en B. Para tener $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ definimos para $(x,y) \in B$

$$u(x,y) \;=\; \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds \;+\; g(y)\,,$$

con $g(y)$ a determinar, para que se cumpla también $\frac{\partial u}{\partial y} = N$.
Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;&=\; \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s,y)ds \;+\; g'(y)\\ &=\; \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}(s,y)ds \;+\; g'(y)\\ &=\; N(x,y) \;-\; N(x_0,y) \;+\; g'(y)\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto debemos tener

$$\begin{aligned} g'(y) \;&=\; N(x_0,y)\\ \Longrightarrow \quad g(y) \;&=\; \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt\,,\end{aligned}$$

y nuestra función buscada es

$$u(x,y) \;=\; \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds \;+\; \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt\,.$$

Ejemplo 2.7.3 Resolvamos

$$(3x^2 \;+\; 6xy^2)dx \;+\; (6x^2y \;+\; 4y^3)dy \;=\; 0\,.$$

Tenemos $M(x,y) = 3x^2 \ + \ 6xy^2$ y $N(x,y) = 6x^2y \ + \ 4y^3$. Por lo tanto

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \ = \ 12xy \ = \ \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y la ecuación es exacta.
Pongamos

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int (3x^2 \ + \ 6xy^2)dx \ + \ g(y) \\ &= x^3 \ + \ 3x^2y^2 \ + \ g(y)\,. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 6x^2y \ + \ g'(y)\,, \quad \text{y como} \\ N(x,y) &= 6x^2y \ + \ 4y^3\,, \quad \text{debemos tener} \\ g'(y) &= 4y^3 \\ \Longrightarrow \quad g(y) &= y^4\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(x,y) \ = \ x^3 \ + \ 3x^2y^2 \ + \ y^4\,.$$

Así, las curvas soluciones $(x, y(x))$ de la ecuación satisfacen

$$x^3 \ + \ 3x^2y^2 \ + \ y^4 \ = \ c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Definición 2.7.4 *Si la ecuación*

$$M(x,y)dx \ + \ N(x,y)dy \ = \ 0$$

no es exacta en D, se llama **factor integrante** *a toda función $\mu = \mu(x,y)$ definida en D tal que*

$$\mu(x,y)M(x,y) \ + \ \mu(x,y)N(x,y)dy \ = \ 0$$

es una ecuación exacta en D.

Observaciones 2.7.5 Es claro que toda solución de $y = y(x)$, $x \in I$, de $\mu M dx + \mu N dx = 0$, que verifica: $\mu(x,y(x))$ está definida y $\mu(x,y(x)) \neq 0$ para todo $x \in I$, es también solución de $Mdx + Ndy = 0$ en I.

Ejemplo 2.7.6 La ecuación

$$y(1 \ + \ xy)dx \ - \ xdy \ = \ 0 \tag{2.26}$$

no es exacta.

Sin embargo para $y \neq 0$ la ecuación multiplicada por $\mu(x,y) = \frac{1}{y^2}$

$$\frac{y(1 \,+\, xy)}{y^2}dx \,-\, \frac{x}{y^2}dy \,=\, 0\,,$$

es decir

$$(\frac{1}{y} \,+\, x)dx \,-\, \frac{x}{y^2}dy \,=\, 0\,, \tag{2.27}$$

es exacta.
Así $\mu(x,y) = \frac{1}{y^2}$ es factor integrante de (2.26) en el conjunto $D = \{(x,y)/y \neq 0\}$.

Para resolver (2.27) ponemos

$$u(x,y) \,=\, \int \left(\frac{1}{y} \,+\, x\right) dx \,+\, g(y) \,=\, \frac{x}{y} \,+\, \frac{x^2}{2} \,+\, g(y)\,.$$

Pero como

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \,=\, -\frac{x}{y^2} \,+\, g'(y)\,,$$

debemos tener

$$g'(y) \,=\, 0 \quad\Longrightarrow\quad g(y) = c\,.$$

Por lo tanto, toda solución $y = y(x)$ de (2.27) verifica la ecuación implícita

$$\frac{x}{y} \,+\, \frac{x^2}{2} \,=\, c\,, \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}\,.$$

Despejando y obtenemos

$$y(x) \,=\, \frac{2x}{2c \,-\, x^2}\,, \quad c \in \mathbb{R}, \text{para } x \text{ tal que } 2c \,-\, x^2 \neq 0\,.$$

Observación 2.7.7 Para que $\mu = \mu(x,y)$ sea factor integrante de $Mdx + Ndy = 0$, debemos tener

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) \,=\, \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)\,,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mu}{\partial y} M \,+\, \mu \frac{\partial M}{\partial y} \,=\, \frac{\partial \mu}{\partial x} N \,+\, \mu \frac{\partial N}{\partial x} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} N \,-\, \frac{\partial \mu}{\partial y} M\right) \,=\, \frac{\partial M}{\partial y} \,-\, \frac{\partial N}{\partial x} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{\partial(\ln(\mu))}{\partial x} N \,-\, \frac{\partial(\ln(\mu)}{\partial y} M \,=\, \frac{\partial M}{\partial y} \,-\, \frac{\partial N}{\partial x}\,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

La ecuación (2.28) es una E.D.P. conocida como la **ecuación del factor integrante**. Se puede demostrar que esta ecuación, bajo condiciones bastante generales, siempre tiene solución. El problema es encontrar sus soluciones.

2.7.1 Casos en que es fácil encontrar el factor integrante

1) Si
$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \;=\; f(x) \quad (\text{depende sólo de } x)\,,$$
entonces nuestra ecuación admite factor integrante que depende solo de x.
En efecto si $\mu=\mu(x)$ la ecuación (2.28) queda de la forma
$$\frac{\partial(\ln(\mu(x)))}{\partial x} \;=\; \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(x,y) \;=\; f(x)\,,$$
lo que implica
$$\ln(\mu(x))=\int_{x_0}^{x} f(s)ds \qquad \text{o bien} \qquad \mu(x)=e^{\int_{x_0}^{x} f(s)ds}\,.$$

2) Si
$$\frac{-1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \;=\; g(y) \quad (\text{depende sólo de y})\,,$$
entonces nuestra ecuación admite factor integrante que depende solo de y.
En efecto si $\mu=\mu(y)$ la ecuación (2.28) queda de la forma
$$\frac{\partial(\ln(\mu(y)))}{\partial x} \;=\; \frac{-1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(x,y) \;=\; g(y)\,,$$
lo que implica
$$\mu(y) \;=\; e^{\int_{y_0}^{y} g(t)dt}\,.$$

Ejemplo 2.7.8 Resolvamos
$$\left(2xy \;+\; x^2y \;+\; \frac{y^3}{3}\right)dx \;+\; (x^2 \;+\; y^2)dy \;=\; 0\,.$$
Poniendo
$$M(x,y) \;=\; 2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\,, \quad \text{y} \quad N(x,y) \;=\; x^2+y^2\,,$$
tenemos
$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; 2x+x^2+y^2\,, \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} \;=\; 2x\,,$$
y la ecuación no es exacta.
Pero
$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}\right) \;=\; \frac{1}{x^2+y^2}(x^2+y^2) \;=\; 1\,.$$

Por lo tanto, el factor integrante es

$$\mu(x) \;=\; e^{\int dx} \;=\; e^x\,.$$

Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx \;+\; e^x(x^2+y^2)dy \;=\; 0\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} u(x,y) \;&=\; \int e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx \;+\; g(y) \\ &=\; 2y\int xe^x dx \;+\; y\int x^2e^x dx) \;+\; \frac{y^3}{3}e^x \;+\; g(y) \\ &=\; 2y(xe^x - e^x) \;+\; y\left(x^2e^x - 2\int xe^x dx\right) \;+\; \frac{y^3}{3}e^x \;+\; g(y) \\ &=\; yx^2e^x \;+\; \frac{y^3}{3}e^x \;+\; g(y)\,. \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;-\; N(x,y) \;=\; x^2e^x + y^2e^x + g'(y) \;-\; e^x(x^2+y^2) \;=\; g'(y)\,.$$

Por lo tanto

$$g'(y) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad g(y) \;=\; 0\,.$$

Así

$$u(x,y) \;=\; ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)\,,$$

y la solución general es

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) = c\;, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 2.7.9 Resolvamos

$$\frac{y}{x}dx \;+\; (y^3 - \ln(x))dy \;=\; 0\,.$$

Poniendo

$$M(x,y) \;=\; \frac{y}{x}\,, \quad \text{y} \quad N(x,y) \;=\; y^3 - \ln(x)\,,$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} \;=\; \frac{1}{x}\,, \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} \;=\; \frac{-1}{x}\,,$$

y la ecuación no es exacta.
Pero

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{2}{y},$$

implica que el factor integrante es

$$\mu(y) = e^{-2\int \frac{1}{y}dy} = e^{-2\ln(y)} = e^{\ln(\frac{1}{y^2})} = \frac{1}{y^2}.$$

Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es

$$\frac{1}{xy}dx + \left(y - \frac{\ln(x)}{y^2}\right)dy = 0.$$

Luego

$$u(x,y) = \int \frac{1}{xy}dx + g(y) = \frac{1}{y}\ln(x) + g(y).$$

Pero

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - N(x,y) = -\frac{\ln(x)}{y^2} + g'(y) - y + \frac{\ln(x)}{y^2} = g'(y) - y,$$

lo que implica

$$g'(y) = y \quad \Longrightarrow \quad g(y) = \frac{y^2}{2}.$$

Por lo tanto

$$u(x,y) = \frac{1}{y}\ln(x) + \frac{y^2}{2},$$

y la solución general satisface la ecuación implícita

$$\frac{1}{y}\ln(x) + \frac{y^2}{2} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2.8 Ecuaciones Lineales

Consideremos la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t), \tag{2.29}$$

y supongamos que la funciones $a(t)$ y $b(t)$ están definidas y son continuas sobre un intervalo abierto I. Consecuentemente la función $f(t,y) = a(t)y + b(t)$ y $(\partial f/\partial y)(t,y) = a(t)$ son continuas y luego nuestra ecuación tiene la propiedad de la unicidad.

Mostraremos en esta sección que las soluciones de (2.29) pueden ser expresadas por medio de una fórmula en la que aparecen integrales. Esta fórmula debida a Leibniz, puede ser derivada de varias formas. Presentaremos primero un método de resolución que aunque no es el más corto, tiene la ventaja que la idea básica puede ser aplicada a ecuaciones lineales de orden superior y a sistemas lineales.

La ecuación (2.29) se dice **homogénea** si $b(t)$ es idénticamente cero sobre I, y **no-homogénea** si existe $t \in I$ tal que $b(t) \neq 0$. La ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y \tag{2.30}$$

se resuelve usando separación de variables. Las soluciones están dadas por

$$y(t) = ce^{\int a(t)dt} \tag{2.31}$$

y están por lo tanto definidas sobre todo el intervalo I.

Para discutir la ecuación no-homogénea, consideramos simultáneamente con ella la ecuación homogénea obtenida suprimiendo el término b. La ecuación homogénea obtenida de esta forma es llamada *ecuación reducida*; la ecuación no-homogénea misma es referida como la *ecuación completa*. Sea $u(t)$ cualquier solución de la ecuación reducida que no sea la solución cero. Intentaremos encontrar una función $v(t)$ tal que $v(t)u(t)$ sea solución de la ecuación completa. Asumiendo que tal v existe, sustituyendo y por vu en (2.29), se obtiene

$$(v(t)u(t))' = a(t)v(t)u(t) + b(t)\,,$$

o

$$v'(t)u(t) + v(t)u'(t) = a(t)v(t)u(t) + b(t)\,.$$

Como $u'(t) = a(t)u(t)$, la última ecuación se reduce a

$$v'(t)u(t) + a(t)u(t)v(t) = a(t)v(t)u(t) + b(t)\,,$$

o

$$v'(t)u(t) = b(t)\,.$$

Como $u(t)$ es no nula,

$$v'(t) = \frac{b(t)}{u(t)}$$

y por lo tanto

$$v(t) = \int \frac{b(t)}{u(t)}dt + c\,.$$

De esta forma obtenemos la fórmula

$$y(t) = u(t)\left(\int \frac{b(t)}{u(t)}dt + c\right). \tag{2.32}$$

Es muy fácil verificar que esta fórmula nos dá una solución de (2.29) para todo c:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= u'(t)(\int \frac{b(t)}{u(t)}dt + c) + u(t)\frac{b(t)}{u(t)} \\ &= a(t)(u(t)(\int \frac{b(t)}{u(t)}dt + c) + b(t) \\ &= a(t)y(t) + b(t)\,.\end{aligned}$$

Hemos obtenido así una cantidad infinita de soluciones de (2.29). Mostraremos que en realidad las hemos encontrado todas. Para chequear esto denotemos la integral $\int \frac{b(t)}{u(t)}$ por $Q(t)$, y así la fórmula queda $y(t) = u(t)(Q(t) + c)$. Poniendo $t = t_0, y = y_0$, obtenemos $c = \frac{y_0}{u(t_0)} - Q(t_0)$, y por lo tanto podemos realizar cualquier condición inicial. Note que todas las soluciones están definidas sobre todo el intervalo I.

Para completar la derivación de la fórmula prometida, reemplazamos la función $u(t)$ en (2.32) por $e^{\int a(t)dt}$. Establecemos el resultado como un teorema:

Teorema 2.8.1 *(Fórmula de Leibniz) Las soluciones de (2.29) estań dadas por*

$$y(t) = e^{\int a(t)dt}(\int e^{-\int a(t)dt}b(t)dt + c)\,, \tag{2.33}$$

donde t está en I y c es una constante arbitraria.

La integral indefinida $\int a(t)dt$, que aparece dos veces en (2.33), puede ser elegida como queramos, pero debe ser la misma en ambos lugares.

El lector puede fácilmente verificar que la solución de (2.29) que satisface $u(t_0) = y_0$ está dada por:

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}[\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\tau)d\tau}b(s)ds + y_0]\,. \tag{2.34}$$

Ejemplo 2.8.2

$$\frac{dy}{dt} = 2y + e^t\,.$$

Aquí $a(t) \equiv 2$ y $b(t) = e^t$. Sustituyendo en (2.33):

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{\int 2dt}(\int e^{-\int 2dt}e^t dt + c) \\ &= e^{2t}(\int e^{-2t}e^t dt + c) \\ &= e^{2t}(\int e^{-t}dt + c) \\ &= ce^{2t} - e^t\,.\end{aligned}$$

El método con que fué derivado (2.32) es conocido como *variación de parámetros.* En efecto, una solución de la ecuación completa se obtiene permitiendo que el parámetro c en la fórmula $y(t) = cu(t)$ para la solución de la ecuación reducida *varíe*, es decir, sea una función v de t.

Otro método de resolución consiste en escribir (2.29) de la forma

$$(a(t)y + b(t))dt \;-\; dy \;=\; 0 \tag{2.35}$$

y darnos cuenta que admite factor integrante que depende solo de la variable t. Luego aplicando los métodos de la sección anterior encontramos las soluciones.

En efecto, si

$$M(t,y) \;=\; a(t)y + b(t)\,, \quad \text{y} \quad N(t,y) \;=\; -1\,,$$

tenemos

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)(t,y) \;=\; -a(t)\,,$$

y luego tenemos factor integrante

$$\mu(t) \;=\; e^{-\int a(t)dt}\,.$$

La ecuación (2.35) multiplicada por $\mu(t)$ es

$$e^{-\int a(t)dt}(a(t)y + b(t))dt \;-\; e^{-\int a(t)dt}dy \;=\; 0\,. \tag{2.36}$$

De esta forma

$$u(t,y) \;=\; -\int e^{-\int a(t)dt}dy + h(t) \;=\; -ye^{-\int a(t)dt} + h(t)\,,$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,y) \;=\; ya(t)e^{-\int a(t)dt} + h'(t)\,.$$

Comparando con (2.36), obtenemos

$$h'(t) \;=\; b(t)e^{-\int a(t)dt} \quad \Longrightarrow \quad h(t) \;=\; \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\,,$$

y por lo tanto

$$u(t,y) \;=\; -ye^{-\int a(t)dt} + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\,.$$

De esta forma $y = y(t)$ es solución de (2.29) en el intervalo I, si existe constante c tal que

$$ye^{-\int a(t)dt} - \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt = c\,, \quad \forall t \in I\,.$$

Despejando y obtenemos nuevamente la fórmula de Leibniz

$$y(t) \;=\; e^{\int a(t)dt}\left(c \;+\; \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right)\,.$$

Ejemplo 2.8.3 Usando este último método encontremos las soluciones de

$$\frac{dy}{dx} \;=\; y\tan(x) + \cos(x)\,.$$

Escribiendo la ecuación de la forma

$$(y\tan(x) + \cos(x))dx \;-\; dy \;=\; 0\,,$$

tenemos $a(x) \;=\; \tan(x)$, y el factor integrante es

$$\mu(x) \;=\; e^{-\int \tan(x)dx} \;=\; e^{\int \frac{-\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}dx} \;=\; e^{\ln(\cos(x))} \;=\; \cos(x)\,.$$

Multiplicando por el factor integrante nos queda la ecuación

$$(y\mathrm{sen}(x) + \cos^2(x))dx \;-\; \cos(x)dy \;=\; 0\,,$$

y luego

$$u(x,y) \;=\; -\int \cos(x)dy \;+\; h(x) \;=\; -y\cos(x) \;+\; h(x)\,.$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \;=\; y\mathrm{sen}(x) \;+\; h'(x)\,,$$

debemos tener

$$\begin{aligned} h'(x) \;=\; \cos^2(x) \quad \Longrightarrow \quad h(x) \;&=\; \int \cos^2(x)dx \;=\; \frac{1}{2}\int (1+\cos(2x))dx \\ &=\; \frac{1}{2}x \;+\; \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x)\,. \end{aligned}$$

Luego

$$u(x,y) \;=\; -y\cos(x) \;+\; \frac{1}{2}x \;+\; \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x)\,,$$

y las soluciones $y = y(x)$ deben verificar

$$-y\cos(x) \;+\; \frac{1}{2}x \;+\; \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x) \;=\; c\,,$$

lo que implica

$$y(x) \;=\; \frac{1}{\cos(x)}\left[\frac{1}{2}x \;+\; \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x) \;+\; c\right]\,.$$

2.9 Ecuaciones que se reducen al caso lineal

2.9.1 Ecuación de Bernoulli

Son ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y \;=\; f(x)y^n\,, \quad \text{con} \quad n \neq 1\,.$$

Multiplicando por y^{-n} obtenemos

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{-n+1} \;=\; f(x)\,.$$

Haciendo el cambio de variables $z = y^{1-n}$, tenemos

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = (1-n)[\,-p(x)z \;+\; f(x)]\,,$$

es decir

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z \;=\; (1-n)f(x)\,,$$

que es lineal.

Ejemplo 2.9.1 Resolvamos la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}\,.$$

Tenemos $n = \frac{1}{2}$ y multiplicando por $y^{-\frac{1}{2}}$ obtenemos

$$y^{\frac{-1}{2}}\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{4}{x}\sqrt{y} \;+\; x\,.$$

Ponemos entonces $z = \sqrt{y}$ y reemplazando se tiene

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{1}{2}[\frac{4}{x}z \;+\; x]\,,$$

y nos queda la ecuación

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z \;=\; \frac{1}{2}x\,.$$

La correspondiente ecuación homogénea es

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z\,, \quad \text{o} \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}\,,$$

e integrando se obtiene

$$\ln(z) = 2\ln(x) + \ln(c) \quad \Longrightarrow \quad z = cx^2\,.$$

Haciendo variar la constante y reemplazando en la ecuación completa se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= c'(x)x^2 + c(x)2x = \frac{2}{x}z + \frac{1}{2}x \\ \Longrightarrow \quad c'(x) &= \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x} \\ \Longrightarrow \quad c(x) &= \frac{1}{2}\ln(x) + c\,. \end{aligned}$$

Luego

$$z(x) = (\frac{1}{2}\ln(x) + c)x^2$$

lo que implica

$$y(x) = [z(x)]^2 = (\frac{1}{2}\ln(x) + c)^2 x^4\,.$$

2.9.2 Ecuación de Riccati

Es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)\,.$$

Esta se resuelve si uno conoce una solución particular, digamos $y_1(x)$. Para ello ponemos $y(x) = z(x) + y_1(x)$ y reemplazando se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y - q(x)y^2 + f(x) = \frac{dz}{dx}(x) + \frac{dy_1}{dx}(x)$$

es decir,

$$-p(x)y - q(x)y^2 + f(x) = \frac{dz}{dx} - p(x)y_1(x) - q(x)y_1(x)^2 + f(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = p(x)(y_1 - y) + q(x)(y_1^2 - y^2)$$

es decir,

$$\frac{dz}{dx} = -p(x)z - q(x)(z^2 + 2zy_1)$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = -(p(x) + q(x)y_1(x))z - q(x)z^2$$

que es de Bernoulli con $n = 2$.

Ejemplo 2.9.2 Resolvamos

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}\,.$$

Claramente la función $y_1(x) = \frac{1}{x}$ es solución particular. Poniendo $y(x) = z(x) + \frac{1}{x}$ y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} = z^2 + \frac{2}{x}z + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = z^2 \, .$$

Para resolver esta ecuación de Bernoulli multiplicamos por z^{-2}

$$z^{-2}\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z^{-1} = 1 \, ,$$

y hacemos el cambio de variables $w = z^{-1}$, que implica $\frac{dw}{dx} = -z^{-2}\frac{dz}{dx}$, obteniendo

$$-\frac{dw}{dx} - \frac{2}{x}w = 1 \, .$$

Tenemos así la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{2}{x}w - 1$$

cuya solución general es

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int -e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + c\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\int -x^2 dx + c\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{-x^3}{3} + c\right) \\ &= \frac{-x^3 + 3c}{3x^2} \, . \end{aligned}$$

Luego

$$z(x) = w(x)^{-1} = \frac{3x^2}{c - x^3} \, ,$$

y la solución general de la ecuación inicial es

$$y(x) = \frac{3x^2}{c - x^3} + \frac{1}{x} \, .$$

Observación 2.9.3 Conocida una solución particular $y_1(x)$ de una ecuación de Ricatti el cambio de coordenadas $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ nos lleva directamente a una ecuación lineal.

2.10 Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.10.1 Considere la ecuación diferencial

$$y \;-\; xy' \;=\; a(1+x^2y')\,,\; a>1\,.$$

a) Encuentre la solución general.

b) Encuentre la solución particular que verifica $y(1) \;=\; \frac{a}{a+1}$ ·

c) Encuentre el intervalo máximo donde la solución particular anterior está definida.

Solución. a) Reordenando tenemos

$$y-a \;=\; (ax^2+x)y' \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx} \;=\; \frac{y-a}{x(ax+1)}\;,$$

y separando variables

$$\frac{dy}{y-a} \;=\; \frac{dx}{x(ax+1)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{y-a} \;=\; \frac{dx}{x}-\frac{adx}{ax+1}\;.$$

Luego integrando obtenemos

$$\ln(y-a) \;=\; \ln(x)-\ln(ax+1)+\ln(c)\;,$$

y exponenciando

$$y-a \;=\; \frac{cx}{ax+1}\,.$$

Por lo tanto la solución general es

$$y(x) \;=\; a \;+\; \frac{cx}{ax+1}\,,\; c\in\mathbb{R}\,.$$

b) Imponiendo a la solución general la condición $y(1) \;=\; \frac{a}{a+1}$, obtenemos

$$\frac{a}{a+1} \;=\; a \;+\; \frac{c}{a+1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{a}{a+1} \;=\; \frac{a^2+a+c}{a+1} \quad\Longrightarrow\quad c \;=\; -a^2\,.$$

Luego nuestra solución particular es

$$y(x) \;=\; a \;-\; \frac{a^2x}{ax+1}\,\cdot$$

c) El dominio de la función

$$y(x) \;=\; a \;-\; \frac{a^2x}{ax+1}$$

es la unión de los intervalos abiertos

$$\left]-\infty, -\frac{1}{a}\right[\quad \text{y} \quad \left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[.$$

Como a es positivo, el 1 pertenece al segundo intervalo y luego

$$\left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[,$$

es el intervalo máximo buscado.

Ejercicio 2.10.2 Mostrar que la ecuación diferencial

$$2x^4\, y\, y' \; + \; y^4 \; = \; 4x^6$$

se reduce a una ecuación homogénea mediante la transformación $y = z^n$, para cierto n. Determine el valor de n y resuelva la ecuación.

Solución. Si $y = z^n$ entonces $y' = nz^{n-1}z'$, y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$2x^4 z^n (nz^{n-1}z') \; + \; z^{4n} \; = \; 4x^6 \, ,$$

es decir

$$2nx^4 z^{2n-1} dz \; = \; (4x^6 \; - \; z^{4n}) dx \, .$$

Para que sea homogénea debemos tener $2n - 1 = 2$ y $4n = 6$. Luego $n = \dfrac{3}{2}$ y tenemos la ecuación homogénea

$$(4x^6 \; - \; z^6) dx \; = \; 3x^4 z^2 dz \, .$$

Por lo tanto

$$\frac{dz}{dx} \; = \; \frac{4x^6 - z^6}{3x^4 z^2} \; = \; \frac{1}{3}\left[4\left(\frac{x}{z}\right)^2 \; - \; \left(\frac{z}{x}\right)^4 \right] .$$

Poniendo $z = xu$, tenemos $\dfrac{dz}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$, y reemplazando en la ecuación

$$x\frac{du}{dx} \; = \; -u \; + \; \frac{4}{3}\,\frac{1}{u^2} \; - \; \frac{1}{3}\,u^4 \; = \; \frac{-3u^3 + 4 - u^6}{3u^2} \, .$$

Luego separando variables

$$\frac{3u^2 du}{u^6 + 3u^3 - 4} \; = \; -\frac{dx}{x} \, ,$$

es decir

$$\frac{3u^2\, du}{\left(u^3 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} \; = \; -\frac{dx}{x} \, .$$

Separando en fracciones

$$\frac{1}{5}\left[\frac{3u^2\,du}{u^3+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}} \;-\; \frac{3u^2\,du}{u^3+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\right] \;=\; -\frac{dx}{x}\,,$$

o bien

$$\frac{3u^2\,du}{u^3-1} \;-\; \frac{3u^2\,du}{u^3+4} \;=\; -\frac{5dx}{x}\,.$$

Integrando obtenemos

$$\ln\left(\frac{u^3-1}{u^3+4}\right) \;=\; -5\ln(x) \;+\; \ln(c)\,,$$

y exponenciando

$$\frac{u^3-1}{u^3+4} \;=\; \frac{c}{x^5}\,.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u^3 \;=\; \frac{x^5+4c}{x^5-c} \;\;&\Longrightarrow\;\; u(x) \;=\; \left(\frac{x^5+4c}{x^5-c}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\Longrightarrow\;\; z(x) \;=\; x\left(\frac{x^5+4c}{x^5-c}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &\Longrightarrow\;\; y(x) \;=\; z(x)^{\frac{3}{2}} \;=\; x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^5+4c}{x^5-c}\right)^{\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.10.3 La ecuación

$$(2x^3y \;-\; 2y^3)dy \;=\; (3x^5 \;+\; 3x^2y^2)dx$$

se reduce a una ecuación homogénea haciendo un cambio de coordenadas de la forma $x = u^p$, $y = v^q$, con p, q constantes adecuadas. Encuentre dichas constantes y resuelva la ecuación.

Solución. Tenemos

$$x \;=\; u^p \quad\Longrightarrow\quad dx \;=\; pu^{p-1}du \quad \text{e} \quad y \;=\; v^q \quad\Longrightarrow\quad dy \;=\; qv^{q-1}dv\,.$$

Sustituyendo nos queda

$$(2u^{3p}v^q \;-\; 2v^{3q})qv^{q-1}dv \;=\; (3u^{5p} \;+\; 3u^{2p}v^{2q})pu^{p-1}du\,,$$

es decir

$$2q(u^{3p}v^{2q-1} \;-\; v^{4q-1})dv \;=\; 3p(u^{6p-1} \;+\; u^{3p-1}v^{2q})du\,.$$

Al hacer $2q = 3p$ cada término queda de grado $6p - 1$. Poniendo $6p - 1 = 1$, obtenemos $p = \dfrac{1}{3}$ y $q = \dfrac{1}{2}$, y reemplazando en la ecuación

$$(u - v)\, dv = (u + v)\, du\,.$$

Esta ecuación ya fue resuelta en el Ejemplo 2.6.6, obteniendose la solución implícita

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right) - \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2) = c\,.$$

Luego volviendo a las variables originales, se obtiene que la solución general cumple

$$\arctan\left(\frac{y^2}{x^3}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^6 + y^4) = c\,.$$

Ejercicio 2.10.4 Haciendo los cambios de coordenadas $u = \dfrac{1}{2}x^2$, $v = \dfrac{1}{2}y^2$, resuelva la ecuación

$$(2x^2 + 3y^2 - 7)\, x\, dx - (3x^2 + 2y^2 - 8)\, y\, dy = 0\,.$$

Solución. Tenemos

$$u = \frac{1}{2}x^2 \implies du = x\, dx \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{2}y^2 \implies dv = y\, dy\,.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$(4u + 6v - 7)\, du - (6u + 4v - 8)\, dv = 0\,.$$

Como la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 4u + 6v - 7 &=& 0 \\ 6u + 4v - 8 &=& 0 \end{array}\right\} \quad \text{es} \quad u = 1\,, \quad v = \frac{1}{2}\,,$$

hacemos el cambio de coordenadas

$$u = s + 1\,, \quad v = t + \frac{1}{2}\,,$$

obteniendo la ecuación homogénea

$$(4s + 6t)\, ds - (6s + 4t)\, dt = 0\,.$$

Así

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3s + 2t}{2s + 3t} = \frac{3\,\dfrac{s}{t} + 2}{2\,\dfrac{s}{t} + 3}\,,$$

y poniendo $s = tz$, tenemos $\dfrac{ds}{dt} = z + t\dfrac{dz}{dt}$, y la ecuación

$$z \;+\; t\,\frac{dz}{dt} \;=\; \frac{3\,z \;+\; 2}{2\,z \;+\; 3}\,.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{2z+3}{z^2-1}\,dz \;=\; -\frac{2}{t}\,dt\,,$$

o bien

$$\frac{2z\,dz}{z^2-1} \;+\; \frac{3}{2}\left(\frac{dz}{z-1} \;-\; \frac{dz}{z+1}\right) \;=\; -\frac{2}{t}\,dt\,.$$

Integrando se tiene

$$\ln(z^2-1) \;+\; \frac{3}{2}\,(\ln(z-1) \;-\; \ln(z+1)) \;=\; -2\,\ln(t) \;+\; \ln(c)\,,$$

y exponenciando

$$(z^2-1)\,\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{c}{t^2}\,.$$

Por lo tanto

$$\frac{(z-1)^{\frac{5}{2}}}{(z+1)^{\frac{1}{2}}} \;=\; \frac{c}{t^2}\,.$$

Volviendo a las variables iniciales tenemos

$$\frac{(s-t)^{\frac{5}{2}}}{(s+t)^{\frac{1}{2}}} \;=\; c\,, \quad \frac{\left(u-v-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(u+v-\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \;=\; c\,,$$

y finalmente

$$\frac{(x^2-y^2-1)^{\frac{5}{2}}}{(x^2+y^2-3)^{\frac{1}{2}}} \;=\; c\,.$$

Ejercicio 2.10.5 Encuentre la solución general de la ecuación

$$(x \;-\; 2y \;+\; 4)\,dx \;+\; (2x \;-\; y \;+\; 2)\,dy \;=\; 0\,.$$

Solución. Como la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x \;-\; 2y \;+\; 4 &=& 0 \\ 2x \;-\; y \;+\; 2 &=& 0 \end{array}\right\} \quad \text{es} \quad x \;=\; 0\,, \quad y \;=\; 2\,,$$

para obtener una ecuación homogénea hacemos el cambio de coordenadas

$$x \;=\; u\,, \quad y \;=\; v+2\,.$$

Entonces

$$dx = du, \quad dy = dv,$$

y reemplazando, obtenemos

$$(u - 2v)\,du + (2u - v)\,dv = 0.$$

Para resolver esta ecuación ponemos $v = tu$, y como $dv = t\,du + u\,dt$, reemplazando en la ecuación obtenemos

$$(u - 2t\,u)\,du + (2u - t\,u)\,(t\,du + u\,dt) = 0,$$

es decir

$$(1 - t^2)\,u\,du + (2 - t)\,u^2\,dt = 0.$$

Separando variables se tiene

$$\begin{aligned}\frac{du}{u} &= -\frac{2 - t}{1 - t^2}\,dt\\ &= \frac{-2\,dt}{1-t^2} + \frac{t\,dt}{1-t^2}\\ &= -\frac{dt}{1+t} - \frac{dt}{1-t} + \frac{t\,dt}{1-t^2},\end{aligned}$$

e integrando

$$\begin{aligned}\ln(u) &= \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) - \frac{1}{2}\ln(1-t^2) + \ln(c)\\ &= \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\,\frac{c}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\\ &= \ln\left(c\,\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u = c\,\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pero

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y-2}{x},$$

implica

$$\begin{aligned}x &= \frac{c\,\left(1 - \frac{y-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{y-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{c\,(x-y+2)^{\frac{1}{2}}\,x}{(x+y-2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Luego nuestra solución está dada por

$$\frac{(x+y-2)^{\frac{3}{2}}}{(x-y+2)^{\frac{1}{2}}} \;=\; c\,,$$

o bien elevando al cuadrado

$$\frac{(x+y-2)^{3}}{(x-y+2)} \;=\; \tilde{c}\,.$$

Ejercicio 2.10.6 Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} \;=\; 2\left(\frac{x+y+2}{x+y+1}\right)^2 .$$

Solución. Como el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + 2 &=& 0 \\ x + y + 1 &=& 0 \end{array}\right\}$$

no tiene solución, hacemos la sustitución $x+y=u$. Luego $dx+dy=du$, y reemplazando obtenemos

$$\frac{du-dx}{dx} \;=\; 2\left(\frac{u+2}{u+1}\right)^2 .$$

Separando variables se tiene

$$\begin{aligned} \frac{(u+1)^2}{2(u+2)^2 \;+\; (u+1)^2}\,du &= dx \\ \frac{u^2+2u+1}{3u^2+10u+9}\,du &= dx \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\,\frac{6u+10}{3u^2+10u+9} + \frac{2}{27}\,\frac{1}{\left(u+\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}\right) du &= dx \end{aligned}$$

e integrando

$$\frac{1}{3}\,u \;-\; \frac{2}{9}\,\ln(3u^2+10u+9) \;+\; \frac{\sqrt{2}}{9}\arctan\left(\frac{3u+5}{\sqrt{2}}\right) \;=\; x \;+\; c\,.$$

Luego nuestra solución general satisface

$$\frac{1}{3}\,(x+y) \;-\; \frac{2}{9}\,\ln(3(x+y)^2+10(x+y)+9) \;+\; \frac{\sqrt{2}}{9}\arctan\left(\frac{3(x+y)+5}{\sqrt{2}}\right) \;=\; x \;+\; c\,.$$

Ejercicio 2.10.7 a) Muestre que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^m y^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se transforma en ecuación de variables separadas usando el cambio de variables $y = vx$.
b) Use a) para encontrar la solución de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sec^2\left(\frac{y}{x}\right)}{y^2} \cdot$$

Solución. a) El cambio de variables

$$y = vx \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\,\frac{dv}{dx} \cdot$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$v + x\,\frac{dv}{dx} = v + x^{m+n} v^n f(v)\,,$$

es decir

$$\frac{dv}{v^n f(v)} = x^{m+n-1} dx$$

que es de variables separadas.

b) La ecuación se escribe de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^0 y^{-2} \sec^2\left(\frac{y}{x}\right) \cdot$$

Luego $m = 0, n = -2$ y $f(v) = \sec^2(v)$ y la ecuación queda de la forma

$$\frac{dv}{v^{-2}\sec^2(v)} = x^{-3} dx\,,$$

o bién

$$v^2\cos^2(v)dv = x^{-3}dx\,.$$

Como

$$\int v^2\cos^2(v)dv = \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{4}v^2\mathrm{sen}(2v) + \frac{1}{4}v\cos(2v) - \frac{1}{8}\mathrm{sen}(2v) + c\,,$$

nuestra solución $v = v(x)$ verifica

$$\frac{1}{6}v^3 + \left(\frac{v^2}{4} - \frac{1}{8}\right)\mathrm{sen}(2v) + \frac{v}{4}\cos(2v) = -\frac{x^2}{2} + c\,.$$

Por lo tanto, la solución $y = y(x)$ de nuestra ecuación verifica la ecuación

$$4y^3 + 3x(2y^2 - x^2)\mathrm{sen}\left(\frac{2y}{x}\right) + 6x^2 y\cos\left(\frac{2y}{x}\right) + 12x = cx^3\,.$$

Ejercicio 2.10.8 Encontre la solución particular de la ecuación

$$\left[\frac{\ln(\ln(y))}{x} + \frac{2}{3}xy^3 + 6x\right] dx + \left[\frac{\ln(x)}{y\ln(y)} + x^2y^2 + 4e^{-2y}\right] dy = 0$$

que pasa por el punto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Solución. Sean

$$M(x,y) = \frac{\ln(\ln(y))}{x} + \frac{2}{3}xy^3 + 6x\,, \quad N(x,y) = \frac{\ln(x)}{y\ln(y)} + x^2y^2 + 4e^{-2y}\,.$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{xy\ln(y)} + 2xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,,$$

nuestra ecuación es exacta. Luego para resolverla integramos $M(x,y)$ con respecto a x obteniendo

$$u(x,y) = \ln(\ln(y))\ln(x) + \frac{1}{3}x^2y^3 + 3x^2 + g(y)\,.$$

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\ln(x)}{y\ln(y)} + x^2y^2 + g'(y)\,,$$

e igualando con $N(x,y)$ se obtiene la relación

$$g'(y) = 4e^{-2y}\,.$$

Luego

$$g(y) = -2e^{-2y}\,, \quad \text{y} \quad u(x,y) = \ln(\ln(y))\ln(x) + \frac{1}{3}x^2y^3 + 3x^2 - 2e^{-2y}\,.$$

De esta forma la solución general satisface

$$\ln(\ln(y))\ln(x) + \frac{1}{3}x^2y^3 + 3x^2 - 2e^{-2y} = c\,.$$

Evaluando en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ obtenemos $c = \dfrac{73}{24} - \dfrac{2}{e}$. Por lo tanto la solución buscada $y = y(x)$ verifica la ecuación

$$\ln(\ln(y))\ln(x) + \frac{1}{3}x^2y^3 + 3x^2 - 2e^{-2y} = \frac{73}{24} - \frac{2}{e}\,.$$

Ejercicio 2.10.9 Demuestre que $\mu(x,y) = xy^2$ es factor integrante de la ecuación

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy \quad = \quad 0\,.$$

Use este factor integrante para resolver la ecuación.

Solución. La ecuación multiplicada por $\mu(x,y) = xy^2$ queda

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy \quad = \quad 0\,. \tag{2.37}$$

Si

$$M(x,y) \quad = \quad 2xy^3 - 6x^2y^2 \quad \text{y} \quad N(x,y) \quad = \quad 3x^2y^2 - 4x^3y\,,$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \quad = \quad 6xy^2 - 12x^2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad = \quad 6xy^2 - 12x^2y\,.$$

Así la ecuación (2.37) es exacta y por lo tanto $\mu(x,y) = xy^2$ es factor integrante de la ecuación inicial.
Para resolver la ecuación integramos $M(x,y)$ con respecto a x obteniendo

$$u(x,y) \quad = \quad \int M(x,y)dx \quad = \quad x^2y^3 - 2x^3y^2 + h(y)\,.$$

Para calcular $h(y)$ imponemos la condición

$$\frac{\partial u}{\partial y} \quad = \quad N(x,y)$$

obteniéndose la ecuación

$$3x^2y^2 - 4x^3y + h'(y) \quad = \quad 3x^2y^2 - 4x^3y\,.$$

Luego

$$h'(y) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad h(y) = 0\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$$

y la solución general de nuestra ecuación está dada implicitamente por la ecuación

$$x^2y^3 - 2x^3y^2 \quad = \quad c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 2.10.10 Resuelva el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y^2}{2y}\,, \quad y(0) = 1$$

y determine el intervalo máximo donde está definida la solución.

Solución. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y^2}{2y} \Longleftrightarrow 2ydy = (x+y^2)dx \Longleftrightarrow (x+y^2)dx - 2ydy = 0\,.$$

Pongamos

$$\begin{aligned} M(x,y) &= x+y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \text{y} \\ N(x,y) &= -2y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0\,. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \neq 0$$

y la ecuación no es exacta. Pero como

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -1$$

depende sólo de x, nuestra ecuación admite como factor integrante a la función

$$\mu(x) = e^{\int -1dx} = e^{-x}\,.$$

Multiplicando nuestra ecuación por este factor integrante obtenemos la ecuación diferencial exacta

$$e^{-x}(x+y^2)dx + -2ye^{-x}dy = 0\,.$$

Luego existe función F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-x}(x+y^2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2ye^{-x}\,.$$

Por lo tanto

$$F(x,y) = \int xe^{-x}dx + y^2 \int e^{-x}dx + \phi(y) \Longrightarrow F(x,y) = -xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + \phi(y)\,.$$

Pero

$$-2ye^{-x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 - 0 - 2ye^{-x} + \phi'(y)$$

lo que implica

$$\phi'(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi(y) = c\,,$$

y entonces

$$F(x,y) = -xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + c\,.$$

Finalmente como para $x=0$ debemos tener $y=1$, el valor de nuestra constante c es 2. Luego la solución buscada $y = y(x)$ verifica

$$-xe^{-x} - e^{-x} - y^2e^{-x} + 2 = 0$$

lo que implica

$$y(x)^2 = 2e^x - x - 1\,.$$

Como $y(0) = 1$, nuestra solución es

$$y(x) = \sqrt{2e^x - x - 1}\,.$$

Para determinar el intervalo máximo donde la solución está definida, llamemos $f(x) = 2e^x - x - 1$. Luego $f'(x) = 2e^x - 1$ y $f'(x) = 0 \iff x = -\ln(2)$. Como $f(-\ln(2)) = \ln(2) > 0$ y $f''(x) = 2e^x > 0$, tenemos que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto implica que el intervalo máximo donde la solución está definida es todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.10.11 Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$(y\ln(y) - 2xy)dx \ + \ (x + y^3e^y)dy \ = \ 0\,.$$

Solución. Poniendo

$$M(x,y) = y\ln(y) - 2xy \qquad \text{y} \qquad N(x,y) = x + y^3e^y\,,$$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \ = \ \ln(y) - 2x \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}(x,y) = -\frac{1}{y}\,\cdot$$

Luego tenemos el factor integrante que depende solo de y

$$\mu(x,y) \ = \ e^{-\int \frac{1}{y}dy} \ = \ e^{-ln(y)} \ = \ \frac{1}{y}\,\cdot$$

Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es

$$(\ln(y) - 2x)dx + (\frac{x}{y} + y^2e^y)dy \ = \ 0\,.$$

Entonces

$$u(x,y) \ = \ \int (\ln(y) - 2x)dx \ + \ g(y) \ = \ \ln(y)x - x^2 \ + \ g(y)\,,$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \ = \ \frac{x}{y} \ + \ g'(y)\,.$$

Comparando esto con $\frac{x}{y} + y^2e^y$ obtenemos $g'(y) \ = \ y^2e^y$.
Así

$$\begin{aligned} g(y) \ &= \ \int y^2e^ydy \ = \ y^2e^y \ - \ 2\int ye^ydy \ = \ y^2e^y - 2(ye^y - e^y) \\ &= \ (y^2 - 2y + 2)e^y\,, \end{aligned}$$

y tenemos

$$u(x,y) \;=\; \ln(y)x - x^2 + (y^2 - 2y + 2)e^y\,.$$

Luego nuestra solución general está dada por la ecuación implícita

$$\ln(y)x - x^2 + (y^2 - 2y + 2)e^y \;=\; c\,,\; c \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 2.10.12 Determine las condiciones bajo las cuales la ecuación

$$M(x,y)\,dx \;+\; N(x,y)\,dy \;=\; 0$$

tiene factor integrante de la forma $\mu(x,y) = h(x+y)$.

Solución. Si $\mu(x,y) = h(x+y)$, tenemos

$$\frac{\partial \ln(\mu(x,y))}{\partial x} \;=\; \frac{h'(x+y)}{h(x+y)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \ln(\mu(x,y))}{\partial y} \;=\; \frac{h'(x+y)}{h(x+y)}\,,$$

y la ecuación del factor integrante (2.28) queda de la forma

$$\frac{h'(x+y)}{h(x+y)}[N(x,y) - M(x,y)] \;=\; \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,,$$

lo que implica

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}(x,y) \;=\; \frac{h'(x+y)}{h(x+y)} \;=\; f(x+y)\,.$$

Luego nuestra condición es

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}(x,y) \;=\; f(x+y) \text{ (dependa sólo de } x+y).$$

En este caso el factor integrante es

$$\mu(x,y) \;=\; h(x+y) \quad \text{donde} \quad h(u) \;=\; e^{\int f(u)du}\,.$$

Ejercicio 2.10.13 Use lo anterior para encontrar la solución general de*:*

$$(7x^3 \;+\; 3x^2y \;+\; 4y)\,dx \;+\; (4x^3 \;+\; x \;+\; 5y)\,dy \;=\; 0\,.$$

Solución. Poniendo

$$M(x,y) \;=\; 7x^3 \;+\; 3x^2y \;+\; 4y \qquad \text{y} \qquad N(x,y) \;=\; 4x^3 \;+\; x \;+\; 5y\,,$$

tenemos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M}(x, y) = \frac{3(1 - 3x^2)}{-3x^3 - 3x^2 y + y + x} = \frac{3}{x + y} = f(x + y)\,.$$

Luego

$$f(u) = \frac{3}{u} \quad \Longrightarrow \quad h(u) = e^{\int f(u)du} = u^3\,,$$

y nuestro factor integrante es

$$\mu(x, y) = (x + y)^3\,.$$

Sea entonces

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x, y) = (x + y)^3 M(x, y) &= 7x^6 + 24x^5 y + 30x^4 y^2 + 16x^3 y^3 + \\ &\quad 3x^2 y^4 + 4x^3 y + 12x^2 y^2 + 12xy^3 + 4y^4 \qquad \text{y} \\ \tilde{N}(x, y) = (x + y)^3 N(x, y) &= 4x^6 + 12x^5 y + 12x^4 y^2 + 4x^3 y^3 + \\ &\quad x^4 + 8x^3 y + 18x^2 y^2 + 16xy^3 + 5y^4\,. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u(x, y) = \int \tilde{M}(x, y)dx &= x^7 + 4x^6 y + 6x^5 y^2 + 4x^4 y^3 + x^3 y^4 + \\ &\quad x^4 y + 4x^3 y^2 + 6x^2 y^3 + 4xy^4 + g(y)\,, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 4x^6 + 12x^5 y + 12x^4 y^2 + 4x^3 y^3 + x^4 + 8x^3 y + 18x^2 y^2 + 16xy^3 + g'(y)\,,$$

y comparando con $\tilde{N}(x, y)$ obtenemos

$$g'(y) = 5y^4 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = y^5\,.$$

Por lo tanto

$$u(x, y) = x^7 + 4x^6 y + 6x^5 y^2 + 4x^4 y^3 + x^3 y^4 + x^4 y + 4x^3 y^2 + 6x^2 y^3 + 4xy^4 + y^5\,,$$

y entonces nuestra solución general viene dada en forma implícita por la ecuación

$$x^7 + 4x^6 y + 6x^5 y^2 + 4x^4 y^3 + x^3 y^4 + x^4 y + 4x^3 y^2 + 6x^2 y^3 + 4xy^4 + y^5 = c\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2.10.14 Determine las condiciones bajo las cuales la ecuación

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

tiene factor integrante de la forma $\mu(x, y) = h(xy)$.

Solución. Si $\mu(x,y) = h(xy)$, tenemos

$$\frac{\partial \ln(\mu(x,y))}{\partial x} \;=\; \frac{h'(xy)}{h(xy)} \cdot y \quad \text{y} \quad \frac{\partial \ln(\mu(x,y))}{\partial y} \;=\; \frac{h'(xy)}{h(xy)} \cdot x\,,$$

y la ecuación del factor integrante (2.28) queda de la forma

$$\frac{h'(xy)}{h(xy)}[yN(x,y) - xM(x,y)] \;=\; \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\,,$$

lo que implica

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}(x,y) \;=\; \frac{h'(xy)}{h(xy)} \;=\; f(xy)\,.$$

Luego nuestra condición es

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}(x,y) \;=\; f(xy) \text{ (dependa sólo de } xy).$$

En este caso el factor integrante es

$$\mu(x,y) \;=\; h(xy) \quad \text{donde} \quad h(u) \;=\; e^{\int f(u)du}\,.$$

Ejercicio 2.10.15 Use lo anterior para resolver la ecuación

$$y(x^2y^2+2)dx \;+\; 2x(1-x^2y^2)dy \;=\; 0\,.$$

Solución. Poniendo

$$M(x,y) \;=\; y(x^2y^2+2) \qquad \text{y} \qquad N(x,y) \;=\; 2x(1-x^2y^2)\,,$$

tenemos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} \;-\; \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}(x,y) \;=\; -\frac{3}{xy} \;=\; f(xy)\,.$$

Luego

$$f(u) \;=\; -\frac{3}{u} \quad \Longrightarrow \quad h(u) = e^{\int f(u)du} \;=\; u^{-3}\,,$$

y nuestro factor integrante es

$$\mu(x,y) \;=\; (xy)^{-3}\,.$$

Sea entonces

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x,y) \;&=\; (xy)^{-3}M(x,y) \;=\; x^{-1} + 2x^{-3}y^{-2} \qquad \text{y} \\ \tilde{N}(x,y) \;&=\; (xy)^{-3}N(x,y) \;=\; 2x^{-2}y^{-3} - 2y^{-1}\,. \end{aligned}$$

De esta forma

$$u(x,y) = \int \tilde{M}(x,y)dx = \ln(x) - x^{-2}y^{-2} + g(y)\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2x^{-2}y^{-3} + g'(y)\,,$$

y comparando con $\tilde{N}(x,y)$ obtenemos

$$g'(y) = -2y^{-1} \quad \Longrightarrow \quad g(y) = -2\ln(y)\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,y) = \ln(x) - x^{-2}y^{-2} - 2\ln(y)\,,$$

y entonces nuestra solución general viene dada en forma implícita por la ecuación

$$\ln(x) - x^{-2}y^{-2} - 2\ln(y) = c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 2.10.16 a) Demuestre que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ bajo la condición $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM} = f(x+y^2)$, tiene factor integrante de la forma $\mu(x,y) = h(x+y^2)$.
b) Aplique para encontrar la solución general de

$$(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0\,.$$

Solución. a) La ecuación del factor integrante es

$$N\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial x} - M\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\,.$$

Sea $z = x + y^2$ y pongamos $\mu = \mu(z)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial x} &= \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \\ \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial y} &= \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \cdot 2y\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación del factor integrante obtenemos

$$(N - 2yM)\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\,,$$

o bien

$$\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM}\,.$$

Luego la condición para tener un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = h(x+y^2)$ es que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM} = f(x+y^2)\,.$$

b) Tenemos

$$M(x,y) \;=\; 3x + 2y + y^2\,, \quad N(x,y) \;=\; x + 4xy + 5y^2\,.$$

Por lo tanto

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM} \;=\; \frac{1}{x+y^2}\,,$$

es decir

$$\frac{\partial \ln(\mu)}{\partial z} \;=\; \frac{1}{z}\,,$$

lo que implica

$$\mu(z) \;=\; z \quad \Longrightarrow \quad \mu(x,y) \;=\; x + y^2\,.$$

Nuestra ecuación multiplicada por el factor integrante es

$$(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)dx + (x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)dy \;=\; 0\,.$$

Entonces

$$u(x,y) \;=\; \int (3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)dx \;=\; x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+g(y)\,,$$

lo que implica

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + g'(y)\,.$$

Comparando con la ecuación diferencial obtenemos

$$g'(y) \;=\; 5y^4 \quad \Longrightarrow \quad g(y) \;=\; y^5\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,y) \;=\; x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + +2xy^3 + xy^4 + y^5$$

y nuestra solución general está dada implícitamente por la ecuación

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + +2xy^3 + xy^4 + y^5 \;=\; c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 2.10.17 Resolver la ecuación diferencial

$$(7x^4y - 3y^8)\,dx \;+\; (2x^5 - 9xy^7)\,dy \;=\; 0\,,$$

sabiendo que existe un factor integrante de la forma $x^m y^n$.

Solución. Nuestra ecuación multiplicada por $x^m y^n$ es

$$(7x^{m+4}yn + 1 - 3x^m y^{n+8})\,dx \;+\; (2x^{m+5}y^n - 9x^{m+1}y^{n+7})\,dy \;=\; 0$$

. Poniendo

$$M(x,y) \;=\; 7x^{m+4}yn + 1 - 3x^m y^{n+8} \quad \text{y} \quad N(x,y) \;=\; 2x^{m+5}y^n - 9x^{m+1}y^{n+7}\,,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 7(n+1)x^{m+4}y^n - 3(n+8)x^m y^{n+7} \quad \text{y} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2(m+5)x^{m+4}y^n - 9(m+1)x^m y^{n+7}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación será exacta si

$$\begin{aligned} 7(n+1) &= 2(m+5) \\ 3(n+8) &= 9(m+1)\,, \end{aligned}$$

lo que implica $m = 2$ y $n = 1$.
Luego

$$M(x,y) \;=\; 7x^6y^2 - 3x^2y^9 \quad \text{y} \quad N(x,y) \;=\; 2x^7y - 9x^3y^8\,.$$

Integrando $M(x,y)$ con respecto a x obtenemos

$$u(x,y) \;=\; x^7y^2 - x^3y^9 + h(y)\,.$$

Así

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; 2x^7y - 9x^3y^8 + h'(y)\,,$$

y comparando con $N(x,y)$, concluímos que

$$h'(y) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad h(y) \;=\; 0\,.$$

Por lo tanto la solución general en forma implícita es

$$x^7y^2 - x^3y^9 \;=\; c\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2.10.18 Encuentre la solución general de la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\tan(x)y \;=\; -x sen(x)y^3\,.$$

Solución. Dividiendo por y^{-3} obtenemos

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\tan(x)y^{-2} = -x\text{sen}(x)\,,$$

y nuestro cambio de coordenadas es

$$z = y^{-2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}\,,$$

y por lo tanto

$$y = \frac{1}{\sqrt{z}} \qquad \text{y} \qquad y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}\cdot$$

Reemplazando en nuestra ecuación y multiplicando por -2 tenemos la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} - \tan(x)z = 2x\text{sen}(x)\ .$$

Primero resolvemos la ecuación homogénea

$$\frac{dz}{dx} = \tan(x)z\,.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dz}{z} = \tan(x)dx\ ,$$

e integrando

$$\ln(z) = -\ln(\cos(x)) + \ln(c) = \ln\left(\frac{c}{\cos(x)}\right)\ ,$$

y exponenciando

$$z = \frac{c}{\cos(x)}\cdot$$

Buscamos entonces una solución de la ecuación no homogénea de la forma

$$z(x) = \frac{c(x)}{\cos(x)}\cdot$$

Reemplazando en ella obtenemos la relación

$$\frac{c'(x)}{\cos(x)} = 2x\text{sen}(x) \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = 2x\text{sen}(x)\cos(x) = x\text{sen}(2x)\,,$$

e integrando por partes

$$c(x)=\int x\text{sen}(2x)dx=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{2}\int\cos(2x)dx=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\text{sen}(2x)+c\,.$$

Por lo tanto

$$z(x)=\frac{-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\text{sen}(2x)+c}{\cos(x)}\,,$$

y luego

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{z(x)}}=\sqrt{\frac{\cos(x)}{-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\text{sen}(2x)+c}}\,.$$

Ejercicio 2.10.19 Resolver el problema de valor inicial

$$y'\;=\;\frac{1}{3}[(1\;-\;2t)y^4\;-\;y]\,,\quad y(0)\;=\;1\,.$$

Solución. Esta ecuación es del tipo Bernoulli y la podemos escribir de la forma

$$y'\;+\;\frac{1}{3}y\;=\;\frac{1}{3}(1\;-\;2t)y^4\,,$$

y multiplicando por y^{-4} nos queda

$$y^{-4}y'\;+\;\frac{1}{3}y^{-3}\;=\;\frac{1}{3}(1\;-\;2t)\,.$$

Sea $u\;=\;y^{-3}$. Por lo tanto $u'\;=\;-3y^{-4}y'$ y $y^{-4}y'\;=\;-\frac{1}{3}u'$.

Reemplazando obtenemos

$$-\frac{1}{3}u'\;+\;\frac{1}{3}u\;=\;\frac{1}{3}(1\;-\;2t)\,,$$

o bién

$$u'\;-\;u\;=\;2t\;-\;1\,,\quad u(0)\;=\;1\,.$$

La solución de la correspondiente ecuación homogénea es

$$u_h(t)\;=\;ce^t\,.$$

Usando el método de variación de parámetros, buscamos solución de la ecuación no-homogénea de la forma

$$u(t)\;=\;c(t)e^t\,.$$

Luego debemos tener

$$c'(t)e^t \;=\; 2t \;-\; 1 \quad\Longrightarrow\quad c'(t) \;=\; (2t \;-\; 1)e^{-t}\,.$$

Así

$$c(t) \;=\; \int (2t \;-\; 1)e^{-t}dt \;=\; -(1 \;+\; 2t)e^{-t} \;+\; c_1\,,$$

y por lo tanto

$$u(t) \;=\; -(1 \;+\; 2t) \;+\; c_1 e^t\,.$$

La condición inicial $u(0) \;=\; 1$ implica $c_1 \;=\; 2$. Obtenemos así

$$u(t) \;=\; -(1 \;+\; 2t) \;+\; 2e^t\,,$$

y entonces

$$y(t) \;=\; \left[-(1 \;+\; 2t) \;+\; 2e^t\right]^3\,.$$

Ejercicio 2.10.20 Considere la ecuación diferencial

$$y' \;+\; 2(1-x)\,y \;-\; y^2 \;=\; x(x-2)\,.$$

a) Encuentre solución particular de la forma $y \;=\; A\,x \;+\; B$.

b) Encuentre la solución general.

c) Encuentre la solución particular que pasa por el punto $(2,2)$ y el intervalo máximo donde está definida.

Solución. a) Poniendo $y_1(x) = Ax + B$ tenemos $y_1'(x) = A$ y reemplazando en la ecuación

$$A \;+\; 2(1-x)\,(Ax+B) \;-\; (Ax+B)^2 \;=\; x(x-2)\,,$$

es decir

$$A + 2B - B^2 \;+\; (2A - 2B - 2AB)\,x \;+\; (-2A - A^2)\,x^2 \;=\; -2x \;+\; x^2\,,$$

que implica

$$A \;=\; -1 \quad \text{y} \quad B = 1 \quad\Longrightarrow\quad y_1(x) \;=\; 1 \;-\; x\,.$$

b) Como nuestra ecuación es una ecuación de Ricatti, hacemos la sustitución

$$y \;=\; 1 - x \;+\; \frac{1}{z}\cdot$$

Tenemos

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -1 \;-\; \frac{1}{z^2}\,\frac{dz}{dx}\,,$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$-1 \;-\; \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} \;+\; 2(1-x)\left(1-x+\frac{1}{z}\right) \;-\; \left(1-x\;+\;\frac{1}{z}\right)^2 \;=\; x(x-2)\,,$$

que se reduce a

$$\frac{dz}{dx} \;=\; -1\,.$$

Por lo tanto

$$z(x) \;=\; -x \;+\; c$$

Luego la solución general de nuestra ecuación es

$$y(x) \;=\; 1 \;-\; x \;+\; \frac{1}{c-x}\,.$$

c) Para encontrar la solución que pasa por el punto $(2,2)$ debemos tener

$$2 \;=\; 1 \;-\; 2 \;+\; \frac{1}{c-2} \quad\Longrightarrow\quad c \;=\; \frac{7}{3}\cdot$$

Luego la solución particular buscada es

$$y_2(x) \;=\; 1 \;-\; x \;+\; \frac{3}{7-3x}\,,$$

y como $2 < \dfrac{7}{3}$ el intervalo máximo donde está definida es $\left]-\infty, \dfrac{7}{3}\right[$.

Ejercicio 2.10.21 Para $x > 0$ considere la ecuación de Riccati

$$y' \;+\; e^{-2x}y^2 \;-\; \frac{1}{x}(1+4x+2x^2)y \;=\; -\frac{e^{2x}}{x}(1+x+2x^2+x^3)\cdot$$

a) Encuentre solución particular de la forma $y_1(x) = e^{2x}\,(Ax+B)$.

b) Encuentre su solución general.

Solución. a) Si

$$y(x) \;=\; e^{2x}\,(Ax+B)\,,$$

tenemos

$$\begin{aligned}
y'(x) \;&=\; e^{2x}\,[A+2B \;+\; 2Ax]\,,\\
e^{-2x}\,y(x)^2 \;&=\; e^{2x}\,[B^2 \;+\; 2ABx \;+\; A^2x^2]\,,\\
-\frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,y(x) \;&=\; -\frac{e^{2x}}{x}\,(1+4x+2x^2)\,(Ax+B)\\
&=\; -\frac{e^{2x}}{x}\,[B \;+\; (A+4B)\,x \;+\; (4A+2B)\,x^2 \;+\; 2A\,x^3]\,.
\end{aligned}$$

Luego reemplazando obtenemos

$$-\frac{e^{2x}}{x}\,(1+x+2x^2+x^3) \;=\; -\frac{e^{2x}}{x}\,[B \,+\, 2B\,x \,+\, (2A+2B-2AB)\,x^2 \,+\, (2A-A^2)\,x^3]\,,$$

y por lo tanto

$$B \;=\; 1\,, \quad A \;=\; 1\,.$$

De esta forma la solución particular es

$$y_1(x) \;=\; e^{2x}\,(x+1)\,.$$

b) Como es una ecuación de Riccati hacemos el cambio de coordenadas

$$y \;=\; y_1 \;+\; \frac{1}{v}\,\cdot$$

Entonces

$$\begin{aligned} y'(x) \;&=\; y_1'(x) \;-\; \frac{v'(x)}{v(x)^2}\,,\\ e^{-2x}\,y(x)^2 \;&=\; e^{-2x}\,[y_1(x)^2 \;+\; 2\,\frac{y_1(x)}{v(x)} \;+\; \frac{1}{v(x)^2}]\,,\\ -\frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,y(x) \;&=\; -\frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,[y_1(x) \;+\; \frac{1}{v(x)}]\,, \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\begin{gathered} y_1'(x) \;-\; \frac{v'(x)}{v(x)^2} \;+\; e^{-2x}\,[y_1(x)^2 \;+\; 2\,\frac{y_1(x)}{v(x)} \;+\\ \frac{1}{v(x)^2}] \;-\; \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,[y_1(x) \;+\; \frac{1}{v(x)}] \;=\; f(x)\,, \end{gathered}$$

donde $f(x) \;=\; -\frac{e^{2x}}{x}\,(1+x+2x^2+x^3)$.
Es decir

$$\begin{gathered} y_1'(x) \;+\; e^{-2x}\,y_1(x)^2 \;-\; \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,y_1(x) \;-\\ \frac{v'(x)}{v(x)^2} \;+\; e^{-2x}\,[2\,\frac{y_1(x)}{v(x)} \;+\; \frac{1}{v(x)^2}] \;-\; \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,\frac{1}{v(x)} \;=\; f(x)\,. \end{gathered}$$

Como $y_1(x)$ es solución, la relación anterior se reduce a

$$-\frac{v'(x)}{v(x)^2} \;+\; e^{-2x}\,[2\,\frac{y_1(x)}{v(x)} \;+\; \frac{1}{v(x)^2}] \;-\; \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,\frac{1}{v(x)} \;=\; 0\,.$$

Multiplicando por $v(x)^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} v'(x) &= e^{-2x}\,[2\,y_1(x)\,v(x) \;+\; 1] \;-\; \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\,v(x) \\ &= \left[2\,e^{-2x}\,y_1(x) \;-\; \frac{1}{x}\,(1+4x+2x^2)\right]\,v(x) \;+\; e^{-2x} \\ &= -\frac{1}{x}\,[1+2x]\,v(x) \;+\; e^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Luego tenemos la ecuación lineal

$$v'(x) \;=\; -\frac{1}{x}\,[1+2x]\,v(x) \;+\; e^{-2x}\,,$$

cuya solución es

$$v(x) \;=\; e^{\int a(x)\,dx}\,\left[\int e^{-\int a(x)\,dx}\,e^{-2x}\,dx \;+\; c\right]\,,$$

donde $a(x) \;=\; -\frac{1}{x}\,[1+2x]$.
Como

$$\int a(x)\,dx \;=\; -\int \frac{1}{x}\,[1+2x]\,dx \;=\; -(\ln(x) \;+\; 2x)\,,$$

Tenemos

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{x}\,e^{-2x}\,\left[\int x\,e^{2x}\,e^{-2x} \;+\; c\right] \\ &= \frac{1}{x}\,e^{-2x}\,\left[\frac{x^2}{2} \;+\; c\right]\,. \end{aligned}$$

Luego la solución general de la ecuación original es

$$y(x) \;=\; e^{2x}\,(x+1) \;+\; \frac{2xe^{2x}}{x^2+C}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Capítulo 3

Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

3.1 Familias de Curvas y Trayectorias Ortogonales

Hemos visto que normalmente la solución general de una ecuación diferencial de primer orden es una familia de funciones que contiene una constante arbitraria, llamada *parámetro*. Si la ecuación diferencial verifica nuestro Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 2.4.1), por cada punto del dominio de definición Λ de la ecuación diferencial pasa una única curva solución (máxima). Por lo tanto, las curvas de nuestra familia cubren nuestro dominio Λ y son disjuntas entre sí. Llamaremos en general, **familia a 1-parámetro de curvas** sobre un conjunto Λ del plano, a cualquier familia, que dependa de un parámetro, de curvas que son disjuntas entre sí y que cubren Λ.

Si la familia a 1-parámetro de curvas viene dada implícitamente por la ecuación

$$f(x, y, c) = 0\,, \tag{3.1}$$

en la mayoría de los casos podemos encontrar una ecuación diferencial cuya solución general esté dada por (3.1). Para lograr esto, primero derivamos implícitamente 3.1 respecto de x, obteniendo una relación del tipo

$$g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, c\right) = 0\,. \tag{3.2}$$

Luego, eliminamos el parámetro c (si es posible) usando las ecuaciones 3.1 y 3.2, llegando a una ecuación diferencial de primer orden:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0\,.$$

Ejemplo 3.1.1 Considere la familia de círculos tangentes al eje OY en el origen

$$x^2 + y^2 = 2cx\,,\ c \in \mathbb{R}\,,$$

y encontremos la ecuación diferencial asociada.

Derivando con respecto a x obtenemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2c\,.$$

Pero

$$x^2 + y^2 = 2cx \quad \Longrightarrow \quad 2c = \frac{x^2 + y^2}{x}\,,$$

y reemplazando en la ecuación diferencial tenemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x}\,,$$

o bién

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}\cdot$$

Como aplicación consideremos el problema de hallar trayectorias ortogonales. Diremos que una familia de curvas es una **familia de trayectorias ortogonales** de otra familia de curvas, si toda curva de una de las familias es ortogonal (es decir, perpendicular) a todas las de la otra familia. Por ejemplo, la familia de trayectorias ortogonales de la familia de círculos centrados en el origen $x^2 + y^2 = c^2\,,\ c \in \mathbb{R}$, es la familias de rectas por el origen $y = cx\,,\ c \in \mathbb{R}$.

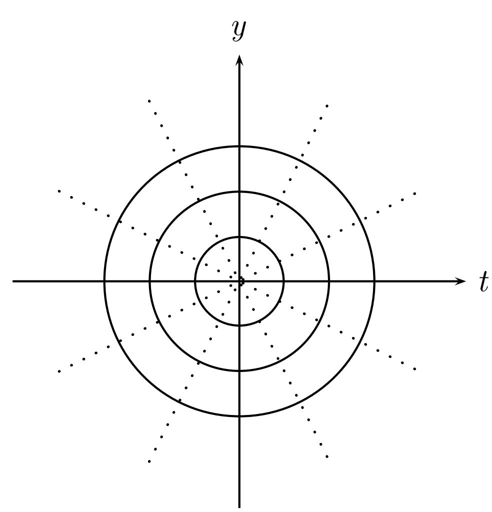


Figura 11

Las correspondientes ecuaciones diferenciales son

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,,$$

respectivamente, y la ortogonalidad de sus curvas solución se refleja en que

$$-\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} \; = \; -1 \, .$$

De hecho, la familia de trayectorias ortogonales de una familia de curvas que es la solución general de la ecuación $y' = f(x, y)$, está dada por la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} \; = \; -\frac{1}{f(x,y)} \, .$$

Ejemplo 3.1.2 Encontremos la familia de trayectorias ortogonales de la familia de círculos tangentes al eje OY en el origen $x^2 + y^2 = 2cx \, , \; c \in \mathbb{R}$, del ejemplo anterior. La ecuación diferencial asociada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \, , \tag{3.3}$$

y luego debemos encontrar la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \, . \tag{3.4}$$

La forma más sencilla de resolver esta ecuación es intercambiando los roles de las variables x e y poniendo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \, .$$

Observe que esta ecuación es la misma ecuación 3.3 con x e y intercambiados. Luego la solución general es la solución general de 3.3 con x e y intercambiados, es decir

$$x^2 + y^2 = 2cy \, , \; c \in \mathbb{R} \, ,$$

que es la familia de círculos tangentes al eje OX en el origen.

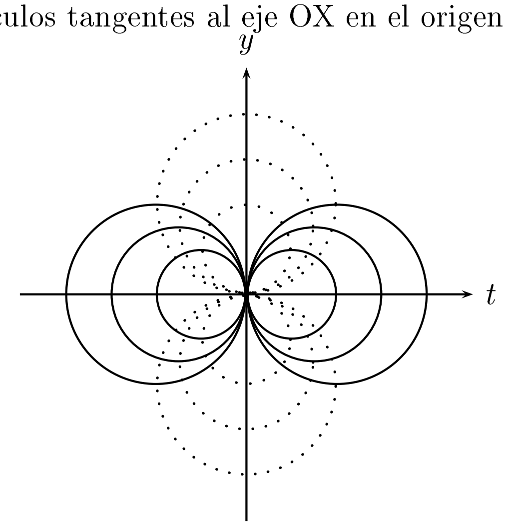


Figura 12

Otra forma de resolver 3.4 es escribiéndola de la forma

$$2xydx \; + \; (y^2 - x^2)dy = 0 \, ,$$

y observando que tiene factor integrante que depende sólo de variable y. En efecto, si

$$M(x,y) = 2xy \qquad \text{y} \qquad N(x,y) = y^2 - x^2\,,$$

entonces

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)(x,y) \;=\; -\frac{2}{y}\,,$$

y el factor integrante es

$$\mu(x,y) \;=\; e^{\int_1^y -\frac{2}{v}dv} \;=\; \frac{1}{y^2}\cdot$$

Multiplicando por el factor integrante obtenemos la ecuación exacta

$$2\frac{x}{y}dx \;+\; \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0\cdot$$

Entonces

$$u(x,y) \;=\; \int 2\frac{x}{y}dx + g(y) \;=\; \frac{x^2}{y} + g(y) \quad \text{y}$$

$$1 - \frac{x^2}{y^2} \;=\; \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \;=\; -\frac{x^2}{y^2} + g'(y)\,.$$

Por lo tanto

$$g'(y) \;=\; 1 \quad \Longrightarrow \quad g(y) \;=\; y\,,$$

y

$$u(x,y) \;=\; \frac{x^2}{y} + y\,.$$

Luego la solución general es

$$\frac{x^2}{y} + y \;=\; 2c\,,$$

o lo que es lo mismo, multiplicando por y

$$x^2 + y^2 \;=\; 2cy\,,\; c \in \mathbb{R}\,.$$

3.2 Reacciones químicas de primer orden y desintegración

En general no es dificil observar en la naturaleza diversas reacciones químicas entre elementos. Por ejemplo, si una moléculas de cierto tipo, por la acción del medio, tienen tendencia a desintegrarse en moléculas más pequeñas a un ritmo que no se ve afectado por la presencia de otras sustancias, es natural pensar que el número de moléculas que se descomponen en una unidad de tiempo sea proporcional al número total presente (reacción química de primer orden).

Supongamos que en $t = 0$ se tienen x_0 gramos. Si denotamos por $x(t)$ el número de gramos presentes en el instante t (luego $x(0) = x_0$), tendremos que $\frac{dx}{dt}$ es el ritmo de crecimiento de x y $-\frac{dx}{dt}$ es el ritmo de decrecimiento. De esta forma si $k > 0$ es la constante de proporcionalidad, tenemos la ecuación

$$-\frac{dx}{dt} = kx\,.$$

Integrando se obtiene

$$\ln(x) - \ln(x_0) \;=\; -kt \quad\Longrightarrow\quad x(t) \;=\; x_0 e^{-kt}\,.$$

Se llama **semi vida** T al tiempo requerido para que la sustancia se reduzca a la mitad. De esta forma

$$\frac{x_0}{2} \;=\; x_0 e^{-kT} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2} \;=\; e^{-kT} \quad\Longrightarrow\quad -\ln(2) \;=\; -kT \quad\Longrightarrow\quad T \;=\; \frac{\ln(2)}{k}\cdot$$

Por lo tanto, si se conocen k o T experimentalmente, por esta relación se conoce la otra cantidad.

Ejemplo 3.2.1 Desintegración radioactiva.

El radio carbono tiene semi vida de más o menos 5.600 años. Este se produce en la alta atmósfera por la acción de rayos cósmicos sobre el nitrógeno. El radio carbono por oxidación pasa a dióxido de carbono y este se mezcla (por el viento) con el dióxido de carbono no radiactivo ya presente.
La proporción en el carbono ordinario ha alcanzado hace tiempo un estado de equilibrio.
Todas las plantas y los animales que comen plantas, incorporan esta proporción de radio carbono en sus tejidos. Mientras el animal o la planta viven, esta proporción permanece constante. Pero al morir deja de absorber radio carbono y el que había en el momento de morir sigue desintegrándose.
Así si un fragmento de madera antigua tiene la mitad de radioactividad que un árbol vivo, éste vivió hace unos 5.600 años ($= T$). Si solo tiene la cuarta parte, determinemos el tiempo $\tilde{t}$ en que vivió. Tenemos entonces

$$\frac{x_0}{4} \;=\; x_0 e^{-k\tilde{t}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{4} \;=\; e^{-k\tilde{t}} \quad\Longrightarrow\quad -\ln(4) \;=\; -k\tilde{t}\,,$$

y luego

$$2\ln(2) \;=\; \frac{\ln(2)}{T}\tilde{t} \quad\Longrightarrow\quad \tilde{t} \;=\; 2T \;=\; 11.200 \quad (\text{años aproximadamente})\,.$$

Esto proporciona un método para poner fecha a cualquier objeto antiguo de origen orgánico: madera, carbón, fibra vegetal, huesos, cuernos o piel.

Ejemplo 3.2.2 Si la vida media de una sustancia reactiva es de 32 dias. Determinemos el tiempo $\tilde{t}$ en que 24 Kilos se convierten en 3 Kilos.

Tenemos

$$x(0) \;=\; 24 \quad \text{y} \quad 32 \;=\; T \;=\; \frac{\ln(2)}{k} \quad \Longrightarrow \quad k \;=\; \frac{\ln(2)}{32}\,.$$

Entonces debemos tener

$$3 \;=\; x(\tilde{t}) \;=\; 24e^{-k\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{8} \;=\; e^{-k\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad k\tilde{t} \;=\; \ln(8)\,,$$

lo que implica

$$\tilde{t} \;=\; \frac{3\ln(2)}{k} \;=\; 3 \cdot 32 \;=\; 96 \quad \text{días}\,.$$

Ejercicios 3.2.3 Resuelva

1.- Si el 25 % de una sustancia radiactiva se desintegra en 100 años. ¿ Cual es la vida media ?

2.- En un proceso con una sustancia radiactiva se hacen dos mediciones. La primera, dos horas después de iniciado el proceso arroja la cantidad de 100 mgr.; la segunda, una hora después, indica la presencia de 8 mgr. ¿ Cual es la cantidad original de sustancia radiactiva ?

3.- Usando carbono 14 (C^{14}) cuya vida media es 5.568 años, determine la edad de un fósil humano que contiene 25,2 mgr. de C^{14}, si la cantidad presente en un ser humano vivo es 53,8 mgr.

Ejemplo 3.2.4 Crecimiento de bacterias.

Sea $N(t)$ la cantidad de bacterias presentes en el instante t. Entonces

$$\frac{dN}{dt} \;=\; \text{Nacimientos} \quad - \quad \text{Muertes} \;=\; a(t)N \;-\; b(t)N\,,$$

donde $a(t)$ (respectivamente, $b(t)$) es la proporción de nacimientos (resp., muertes) con respecto a la cantidad de bacterias presentes en el tiempo t. Entonces, tenemos la ecuación

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} \;=\; a(t) \;-\; b(t)\,, \quad \Longrightarrow \quad N(t) \;=\; N(0)e^{\int_0^t (a(s)-b(s))ds}\,.$$

Por ejemplo si $a(t) = a$ y $b(t) = b$, tenemos $N(t) = N(0)e^{(a-b)t}$.

Ejemplo 3.2.5 Suponga que conoce $N(0)$ y $N(t_1)$. ¿ Cuanto tiempo $\tilde{t}$ debe transcurrir para tener $\bar{N}$ bacterias ?

Llamemos $N_0 = N(0)$ y $N_1 = N(t_1)$. Entonces

$$N(t) \;=\; N_0 e^{(a-b)t}\,, \quad \text{y}$$

$$N_1 \;=\; N(t_1) \;=\; N_0 e^{(a-b)t_1} \quad\Longrightarrow\quad a-b \;=\; \frac{\ln\left(\frac{N_1}{N_0}\right)}{t_1}\,.$$

Por lo tanto

$$\bar{N} \;=\; N(\tilde{t}) \;=\; N_0 e^{(a-b)\tilde{t}} \quad\Longrightarrow\quad \tilde{t} \;=\; \frac{\ln\left(\frac{\bar{N}}{N_0}\right)}{a-b} \;=\; t_1 \frac{\ln\left(\frac{\bar{N}}{N_0}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_0}\right)}\,.$$

Ejemplo 3.2.6 Una superficie electrizada se descarga con una velocidad proporcional a la carga. Hallar la carga en función del tiempo.

Si designamos por $C(t)$ la carga presente en el instante t, nuestra ecuación es nuevamente

$$\frac{dC}{dt} \;=\; -kC\,.$$

Por lo tanto

$$C(t) \;=\; C_0 e^{-kt}\,.$$

Ejemplo 3.2.7 Ley de enfriamiento de Newton.
La velocidad con que se enfría una sustancia en el aire es proporcional a la diferencia de la temperatura de la sustancia y la del aire.

Si designamos por $T_s(t)$ y T_m respectivamente, la temperatura de la sustancia en el instante t y la temperatura (que suponemos constante) del medio (aire) en que se encuentra la sustancia, nuestra ecuación diferencial es

$$\frac{dT_s}{dt} \;=\; -k(T_s(t) - T_m)\,.$$

Separando variables

$$\frac{dT_s}{T_s(t) - T_m} \;=\; -kdt\,,$$

e integrando entre 0 y t

$$\ln\left(\frac{T_s(t) - T_m}{T_s(0) - T_m}\right) \;=\; -kt\,,$$

obtenemos la solución

$$T_s(t) \;=\; T_m + (T_s(0) - T_m)e^{-kt}\,.$$

Por ejemplo, si la temperatura del aire es de 20^0 y la sustancia se enfría de 100^0 a 60^0 en 30 minutos, calculemos en que instante la temperatura de la sustancia será de 40^0.

Tenemos

$$T_s(0) \;=\; 100\,, \quad T_m \;=\; 20\,, \quad T_s(30) \;=\; 60\,.$$

Luego

$$T_s(t) \;=\; 20 \;+\; 80e^{-kt}\,.$$

Evaluando en $t = 30$ obtenemos

$$60 \;=\; 20 \;+\; 80e^{-30k}\,,$$

lo que implica

$$\frac{1}{2} \;=\; e^{-30k} \quad \Longrightarrow \quad -\ln(2) \;=\; -30k \quad \Longrightarrow \quad k \;=\; \frac{\ln(2)}{30}\,.$$

Sea $\tilde{t}$ el tiempo buscado. Entonces

$$40 \;=\; 20 \;+\; 80e^{-\frac{\ln(2)}{30}\,\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4} \;=\; e^{-\frac{\ln(2)}{30}\,\tilde{t}} \quad \Longrightarrow \quad -2\ln(2) \;=\; -\frac{\ln(2)}{30}\,\tilde{t}\,,$$

lo que implica

$$\tilde{t} \;=\; 60\,\text{minutos}\,.$$

3.3 Procesos químicos simples

Suponemos que A y B son compuestos químicos que reaccionan entre ellos de acuerdo a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{A} \;&=\; -k_1 A \;+\; k_2 B \\ \dot{B} \;&=\; k_1 A \;-\; k_2 B\,. \end{aligned}$$

Asumimos $A(0) \;=\; A_0 > 0$, $B(0) \;=\; 0$ y $A(t) \;+\; B(t) \;\equiv\; A_0$ para todo t. Entonces $B(t) \;=\; A_0 \;-\; A(t)$ y nuestra primera ecuación diferencial se transforma en la ecuación lineal de primer orden

$$\dot{A} \;+\; (k_1 \;+\; k_2)A \;=\; k_2 A_0\,.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} A(t) \;&=\; e^{-\int_0^t (k_1+k_2)ds}\left[A_0 \;+\; \int_0^t e^{\int_0^u (k_1+k_2)ds} k_2 A_0 du\right] \\ &=\; e^{-(k_1+k_2)t}\left[A_0 \;+\; k_2 A_0 \int_0^t e^{(k_1+k_2)u} du\right] \\ &=\; e^{-(k_1+k_2)t}\left[A_0 \;+\; \frac{k_2 A_0}{k_1+k_2}\left(e^{(k_1+k_2)t} - 1\right)\right] \\ &=\; A_0\left[1 \;-\; \frac{k_2}{k_1+k_2}\right] e^{-(k_1+k_2)t} \;+\; \frac{k_2 A_0}{k_1+k_2} \\ &=\; \frac{k_1 A_0}{k_1+k_2} e^{-(k_1+k_2)t} \;+\; \frac{k_2 A_0}{k_1+k_2}\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} B(t) &= A_0 - A(t) = A_0 - \frac{k_1 A_0}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)t} - \frac{k_2 A_0}{k_1 + k_2} \\ &= \frac{k_1 A_0}{k_1 + k_2} \left[1 - e^{-(k_1+k_2)t} \right] . \end{aligned}$$

Observe que si ponemos

$$A_e = \lim_{t \to \infty} A(t) = \frac{k_2 A_0}{k_1 + k_2} \quad \text{y} \quad B_e = \lim_{t \to \infty} B(t) = \frac{k_1 A_0}{k_1 + k_2} ,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} A(t) &= B_e e^{-(k_1+k_2)t} + A_e \quad \text{y} \\ B(t) &= B_e \left[1 - e^{-(k_1+k_2)t} \right] . \end{aligned}$$

Observe finalmente que los valores de k_1 y k_2, que en general se obtienen experimentalmente, verifican

$$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{A_0 - A_e}{A(t) - A_e} \right) = k_1 + k_2 = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{B_e}{B_e - B(t)} \right) .$$

3.4 Circuitos eléctricos simples

Sabemos que las leyes de Newton nos permiten establecer relaciones entre las fuerzas que afectan a un sistema mecánico. De manera similar , las leyes de Kirchhoff (1824-1887) nos permiten establecer relaciones entre los elemnetos que proveen y usan energia en un circuito eléctrico.

Un circuito eléctrico es un dispositivo que permite la circulación de un campo eléctrico. Un campo eléctrico es el campo de fuerza asociado a un carga eléctrica. Finalmente, la carga eléctrica es uno de los constituyentes básicos de la materia y se reconocen dos tipos que son arbitrariamente designados como positiva y negativa. El principio general es que cargan iguales se atraen y cargas opuestas se repelen. La velocidad de la carga eléctrica se denomina *corriente*. Esto es: si q es la carga, entonces la corriente es $I = \frac{dq}{dt}$.

En un circuito eléctrico se reconocen elementos activos y pasivos. Elementos activos son baterías, pilas, motores eléctricos. Elementos pasivos son resistores, inductores y capacitores.

Por ejemplo, consideremos un circuito R L C en serie como en la Figura 13.

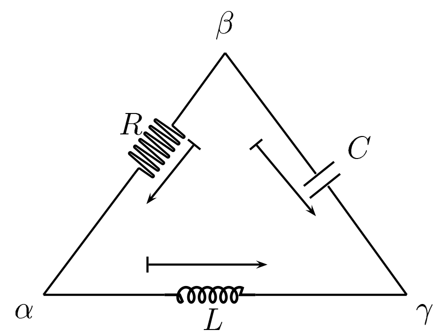


Figura 13

Consta de tres ramas: una resistencia R, un autoinductor L y un capacitor C.
Una rama se puede considerar como un mecanismo eléctrico con dos terminales. Por ejemplo la rama C tiene terminales β y γ. Estos terminales se conectan entre si para formar los nodos α, β, γ.
Por cada rama circula una corriente cuya intensidad se mide por un número real, digamos, i_R, i_L, i_C, donde por ejemplo, i_R es la intensidad a través del resistor.
Las flechas del diagrama que orientan las ramas indican el sentido en que fluye la corriente. Si $i_R > 0$, entonces fluye de β a α.

Ley de Kirchhoff para las intensidades: La suma de las intensidades de corriente que van hacia un nodo es igual a la suma de las que se alejan.

Esto también puede enunciarse como *la cantidad neta de corriente a través de cada nodo es cero.*

En nuestro caso

$$i_R = i_L \, , \; i_L = -i_C \, .$$

El estado del circuito está caracterizado por la intensidad $i = (i_R, i_L, i_C)$ junto con la tensión (voltaje), o bien, las caídas de tensión (caídas de voltaje) en cada rama. Sean estas v_R, v_L, v_C.
Para medir la tensión se coloca un voltímetro en cada uno de los nodos α, β, γ que marca $v(\alpha), v(\beta), v(\gamma)$. Entonces

$$v_R = v(\beta) - v(\alpha) \, , \; v_L = v(\alpha) - v(\gamma) \, , \; v_C = v(\beta) - v(\gamma) \, .$$

Ley de Kirchhoff para las tensiones: $v_R + v_L - v_C = 0$ (en nuestro circuito, Figura 13).

Este es un caso particular de la Ley de Kirchhoff para tensiones que dice que *la caída neta de voltaje en un circuito cerrado es cero.*

Si se considera el circuito

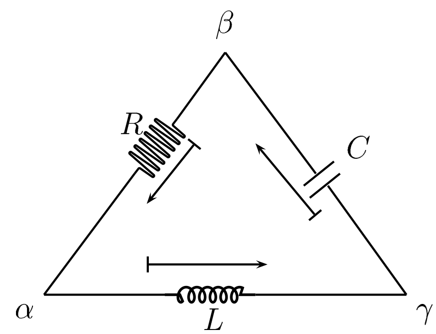


Figura 14

se tiene

$$i_R \;=\; i_L \;=\; i_C \quad \text{y} \quad v_R \;+\; v_L \;+\; v_C \;=\; 0 \;.$$

Ley de Ohm: La caída de voltaje v_R a través de un resistor es proporcional a la corriente I que pasa por el resistor.

$$v_R \;=\; RI \;.$$

Leyes de Faraday y Lenz: La caída de voltaje a través de un inductor es proporcional a la razón de cambio instantáneo de la corriente.

$$v_L \;=\; L\frac{dI}{dt} \;.$$

Si consideramos el circuito

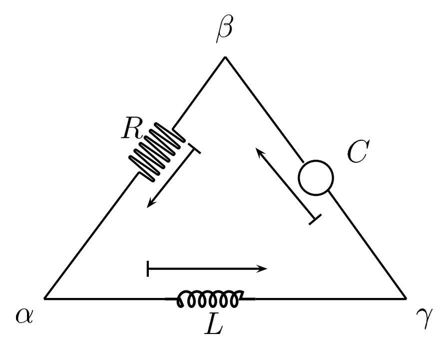


Figura 15

donde $E \;=\; E(t)$ es una fuerza electromotriz que proporciona un voltaje (o energía potencial) al circuito en el instante t.

Ley de conservación de voltajes de Kirchhoff: $v_L \;+\; v_R \;=\; E(t)$.
Obtenemos así la ecuación lineal de primer orden

$$RI \;+\; L\frac{dI}{dt} \;=\; E(t) \;.$$

En el caso en que $E(t) \;=\; E_0$ es constante,

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E_0}{L}$$

cuya solución es

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[I(0) + \frac{E_0}{R}\left(e^{\frac{R}{L}t} - 1\right)\right] .$$

Observaciones 3.4.1 Imponer la condición $I(0) = 0$ quiere decir que en el instante inicial no circula corriente por el circuito. En este caso antes de iniciar el circuito nuestra situación puede ser como la mostrada en la Figura 16.

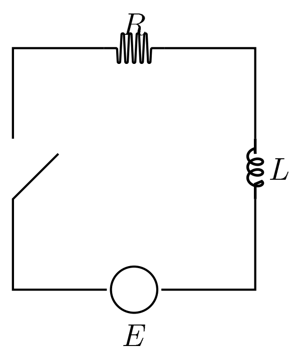
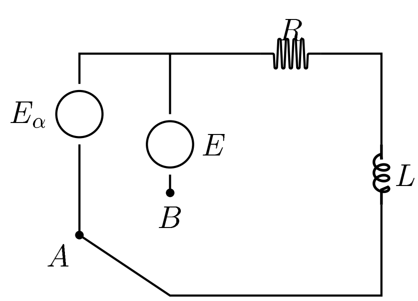


Figura 16

Una condición del tipo $I(0) > 0$ se obtiene cuando existe otra fuerza electromotriz constante E_α que se aplica por un tiempo apropiado para obtener una corriente estacionaria $I(0)$ (Figura 17).
En el instante $t = 0$ el interruptor pasa del punto A al punto B cerrando un circuito propulsado por una fuerza electromotriz E (Figura 18).



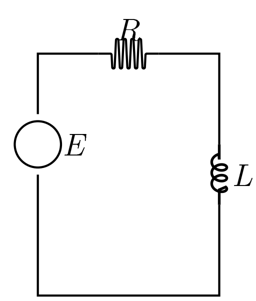


Figura 17 Figura 18

En este caso la ecuación es

$$I' + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} , \quad I(0) = I_0 > 0 .$$

Otra situación se presenta cuando no hay fuerza electromotriz en un circuito R - L. Antes de activarse el circuito podemos tener la situación de la Figura 19.

En el instante $t = 0$ el interruptor pasa del punto A al punto B, cerrándose un circuito que no tiene fuerza electromotriz (Figura 20).

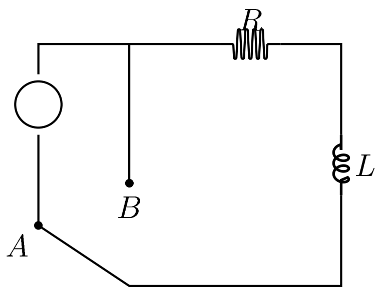


Figura 19

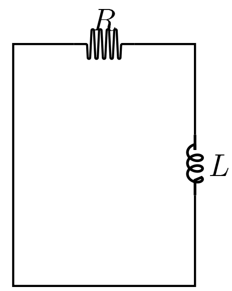


Figura 20

La ecuación es

$$I' + \frac{R}{L} I = 0 \, , \quad I(0) = I_0 > 0 \, ,$$

cuya solución es

$$I(t) = I(0) e^{-\frac{R}{L} t} \, .$$

Observe que el circuito se *descarga* una vez que la fuente de voltaje a sido suprimida.

Frecuentemente $E(t)$ es de la forma

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t) \qquad \text{(fuerza electromotriz alterna)}$$

Se tiene la ecuación

$$I' + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \cos(\omega t) \, ,$$

y suponiendo $I(0) = 0$, se tiene la solución

$$I(t) = \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L} t} \int_0^t e^{\frac{R}{L} u} \cos(\omega u) du \, ,$$

o bien

$$I(t) = \frac{E_0}{\frac{R^2}{L} + \omega^2 L} \left(\frac{R}{L} \cos(\omega t) + \omega \mathrm{sen}(\omega t) \right) - \frac{E_0 R}{R^2 + L^2 \omega^2} \, e^{-\frac{R}{L} t} \, .$$

3.5 Problemas de mezclas

Para la obtención de un remedio, de una pintura, de un trago preparado, en escala .... , es necesario mezclar diversos ingredientes los cuales hacen parte de una solución perfectamemnte homogeneizada (esto es: no importa la muestra, la distribución de ingredientes es siempre la misma). Por ejemplo, consideremos un recipiente de V

litros de capacidad que contiene una solución perfectamente homogeneizada (por ejemplo: agua y sal) como en la Figura 21.

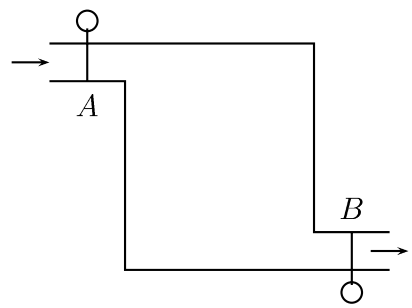


Figura 21

Se accionan simultáneamente las llaves A y B, haciendo ingresar por A agua pura a razón de a lts/min y se extrae solución por B en la misma proporción.
Sea $x(t)$ la cantidad de sal presente en un instante t posterior. Entonces

$$\frac{x(t)}{V} \quad \text{es la cantidad de sal por litro en el recipiente,}$$

y la variación de la cantidad de sal es

$$\dot{x} \;=\; -a\,\frac{x(t)}{V}\;\cdot$$

De esta forma

$$x(t) \;=\; x(0)\; e^{-\frac{a}{V}t}\;.$$

Si en lugar de agua pura entra una solución que contiene c gramos de sal por litro, entonces

$$\dot{x} \;=\; a\cdot c \;-\; a\,\frac{x(t)}{V}\;,$$

es decir

$$\frac{dx}{x - V\cdot c} \;=\; -\frac{a}{V}\,dt \quad\longrightarrow\quad x(t) \;=\; V\cdot c \;+\; (x(0) \;-\; V\cdot c)\, e^{-\frac{a}{V}t}\;.$$

Las múltiples posibilidades que se presentan en los problemas de mezclas se reducen a la ecuación

$$\dot{x} \;= e(t) \;-\; s(t)\;,$$

donde $e(t)$ y $s(t)$, son respectivamente, la cantidad de sal que se añade y se retira en el instante de t.

Ejemplo 3.5.1 Considere el mismo recipiente de la Figura 21 y suponga que de nuevo por la llave A entra agua pura a razón de a lts/min; pero que por la llave B sale solución a razón de b lts/min, con $b > a$.

Tenemos entonces

- $e(t) \;=\; 0$ (no hay entrada de sal).
- $V \;-\; (b-a)\,t$: es la cantidad de líquido presente en el instante t.
- $\frac{x(t)}{V \,-\, (b-a)\,t}$: es la cantidad de sal por litro en el instante t.

Luego

$$s(t) \;=\; \frac{x(t)}{V \;-\; (b-a)\,t}\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot b\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\;,$$

y nuestra ecuación es

$$\frac{dx}{dt} \;=\; -\frac{x\,b}{V \;-\; (b-a)\,t}\;.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dx}{x} \;=\; -\frac{b}{V \;-\; (b-a)\,t}\,dt \quad\Longrightarrow\quad x(t) \;=\; x(0)\left[1 \;-\; \frac{b-a}{V}\,t\right]^{\frac{b}{b-a}}\;.$$

Ejemplo 3.5.2 Suponga la misma situación anterior, pero entrando por A en lugar de agua pura, solución con concentración de c gramos por litro.

Tenemos

$$\begin{aligned} e(t) \;&=\; c\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot a\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\;, \\ s(t) \;&=\; \frac{x}{V \;-\; (b-a)\,t}\,\frac{\text{grs}}{\text{lt}} \cdot b\,\frac{\text{lts}}{\text{min}}\;, \end{aligned}$$

y nuestra ecuación es

$$\frac{dx}{dt} \;=\; c\,a - \frac{x\,b}{V \;-\; (b-a)\,t}\;.$$

Esta es la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dx}{dt} \;+\; \frac{b}{V \;-\; (b-a)\,t}\,x \;=\; c\,a\;,$$

cuya solución es

$$x(t) \;=\; cV\left(1 \;-\; \frac{b-a}{V}\,t\right) \;+\; (x(0) - cV)\left(1 \;-\; \frac{b-a}{V}\,t\right)^{\frac{b}{b-a}}\;.$$

Ejemplo 3.5.3 Consideremos ahora dos tanques como en la Figura 22

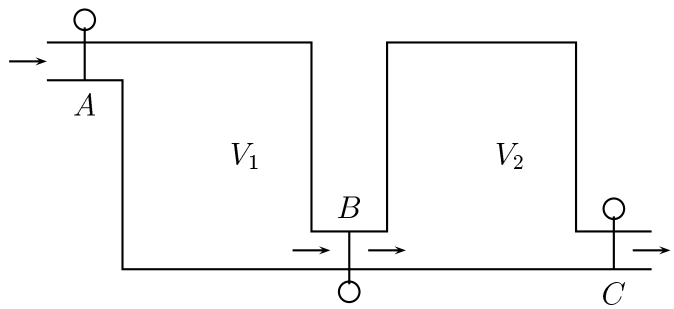


Figura 22

Al primero de V_1 litros de capacidad entra agua pura a través de la llave A a razón de b lts/min. Por la llave B, también a razón de b lts/min sale solución del primer tanque y entra en el segundo. Finalmente del segundo tanque, por la llave C sale solución a razón de b lts/min.
Sea $x_1(t), x_2(t)$ la cantidad de sal en el primer y segundo tanque, respectivamente, en el instante t. Tenemos entonces, en el primer tanque, razón de entrada $e_1(t) = 0$ y razón de salida

$$s_1(t) = \frac{x_1(t)}{V_1} \frac{\text{grs}}{\text{lt}} \, b \, \frac{\text{lts}}{\text{min}} \,.$$

Por otra parte, en el segundo tanque, la razón de entrada $e_2(t)$ es igual a la razón de salida del primer tanque $s_1(t)$. Luego

$$e_2(t) = \frac{x_1(t)}{V_1} \frac{\text{grs}}{\text{lt}} \, b \, \frac{\text{lts}}{\text{min}} \,,$$

y la razón de salida es

$$s_2(t) = \frac{x_2(t)}{V_2} \frac{\text{grs}}{\text{lt}} \, b \, \frac{\text{lts}}{\text{min}} \,.$$

Tenemos así el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -\frac{b}{V_1}\, x_1 \\ \\ \dot{x_2} &= \frac{b}{V_1}\, x_1 - \frac{b}{V_2}\, x_2 \end{cases}$$

Consideremos ahora $b = 2$ lt/min, $V_1 = 1$ lt, $V_2 = 2$ lt y las condiciones iniciales $x_1(0) = 5$ gr y $x_2(0) = 6$ gr y tratemos de determinar cuanto debe funcionar el sistema para que del segundo tanque empiece a salir solución con concentración por debajo de 1 gr/lt.
Con estos valores tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -2\, x_1 \\ \\ \dot{x_2} &= 2\, x_1 - x_2 \end{cases}$$

Resolviendo la primera ecuación obtenemos

$$x_1(t) = 5e^{-2t} \,,$$

y reemplazando en la segunda ecuación tenemos la ecuación lineal

$$\dot{x_2} \; + \; x_2 \; = \; 10e^{-2t} \; .$$

Por lo tanto, usando la Fórmula de Leibniz (2.34),

$$x_2(t) \; = \; e^{-t}\left(\int_0^t e^t 10e^{-2t}dt + 6\right) \quad \Longrightarrow \quad x_2(t) \; = \; 16e^{-t} \; - \; 10e^{-2t} \; .$$

Debemos encontrar $\bar{t}$ tal que

$$\frac{x_2(\bar{t})}{V_2} \; = \; 1 \quad \text{es decir} \quad 16e^{-\bar{t}} \; - \; 10e^{-2\bar{t}} \; = \; 2 \; .$$

Poniendo $u = e^{-\bar{t}}$ y dividiendo por 2 tenemos la ecuación

$$5u^2 - 8u + 1 \; = \; 0 \; ,$$

cuyas soluciones son

$$u_1 \; = \; \frac{4+\sqrt{11}}{5} \sim 1.46 \quad \text{y} \quad u_2 \; = \; \frac{4-\sqrt{11}}{5} \sim 0.1368 \; .$$

Como para t positivo $u = e^{-t} < 1$, tenemos que

$$u_2 = e^{-\bar{t}} \quad \Longrightarrow \quad \bar{t} \sim 1,989 \; .$$

Ejemplo 3.5.4 Queremos inyectar un medicamento en un órgano humano. Supongamos que el volumen de circulación sanguínea del órgano es 150 cm^3 y que se inyectan 1 cm^3/min de agua destilada con 0.3 mgr/cm^3 de concentración de medicamento. La sangre entra al órgano a la misma razón que sale. Si en el instante inicial no hay presencia del medicamento ¿ En qué momento la concentración del medicamento en el órgano será de 0.05 mgr/cm^3?

Si designamos por $x(t)$ la cantidad de medicamento presente en el órgano en el instante t, tenemos $x(0) \; = \; 0$ y nuestra ecuación es

$$\dot{x} \; = \; 0.3 \cdot 1 \; - \; \frac{x}{150} \cdot 1 \; .$$

Tenemos entonces la ecuación lineal

$$\dot{x} \; + \; \frac{x}{150} \; = \; 0.3 \; ,$$

cuya solución es

$$x(t) \; = \; 45 \; - \; 45e^{-\frac{1}{150}t} \; .$$

Queremos encontrar $\bar{t}$ tal que

$$\frac{x(\bar{t}\,)}{150} \;=\; 0.05 \;=\; \frac{5}{100}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(\bar{t}\,) \;=\; \frac{75}{10} \;=\; 7.5 \;&\Longrightarrow\; 45 \;-\; 45e^{-\frac{1}{150}\bar{t}} \;=\; 7.5 \\ &\Longrightarrow\; e^{-\frac{1}{150}\bar{t}} \;=\; \frac{37.5}{45} \\ &\Longrightarrow\; -\frac{1}{150}\bar{t} \;=\; \ln\left(\frac{37.5}{45}\right) \\ &\Longrightarrow\; \bar{t} \;=\; -150\ln\left(\frac{37.5}{45}\right) \text{ min.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.5 Una solución de acido nítrico fluye a razón constante de 6 lts/min. hacia el interior de un gran tanque que inicialmente contiene 200 litros de una solución del mismo ácido al 0.5%. La solución contenida en el tanque se mantiene uniformemente distribuida y sale del tanque a razón de 8 lt/min. Si la solución que entra al tanque es del 20 % de ácido nítrico, determine la cantidad de este ácido presente en el tanque al cabo de t minutos. ¿ En qué momento el % de ácido contenido en el tanque será de 10 % ?

Sea $x(t)$ la cantidad de ácido nítrico presente en el instante t.
Ingresan: 6 lt/min. al 20% , lo cual significa: 1.2 lt/min.

Salen: $\frac{8x}{200-2t}$ lt/min. luego de t minutos.
Luego la ecuación diferencial es

$$\frac{dx}{dt} \;=\; 1.2 \;-\; \frac{4x}{100-t}$$

o bien

$$\frac{dx}{dt} + \frac{4}{100-t}x \;=\; 1.2\,.$$

La ecuación es lineal y su solución general es

$$\begin{aligned} x(t) \;&=\; e^{-4\int \frac{dt}{100-t}}\left[c \;+\; \int 1.2e^{4\int \frac{dt}{100-t}}dt\right] \\ &=\; e^{4\ln(100-t)}\left[c + 1.2\int e^{-4\ln(100-t)}dt\right] \\ &=\; (100-t)^4\left[c + 1.2\int (100-t)^{-4}dt\right] \\ &=\; (100-t)^4\left[c + \frac{1.2}{3}(100-t)^{-3}\right] \\ &=\; c(100-t)^4 + 0.4(100-t)\,. \end{aligned}$$

En $t = 0$ hay 200 lt. al 0.5% . Por lo tanto $x(0) = 1$lt. Así

$$1 = c \cdot 100^4 + 0.4 \cdot 100 \quad \Longrightarrow \quad c \;=\; -39 \cdot 100^{-4}\,.$$

Entonces

$$x(t) \;=\; 0.4(100-t) - 39\left(1 - \frac{t}{100}\right)^4 .$$

Ahora, si $\tilde{t}$ es el instante en que en el estanque hay 10% de ácido, debemos tener

$$100 \cdot \frac{x(\,\tilde{t}\,)}{200 - 2\tilde{t}} \;=\; 10$$

lo que implica

$$5\left[0.4 - 39\left(\frac{100-\tilde{t}}{100}\right)^4 \frac{1}{100-\tilde{t}}\right] \;=\; 1$$

es decir

$$2 - \frac{195}{100^4}(100-\tilde{t}\,)^3 \;=\; 1$$

lo que implica

$$(100-\tilde{t}\,)^3 \;=\; \frac{100^4}{195} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{t} = 19.9573 \text{ min.}$$

3.6 Problemas resueltos

Ejercicio 3.6.1 Dada una curva $y = y(x)$, sea $L_T(x)$ la longitud de la recta tangente entre el punto $P = (x, y(x))$ y su punto de intesección T con el eje OX.

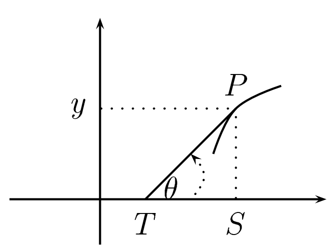


Figura 23

a) Demuestre que

$$L_T(x) \;=\; \frac{y(x)}{y'(x)}\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\cdot$$

b) Si a es una constante no nula, encuentre la ecuación diferencial de la familia de curvas que verifican

$$L_T(x) \;=\; a(y(x))^2\,.$$

c) Demuestre que la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas del item b) está dada por

$$y(x) \;=\; \frac{1}{a}\cosh(ax+b)\,,\; b\in\mathbb{R}\,.$$

Solución. a) Tenemos en el triángulo TSP

$$L_T \;=\; \bar{PT} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\theta) \;=\; \frac{\bar{PS}}{\bar{PT}} \;=\; \frac{y}{L_T}\,\cdot$$

Además

$$y' \;=\; \tan(\theta) \;=\; \operatorname{sen}(\theta)\cdot\sec(\theta) \;=\; \frac{y}{L_T}\cdot\sqrt{1+(y')^2}\,,$$

lo que implica

$$L_T \;=\; \frac{y}{y'}\sqrt{1+(y')^2}\,\cdot$$

b) Tenemos

$$ay^2 \;=\; \frac{y}{y'}\sqrt{1+(y')^2} \quad\Longrightarrow\quad ayy' \;=\; \sqrt{1+(y')^2} \quad\Longrightarrow\quad a^2y^2(y')^2 \;=\; 1+(y')^2\,.$$

Luego

$$(a^2y^2-1)(y')^2 \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{a^2y^2-1}\,y' \;=\; 1\,,$$

y obtenemos la ecuación diferencial

$$y' \;=\; \frac{1}{\sqrt{a^2y^2-1}}\,\cdot$$

c) La ecuación diferencial para las correspondientes trayectoria ortogonales es

$$y' \;=\; -\sqrt{a^2y^2-1}\,\cdot$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2y^2-1}} \;=\; -dx\,,$$

e integrando

$$\frac{1}{a}\ln\left(ay+\sqrt{a^2y^2-1}\right) \;=\; -x-\frac{b}{a}\,\cdot$$

Por lo tanto

$$\ln\left(ay+\sqrt{a^2y^2-1}\right) \;=\; -(ax+b) \quad\Longrightarrow\quad ay+\sqrt{a^2y^2-1} \;=\; e^{-(ax+b)}\,.$$

Esto implica

$$ay \;=\; \frac{e^{ax+b} \;+\; e^{-(ax+b)}}{2}\,,$$

y así

$$y(x) \;=\; \frac{1}{a}\cosh(ax+b)\,,\; b\in\mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 3.6.2 Un profesor redacta las notas del curso con una rapidez proporcional al número de hojas ya escritas. Por otra parte sus alumnos son capaces de leer los apuntes con una velocidad constante. Al comenzar el curso, el profesor entrega 10 hojas a sus alumnos y posteriormente se las va proporcionando a medida que las escribe. Determine el atraso de uno de sus alumnos en la lectura de las notas al finalizar el 3^{er} trimestre si al cabo del primero llevaba un atraso de 20 páginas y al término de 6 meses un atraso de 70 páginas. Considere cada trimestre de tres meses sin receso entre cada uno de ellos.

Solución. Usemos las siguientes variables:

t : tiempo medido en meses.

$H(t)$: número de hojas escrita al cabo de t meses.

$L(t)$: número de hojas leídas al cabo de t meses.

Tenemos entonces los siguientes datos

$$H(0)=10\,,\quad L(0)=0\,,\quad H(1)=L(1)+20\,,\quad H(2)=L(2)+70\,,$$

y las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dH}{dt} \;=\; k\,H\,,\quad \frac{dL}{dt} \;=\; p\,.$$

Sea H el número de hojas (notas) ya escritas. Tenemos entonces

$$\frac{dH}{dt} \;=\; k\,H \quad\Longrightarrow\quad H(t) \;=\; ce^{kt}\,.$$

La condición inicial $H(0) \;=\; 10$ implica $c \;=\; 10$, y por lo tanto

$$H(t) \;=\; 10\,e^{kt}\,.$$

Por otra parte, si L es la variable que indica la lectura de los apuntes, entonces

$$\frac{dL}{dt} \;=\; p \quad\Longrightarrow\quad L(t) \;=\; p\,t \;+\; c_2\,.$$

La correspondiente condición inicial

$$L(0) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad L(t) \;=\; p\,t\,.$$

Además las relaciones

$$\begin{aligned} H(3) \;&=\; L(3) \;+\; 20\,, \\ H(6) \;&=\; L(6) \;+\; 70\,, \end{aligned}$$

implican el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 10\,e^{3k} & = & 3\,p \;+\; 20 \\ 10\,e^{6k} & = & 6\,p \;+\; 70\,. \end{array} \right.$$

Restando la segunda ecuación con dos veces la primera y poniendo $x \;=\; e^{3k}$, se obtiene la ecuación cuadrática

$$10\,x^2 \;-\; 20\,x \;=\; 30\,,$$

cuya solución positiva es $x \;=\; e^{3k} \;=\; 3$. De esta forma

$$k \;=\; \frac{\ln(3)}{3} \quad \text{y} \quad p \;=\; \frac{10}{3}\cdot$$

Así

$$H(t) \;=\; 10\,e^{\left(\frac{\ln(3)}{3}\right)t}\,, \quad L(t) \;=\; \frac{10}{3}\,t\,,$$

y el número de páginas de atraso al cabo de 9 meses es

$$H(9) \;-\; L(9) \;=\; 10\,e^{3\ln(3)} \;-\; 30 \;=\; 270 \;-\; 30 \;=\; 240\,.$$

Ejercicio 3.6.3 Un modelo matemático para describir la población humana es $x'(t) = ax(t) - bx^2(t)$ donde $a = 0,029$ y $b = 2.695 \cdot 10^{-12}$. ¿Cuántos habitantes llegará a tener la Tierra según este modelo? Justifique sus afirmaciones.

Solución. La ecuación es de variables separables y se puede escribir de la forma

$$\frac{dx}{ax - bx^2} \;=\; dt\,,$$

o bien

$$dt = \;\; = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\dfrac{a}{b} - x}\right]\,.$$

Luego integrando obtenemos

$$a\,t \;+\; c \;=\; \ln\left(\frac{x}{\dfrac{a}{b}-x}\right)\,,$$

de donde

$$\frac{bx}{a-bx} \;=\; c\,e^{at} \quad \Longrightarrow x(t) \;=\; \frac{a}{b}\,\frac{ce^{t}}{1+ce^{at}}\,\cdot$$

La cantidad de habitantes que llegará a tener la Tierra se obtiene calculando

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \;=\; \frac{a}{b} \;=\; 1.076\cdot 10^{10}\,.$$

Ejercicio 3.6.4 Un esquiador acuático ubicado en el punto $(a,0)$ es tirado por un bote localizado en el origen y que viaja hacia arriba a lo largo del eje OY. Hallar la trayectoria del esquiador si éste se dirige en todo momento al bote.

Solución. Supongamos que en el instante $t>0$ el bote está en el punto $(0,b)$ y que el esquiador está en el punto (x,y).

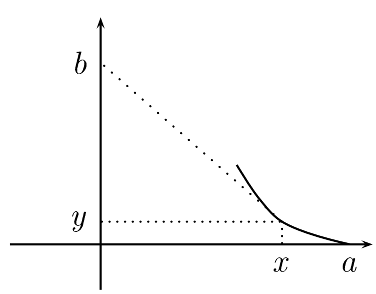


Figura 24

Debemos tener entonces

$$x^2+(y-b)^2 \;=\; a^2 \quad\Longrightarrow\quad |\,y-b\,| = \sqrt{a^2-x^2} \quad\Longrightarrow\quad b-y=\sqrt{a^2-x^2}\,,$$

ya que $b>y$.

Como la curva $y=y(x)$ es decreciente tenemos también

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{b-y}{x} \;=\; -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,\cdot$$

Luego como $y(a)=0$, integrando obtenemos

$$y(x) \;=\; -\int_a^x \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}du\,\cdot$$

Para calcular esta integral ponemos $u = a\cos(t)$, que implica $du = -a\text{sen}(t)$ y $\sqrt{a^2 - u^2} = a\text{sen}(t)$. Así

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^{\arccos\left(\frac{x}{a}\right)} \frac{a^2\text{sen}^2(t)}{a\cos(t)}dt \;=\; a\int_0^{\arccos\left(\frac{x}{a}\right)} (\sec(t) - \cos(t))dt \\
&= a\left[\ln(\sec(t) + \tan(t)) - \text{sen}(t)\right] \Big/_0^{\arccos\left(\frac{x}{a}\right)} \\
&= a\left[\ln\left(\frac{a}{x} + \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{\frac{x}{a}}\right) - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right] \\
&= a\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}\cdot
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.6.5 Considere un tanque que contiene 1.000 litros de agua, dentro del cual una solución salada de salmuera empieza a fluir a una velocidad constante de 6 litros por minuto. La solución dentro del tanque se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior del tanque a una velocidad de 5 litros por minuto. Si la concentración de sal en la salmuera que entra al tanque es de 1 kilógramo por litro, determine cuando será de 63/64 kilógramo por litro la concentración de sal en el tanque.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante t. Entonces la velocidad de entrada de sal al tanque en el instante t es

$$e(t) \;=\; 6\,\frac{\text{lt}}{\text{min}}\cdot 1\,\frac{\text{Kg}}{\text{lt}}\cdot$$

También en el instante t, la cantidad de líquido en el tanque es de

$$V(t) \;=\; 1.000 + (6-5)t\ \text{lt}\,,$$

la concentración es

$$\frac{x(t)}{1.000 + t}\,\frac{\text{Kg}}{\text{lt}}\,,$$

y la velocidad de salida de sal es

$$s(t) \;=\; 5\,\frac{\text{lt}}{\text{min}}\cdot\frac{x(t)}{1.000+t}\,\frac{\text{Kg}}{\text{lt}}\,.$$

Luego nuestra ecuación diferencial es

$$\frac{dx}{dt} \;=\; 6 \;-\; \frac{5x}{1000+t}\,, \quad x(0) = 0\,.$$

Para resolverla, consideramos primero la ecuación homogénea

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{5x}{1000+t},$$

que se puede escribir

$$\frac{dx}{x} = -\frac{5}{1000+t}\,dt\,.$$

La solución de la homogénea es

$$x_h(t) = \frac{c}{(1000+t)^5}\,.$$

Haciendo variar la constante $c = c(t)$ y reemplazando en la no homogénea obtenemos

$$\frac{c'(x)}{(1000+t)^5} = 6 \quad\Longrightarrow\quad c'(x) = 6(1000+t)^5 \quad\Longrightarrow\quad c(t) = (1000+t)^6 + c\,.$$

Por lo tanto

$$x(t) = 1000 + t + \frac{c}{(1000+t)^5}\,.$$

Como $x(0) = 0$, tenemos $c = -1000^6$, y entonces nuestra solución es

$$x(t) = 1000 + t - \frac{1000^6}{(1000+t)^5}\,.$$

Así, la concentración del sal en el estanque en el instante t es

$$\frac{1000 + t - \frac{1000^6}{(1000+t)^5}}{1000+t} = 1 - \frac{1000^6}{(1000+t)^6}\,.$$

Tenemos que encontrar t tal que

$$1 - \frac{1000^6}{(1000+t)^6} = \frac{63}{64}\,.$$

Entonces

$$\frac{1}{64} = \frac{1000^6}{(1000+t)^6} \quad\Longrightarrow\quad (1000+t)^6 = 64\cdot 1000^6 \quad\Longrightarrow\quad 1000 + t = 2000\,,$$

y por lo tanto

$$t = 1000\ \text{min}\,.$$

Ejercicio 3.6.6 El eje OY y la recta $x = c$ son las orillas de un río cuya corriente fluye a velocidad uniforme a en la dirección de y negativa. Una barca entra al río por el punto $(c, 0)$ y se dirige hacia el origen con velocidad b relativa al agua. ¿Qué trayectoria seguirá la barca? Determine condiciones para a y b que permitan a la barca alcanzar la otra orilla. ¿En qué punto tocará tierra?

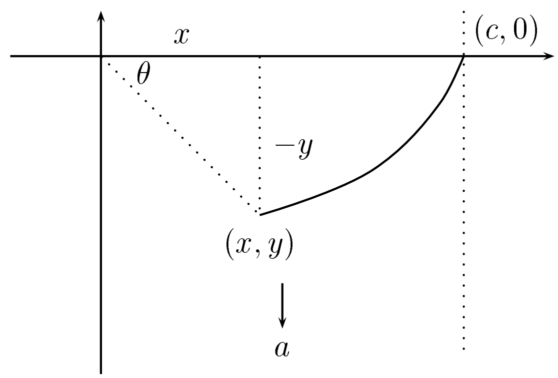


Figura 25

Solución. Las componentes de la velocidad de la barca son

$$\frac{dx}{dt} \;=\; -b\cos(\theta) \qquad \frac{dy}{dt} \;=\; -a + b\mathrm{sen}(\theta)\,,$$

lo que implica

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{-a + b\mathrm{sen}(\theta)}{-b\cos(\theta)} \;=\; \frac{-a + b\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-b\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \;=\; \frac{a\sqrt{x^2+y^2} + by}{bx}\,,$$

que se puede escribir de la forma

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{a}{b}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \;+\; \frac{y}{x}\cdot$$

Haciendo el cambio de variables $z \;=\; \frac{y}{x}$, obtenemos

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx} \;-\; \frac{y}{x^2} \;=\; \frac{1}{x}\,\left(\frac{a}{b}\sqrt{1+z^2} \;+\; z\right) \;-\; \frac{1}{x}\,z\,,$$

es decir la ecuación

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{a}{b}\,\frac{1}{x}\,\sqrt{1+z^2}\,\cdot$$

Separando variables tenemos

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} \;=\; \frac{a}{b}\,\frac{dx}{x}\,,$$

integrando

$$\ln\left(z \,+\, \sqrt{1+z^2}\right) \;=\; \frac{a}{b}\,\ln(x) \,+\, \ln(C)\,,$$

y exponenciando

$$z \,+\, \sqrt{1+z^2} \;=\; C\,x^{\frac{a}{b}}\,.$$

Despejando z obtenemos

$$z \;=\; \frac{1}{2}\left[C\,x^{\frac{a}{b}} \;-\; \frac{1}{C}\,x^{-\frac{a}{b}}\right],$$

lo que implica

$$y(x) \;=\; \frac{1}{2}\,x\,\left[C\,x^{\frac{a}{b}} \;-\; \frac{1}{C}\,x^{-\frac{a}{b}}\right].$$

Imponiendo la condición inicial $y(c) \;=\; 0$, obtenemos

$$C\,c^{\frac{a}{b}} \;=\; \frac{1}{C}\,c^{-\frac{a}{b}} \quad\Longrightarrow\quad C \;=\; c^{-\frac{a}{b}}\,,$$

y por lo tanto

$$y(x) \;=\; \frac{c}{2}\,\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{1+\frac{a}{b}} \;-\; \left(\frac{x}{c}\right)^{1-\frac{a}{b}}\right].$$

Observemos que la barca llegará a la otra orilla del río solo si $y(x)$ está definido en $x=0$. Para que esto ocurra debemos tener $1-\frac{a}{b}\geq 0$, es decir $b\geq a$.

Para $b>a$ tenemos $y(0)=0$, y luego la barca llega a la otra orilla en el punto $(0,0)$. Pero si $b=a$, tenemos

$$y(x) \;=\; \frac{c}{2}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{2} \;-\; 1\right],$$

y por lo tanto la barca llega al otro lado en el punto $(0,-\frac{c}{2})$.

Ejercicio 3.6.7 Una fábrica de papel está situada cerca de un río con un fluido constante de 1000 m^3/seg, el cual va a dar a la única entrada de un lago de volumen 10^9 m^3. Suponga que en el instante $t=0$, la fábrica de papel comienza a bombear contaminantes en el río a razón de 1 m^3/seg y que la entrada y salida de agua del lago son constantes e iguales. ¿Cuál será la concentración de contaminantes en el lago en cualquier tiempo t?

Solución. Tenemos $V\;=\;10^9$, velocidad de entrada y salida de agua del lago es $a=b=1001$, y la concentración de contaminantes en el agua que entra al lago es $c=1/1001$. Luego nuestra ecuación diferencial es

$$\dot{x} \;=\; \frac{1001}{1001} \;-\; \frac{x}{10^9}\,1001\,,$$

o bién

$$\dot{x} \;+\; \frac{1001\,x}{10^9} \;=\; 1\,\cdot$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) \;=\; c\,e^{-\frac{1001}{10^9}\,t}\,.$$

Usando el método de variación de parámetros, buscamos una solución de la ecuación no-homogénea de la forma

$$x(t) \;=\; c(t)\,e^{-\frac{1001}{10^9}\,t}\,.$$

Entonces debemos tener

$$c'(t)\,e^{-\frac{1001}{10^9}\,t} \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad c'(t) \;=\; e^{\frac{1001}{10^9}\,t} \quad\Longrightarrow\quad c(t) \;=\; \frac{10^9}{1001}\,e^{\frac{1001}{10^9}\,t} \;+\; c\,,$$

y luego

$$x(t) \;=\; \frac{10^9}{1001} \;+\; c\,e^{-\frac{1001}{10^9}\,t}\,.$$

Pero

$$0 \;=\; x(0) \;=\; \frac{10^9}{1001} \;+\; c \quad\Longrightarrow\quad c \;=\; -\frac{10^9}{1001}\,,$$

y por lo tanto

$$x(t) \;=\; \frac{10^9}{1001}\,\left(1 \;-\; e^{-\frac{1001}{10^9}\,t}\right)\,.$$

De esta forma la concentración de contaminantes en el lago en el tiempo t es

$$\frac{x(t)}{V} \;=\; \frac{1}{1001}\,\left(1 \;-\; e^{-\frac{1001}{10^9}\,t}\right)\,.$$

Ejercicio 3.6.8 Se ha determinado experimentalmente que la variación de peso de un tipo de pez varia según la ley

$$\frac{dp}{dt} \;=\; \alpha\,p^{2/3} \;-\; \beta\,p\,,$$

donde $p \;=\; p(t)$ representa el peso del pez y α, β son constantes positivas que caracterizan la especie. ¿Para qué valor del tiempo t le parece razonable autorizar la captura de peces de esta especie?

Solución. Como la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} \;+\; \beta\,p \;=\; \alpha\,p^{2/3}$$

es del tipo Bernoulli, hacemos el cambio de variables

$$u \;=\; p^{\frac{1}{3}} \quad \text{que implica} \quad \frac{du}{dt} \;=\; \frac{1}{3}\,p^{-\frac{2}{3}}\,\frac{dp}{dt}\,.$$

Sustituyendo obtenemos la ecuación lineal

$$3\,\frac{du}{dt} \;+\; \beta\,u \;=\; \alpha\,.$$

La solución es

$$u(t) \;=\; e^{-\int \frac{\beta}{3}dt}\left[c \;+\; \frac{\alpha}{3}\int e^{\frac{\beta}{3}t}\,dt\right]\,,$$

es decir

$$u(t) \;=\; \frac{\alpha}{\beta} \;+\; c\,e^{-\frac{\beta}{3}t}\,.$$

Por lo tanto

$$p(t) \;=\; \left(\frac{\alpha}{\beta} \;+\; c\,e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^{3}\,.$$

En el instante de nacer tenemos $p(0) \;=\; 0$. Luego $c \;=\; -\dfrac{\alpha}{\beta}$ y

$$p(t) \;=\; \left[\frac{\alpha}{\beta}\left(1 \;-\; e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)\right]^{3}\,.$$

Como esta función es creciente, el mayor peso es

$$p_{\infty} \;=\; \lim_{t\to\infty} p(t) \;=\; \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{3}\,,$$

y un tiempo razonable para autorizar la captura será, por ejemplo, aquél para el cual $p(t) \;\geq\; \dfrac{3}{4}\,p_{\infty}$, esto es

Ejercicio 3.6.9 En el interior de una casa, y en un cierto instante, el termómetro marca 70^o F. El termómetro se traslada al exterior de la casa, donde la temperatura del aire es de 10^o F. Tres minutos después el termómetro marca 25^o F. Determine la ecuación que permite conocer la temperatura del termómetro en el exterior de la casa en cualquier instante t.

Solución. Según la Ley de enfriamiento de Newton, la ecuación diferencial es

$$\frac{dT}{dt} \;=\; -k\,(T \;-\; 10)\,,$$

y tenemos los datos

$$T(0) \;=\; 70\,, \quad T(3) \;=\; 25\,.$$

Separando variables obtenemos

$$\frac{dT}{T-10} = -k\,dt \implies \ln(T - 10) = -k\,t + c \implies T(t) = 10 + c\,e^{-kt}.$$

La condición

$$T(0) = 70 \implies c = 60 \implies T(t) = 10 + 60\,e^{-kt}.$$

La otra condición

$$T(3) = 25 \implies 25 = 10 + 60\,e^{-3k} \implies e^{-3k} = \frac{1}{4} \implies k = \frac{1}{3}\ln(4).$$

Por lo tanto

$$T(t) = 10 + 60\left[\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right]^{t}.$$

Ejercicio 3.6.10 Una barra de largo L, sección transversal A y densidad (masa por unidad de volumen) ρ_0 se sumerge en un líquido de densidad ρ. Recuerde que según el principio de Arquímides: *el líquido ejerce sobre el cuerpo que se sumerje una fuerza opuesta que es igual al peso del fluido desplazado por el objeto.* Si x denota la parte de la barra sumergida, considerando una velocidad inicial v_0,

a) Obtenga la ecuación diferencial que describe al movimiento.

b) ¿ Hasta que profundidad desciende la barra?

c) Si $v_0 = 0$ ¿ cual es la condición para que la barra descienda completamente? ¿ Cual es la velocidad máxima de descenso?

Solución. a) Sea $m = L \cdot A \cdot \rho_0$ la masa de la barra y sea $t = 0$ el instante en que se comienza a sumergir la barra. Las fuerzas que actuan sobre el objeto son la fuerrza gravitacional $m\,g$ y la fuerza F_0 dada por el principio de Arquímides. Como $x(t)$ denota la longitud de la parte sumergida en el instante t y el peso del fluido por unidad de volumen es ρg, el peso del fluido desplazado en el instante t es $A\,x(t)\,\rho\,g$ y por lo tanto $F_0 = -A\,\rho\,g\,x(t)$. Entonces aplicando la Segunda Ley de Newton

$$m \cdot x'' = \text{suma de las fuerzas que actuan sobre el objeto}$$

se tiene la ecuación

$$m \cdot x'' = m\,g - A\,\rho\,g\,x(t).$$

b) Haciendo $v = x'$, en las variables v y x la ecuación anterior queda

$$v\,\frac{dv}{dx} = g - \frac{A\,\rho\,g\,x}{m}\cdot$$

Separando variables obtenemos

$$v\,dv \;=\; \left(g \;-\; \frac{A\,\rho\,g\,x}{m}\right)\,dx\,,$$

e integrando

$$\frac{1}{2}\,v^2 \;=\; g\,x \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{A\,\rho\,g}{m}\,x^2 \;+\; k\,.$$

Como en $t = 0$ tenemos $x = 0$ y $v = v_0$, se tiene

$$k \;=\; \frac{1}{2}\,v_0^2\,,$$

y así

$$v^2 \;=\; 2\,g\,x \;-\; \frac{A\,\rho\,g}{m}\,x^2 \;+\; v_0^2\,.$$

Poniendo el valor de m, se reduce a

$$v^2 \;=\; 2\,g\,x \;-\; \frac{\rho\,g}{\rho_0\,L}\,x^2 \;+\; v_0^2\,.$$

La barra desciende hasta $v = 0$. Luego, para determinar hasta donde desciende la barra debemos resolver la ecuación cuadrática

$$\frac{\rho\,g}{\rho_0\,L}\,x^2 \;-\; 2\,g\,x \;-\; v_0^2 \;=\; 0\,,$$

cuyas soluciones son

$$x \;=\; \frac{\rho_0\,L}{\rho\,g}\,\left[g \;\pm\; \sqrt{g^2 \;+\; \frac{\rho\,g}{\rho_0\,L}\,v_0^2}\,\right]\,.$$

Luego la barra desciende hasta

$$x \;=\; \frac{\rho_0\,L}{\rho\,g}\,\left[g \;+\; \sqrt{g^2 \;+\; \frac{\rho\,g}{\rho_0\,L}\,v_0^2}\,\right]\,.$$

c) Si $v_0 = 0$, la barra desciende hasta

$$x \;=\; 2\,\frac{\rho_0\,L}{\rho}\,,$$

y luego la barra desciende completamente en este caso si

$$2\,\frac{\rho_0\,L}{\rho} \geq L \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_0 \geq \frac{\rho}{2}\,.$$

La velocidad máxima de descenso se obtiene cuando $\frac{dv}{dx} \;=\; 0$. Como

$$x'' \;=\; \frac{dv}{dt} \;=\; \frac{dv}{dx}\,v\,,$$

tenemos
$$\frac{dv}{dx} \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad x'' \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad m\,g \;-\; A\,\rho\,g\,x \;=\; 0\,.$$
De esta forma la velocidad máxima de descenso se obtiene cuando
$$x \;=\; \frac{m}{A\,\rho} \;=\; \frac{L\,\rho_0}{\rho}\,.$$

Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

4.1 Teorema de Existencia y Unicidad

Como hemos visto una ecuación de segundo orden es de la forma

$$F(x, y, y', y'') = 0\,. \tag{4.1}$$

Bajo condiciones bastante generales sobre la función F, la ecuación (4.1) se puede escribir de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})\,. \tag{4.2}$$

Como en el caso de las ecuaciones de primer orden, para éste tipo de ecuaciones también tenemos un teorema de existencia y unicidad de soluciones. Antes de enunciarlo, y a manera de ejemplo de lo que sucede en situaciones muy generales, analicemos la ecuación

$$y'' \;=\; x^2 \;+\; \mathrm{sen}(x)\,.$$

Integrando sucesivamente obtenemos

$$\begin{aligned} y'(x) \;&=\; \int_{x_0}^{x} (s^2 + \mathrm{sen}(s))ds \;=\; \frac{x^3}{3} \;-\; \cos(x) \;+\; c_1\,, \\ y(x) \;&=\; \int_{x_0}^{x} (\frac{s^3}{3} - \cos(s) + c_1)ds \;=\; \frac{x^4}{12} \;-\; \mathrm{sen}(x) \;+\; c_1x \;+\; c_2\,. \end{aligned}$$

Como ahora la solución general depende de dos constante arbitrarias, al imponer la condición inicial $y(0) = 1$, por ejemplo, obtenemos como única condición $c_2 = 1$. De esta forma, la familia de funciones que depende de la constante c_1

$$y(x) \;=\; \frac{x^4}{12} \;-\; \mathrm{sen}(x) \;+\; c_1x \;+\; 1\,,$$

es solución del problema

$$\begin{cases} y'' & = & x^2 \, + \, \operatorname{sen}(x) \\ y(0) & = & 1\,. \end{cases}$$

Para fijar la constante c_1 necesitamos una condición adicional, que puede ser el valor de la solución en otro punto (problema de frontera) o bién, el valor de la primera derivada en el mismo punto (problema de valores iniciales). Observe que en el caso de problemas de frontera, estamos pidiendo que la solución pase por dos puntos distintos prefijados. Veremos más adelante, que en muchos caso no existe tal solución. Para el problema de valores iniciales se pide que la solución pase por un punto dado y que la pendiente de la solución en dicho punto asuma también un valor dado. A este último tipo de problemas se refiere el siguiente teorema.

Recordemos primero que un subconjunto D del espacio es *abierto* si todo punto de D es el centro de un rectángulo que está contenido en D. Más precisamente, D es abierto si para todo punto (x_0, y_0, z_0) en D, existen números positivos a, b y c tales que cualquier punto (x, y, z) que satisface $\mid x - x_0 \mid < a$, $\mid y - y_0 \mid < b$, $\mid z - z_0 \mid < c$ también pertenece a D.

Teorema 4.1.1 *Sea D un conjunto abierto del espacio (x, y, z) y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Suponga además que f tiene derivada parcial con respecto a y y con respecto a z, en todo punto de D y que $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ son continuas sobre D. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto de D. Entonces la ecuación diferencial $d^2y/dx^2 = f(x, y, y')$ tiene una solución u definida en un intervalo alrededor de x_0 que verifica $u(x_0) = y_0$ y $u'(x_0) = z_0$. Más aun, si v es una solución definida en el mismo intervalo que u, y se tiene $v(t_0) = y_0$ y $v'(x_0) = z_0$ entonces $v = u$.*

De esta forma, bajo las condiciones del teorema, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' & = & f(x, y, y') \\ y(x_0) & = & y_0\,, \quad y'(x_0) \; = \; z_0\,, \end{cases}$$

tiene una única solución máxima. Es decir, tiene una única solución que no admite continuación. La definición de continuación de una solución y de solución máxima para este tipo de ecuaciones, es similar a la dada para ecuaciones de primer orden dada en los párrafos siguientes al Teorema (2.4.1).

Como la prueba del correspondiente teorema para ecuaciones de primer orden, la demostración de este teorema escapa a la intencionalidad de este libro. Sin embargo, acotemos que, introduciendo la variable auxiliar $v = dy/dx$, nuestro problema de valores iniciales se reduce a

$$\begin{cases} w' & = & (v, f(x, w)) \\ w(0) & = & w_0\,. \end{cases}$$

donde $w = (y, v)$ y $w_0 = (y_0, z_0)$. De modo que este teorema se reduce al teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones de primer orden pero en dimensiones mayores.

4.2 Casos simples de reducción de orden

1. Para f continua sobre un intervalo I considere la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)\,.$$

Un ejemplo de este tipo de ecuación fue dado en la sección anterior. Como en dicho ejemplo, integrando una vez obtenemos la ecuación de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x} f(u)du + c_1 = f_1(x) + c_1\,,$$

donde x_0 es un punto en I. Volviendo a integrar obtenemos la solución general:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f_1(u)du + c_2 x + c_1\,,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 4.2.1 Considere para $x \notin \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2(x)\,.$$

Queremos encontrar la solución general, las soluciones particulares que verifican $y(\pi) = 1$ y las soluciones particulares que verifican $y(\pi) = 1$ y $y'(\pi) = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea I_n el intervalo abierto $\left]\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$. Observe que cuando $\mid n \mid$ es par (resp. es impar) se tiene que $\cos(x) > 0$ (resp. $\cos(x) < 0$) para todo $x \in I_n$.
Una primera integración nos da

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x) + c_1$$

y una segunda

$$y(x) = \ln\left(\frac{1}{\mid \cos(x) \mid}\right) + c_1 x + c_2\,.$$

Luego la solución general es

$$y_n(x) = \ln\left(\frac{1}{\mid \cos(x) \mid}\right) + c_1 x + c_2\,, \quad x \in I_n\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Las soluciones que verifican $y(\pi) = 1$ estan definidas en $I_1 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Debemos resolver la ecuación

$$1 = y(\pi) = c_1\pi + c_2\,,$$

lo que nos da $c_2 = 1 - c_1\pi$. Luego las soluciones que verifican $y(\pi) = 1$ son

$$y_c(x) = \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + c(x-\pi) + 1\,, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,.$$

Si queremos además que verifiquen $y'(\pi) = 0$, como

$$y'(x) = \tan(x) + c_1$$

debemos resolver la ecuación

$$0 = y'(\pi) = c_1\,.$$

Luego la solución es única y está dada por

$$y(x) = \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + 1\,, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,.$$

2. Ecuaciones del tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$$

con f continua sobre un conjunto abierto Λ del plano.

En este caso introducimos la variable $p = \frac{dy}{dx}$, de donde se obtiene $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$. Entonces sustituyendo tenemos

$$\frac{dp}{dx} = f(x,p)$$

que es una ecuación de primer orden.

Ejemplo 4.2.2 Resolvamos la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} \;+\; 2\frac{dy}{dx} \;=\; x\,.$$

Sea $p = \frac{dy}{dx}$. Entonces tenemos $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ y la ecuación de primer orden

$$x\frac{dp}{dx} \;+\; 2p \;=\; x\,.$$

Esta es equivalente a la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dp}{dx} \;+\; \frac{2}{x}p \;=\; 1\,,$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}
p(x) &= e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[c_1 + \int e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right]\\
p(x) &= e^{-2\ln(x)}\left[c_1 + \int e^{2\ln(x)}dx\right]\\
p(x) &= \frac{1}{x^2}\left[c_1 + \int x^2 dx\right]\\
p(x) &= \frac{1}{x^2}\left[c_1 + \frac{x^3}{3}\right].
\end{aligned}$$

Pero $p = \frac{dy}{dx}$ implica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{x^2} + \frac{x}{3}.$$

Finalmente integrando obtenemos

$$y(x) = -\frac{c_1}{x} + \frac{x^2}{6} + c_2\,,$$

que es la solución general.

3. Ecuaciones del tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx})$$

con f continua sobre un sobre un subconjunto abierto Λ del plano.

También en este caso introducimos la variable $p = \frac{dy}{dx}$, obteniéndose

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

y la ecuación se reduce a

$$\frac{dp}{dy}\,p = f(y,p)\,, \quad \text{o bién} \quad \frac{dp}{dy} = \frac{1}{p}\,f(y,p)$$

que es de primer orden.

Ejemplo 4.2.3 Encontremos la solución general de la ecuación

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 = 0\,.$$

Poniendo $p = \frac{dy}{dx}$, tenemos $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\, p$ y la ecuación queda

$$y\, p\, \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

Dividiendo por p, la ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

cuya solución es

$$p(y) = c_1\, y\,.$$

Volviendo a las variables y y x tenemos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = c_1\, y \quad \text{que es equivalente a} \quad \frac{dy}{y} = c_1\, dx\,.$$

Integrando obtenemos

$$\ln(y) = c_1\, x + \ln(c_2)$$

y exponenciando

$$y(x) = c_2\, e^{c_1\, x}\,.$$

4. Ecuaciones del tipo

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

donde $F(x, y, y', y'')$ es la diferencial total de una función $\psi(x, y, y')$.

En este caso nuestra ecuación es

$$d\psi = 0$$

y por lo tanto sus soluciones son las soluciones de la ecuación de primer orden

$$\psi(x, y, y') = c$$

donde c es una constante arbitraria.

Ejemplo 4.2.4 Encontremos la solución general de

$$yy'' + (y')^2 = 0\,.$$

La ecuación se puede escribir como

$$d(yy') = 0 \quad \text{lo que implica} \quad yy' = c_1\,,$$

o lo que es lo mismo

$$ydy = c_1 dx \quad \text{cuya solución es} \quad y^2 = c_1 x + c_2\,.$$

5. Ecuaciones del tipo
$$F(x,y,y',y'')=0$$
tales que existe función $\mu(x,y,y')$ de modo que $\mu(x,y,y')F(x,y,y',y'')$ es la diferencial total de una función $\psi(x,y,y')$.

Como en el caso anterior, resolvemos $\psi(x,y,y')=c$. Entonces cada solución de esta ecuación es solución de $F(x,y,y',y'')=0$ o/y de $\mu(x,y,y')=0$. Luego, debemos eliminar las soluciones *superfluas*, es decir aquellas que verifican $\mu(x,y,y')=0$ o aquellas que indefinen μ y no verifican $F(x,y,y',y'')=0$.

Ejemplo 4.2.5 Encontremos usando este método nuevamente la solución general de
$$yy''-(y')^2=0\,.$$
Multiplicando por $\mu(y)=\frac{1}{y^2}$ se obtiene
$$\frac{yy''-(y')^2}{y^2}=d(\frac{y'}{y})=0\,.$$
Luego tenemos
$$\begin{aligned}\frac{dy}{y}=c_1dx \quad &\Longrightarrow \quad \ln(y)=c_1x+\ln(c_2)\\ &\Longrightarrow \quad y(x)=c_2e^{c_1x}\,.\end{aligned}$$
La única función candidata a ser solución superflua es $y\equiv 0$ (ya que μ no está definida para $y=0$), pero no lo es ya que claramente es solución de la ecuación original.

6. Ecuaciones del tipo
$$F(x,y,y',y'')=0$$
donde F es homogénea respecto a la segunda, tercera y cuarta variable; es decir, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que para todo (x,y,z,w) se tiene
$$F(x,ky,kz,kw)=k^nF(x,y,z,w)\,.$$

Introducimos una nueva variable z a través de la expresión
$$y=e^{\int z dx}\,.$$
Derivando ambos lados con respecto a x dos veces, se obtiene
$$y'=ze^{\int z dx} \quad \text{y} \quad y''=(z^2+z')e^{\int z dx}\,,$$

y al reemplazar en nuestra ecuación

$$\begin{aligned}
0 = F(x,y,y',y'') &= F(x, e^{\int z\,dx}, ze^{\int z\,dx}, (z^2+z')e^{\int z\,dx}) \\
&= e^{n\int z\,dx}F(x,1,z,z^2+z') \\
&\Longrightarrow F(x,1,z,z^2+z') = 0\,, \text{ que es de la forma} \\
&\quad\ f(x,z,z') = 0 \quad \text{(ecuación de primer orden)}\,.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.6 Resolvamos la ecuación

$$yy'' - (y')^2 = 6xy^2\,.$$

Aquí $F(x,y,y',y'') = yy'' - (y')^2 - 6xy^2$, que es homogénea con $n = 2$. Poniendo $y = e^{\int z\,dx}$, la ecuación se transforma en

$$e^{2\int z\,dx}(z^2 + z' - z^2 - 6x) = 0 \quad \text{que es equivalente a} \quad z' = 6x\,.$$

La solución de esta última ecuación es

$$z(x) = 3x^2 + c_1\,,$$

lo que implica

$$y(x) = e^{\int(3x^2+c_1)dx} = e^{x^3+c_1x+c_2}\,,$$

y por lo tanto

$$y(x) = c_2e^{x^3+c_1x}\,.$$

4.3 Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

Son ecuaciones de la forma

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \phi(x)\,. \tag{4.3}$$

donde en general a_0, a_1, a_2 y ϕ son funciones continuas definidas en un intervalo I.

Un ejemplo importante de este tipo de ecuaciones es la que modela el movimiento de una masa acoplada a un resorte:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \;+\; c\frac{dx}{dt} \;+\; kx \;=\; F(t)\,,$$

donde m representa la masa del objeto, c y k son constantes y F es una función dada.

Volviendo a la ecuación (4.3), si $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, dividiendo por $a_0(x)$, reducimos (4.3) a su **forma normal**

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = g(x)\,. \tag{4.4}$$

Por lo tanto (4.4) es de la forma $y'' = f(x, y, y')$ con $f(x, y, z) = g(x) - p_2(x)y - p_1(x)z$. Así tanto f, como $\partial f/\partial y = -p_2(x)$ y $\partial f/\partial z = -p_1(x)$ son continuas en $I \times \mathbb{R}^2$, y entonces nuestra ecuación verifica el Teorema de Existencia y Unicidad (4.1.1). Más que esto, se puede probar que, dado un punto $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{R}^2$, existe una única solución u de (4.4) definida en todo el intervalo I, tal que $u(x_0) = y_0$ y $u'(x_0) = z_0$.

Para deducir con mayor facilidad importantes propiedades de este tipo de ecuaciones diferenciales, asociado a las funciones p_1 y p_2 de antes, consideremos el operador L que toma cualquier función u, dos veces diferenciable sobre el intervalo I, y le asocia la función $L[u]$ definida por

$$L[u](x) = u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x)\,. \tag{4.5}$$

Usando este operador la ecuación (4.4) se escribe de la forma

$$L[y] = g(x)\,, \tag{4.6}$$

Tal operador se llama **operador diferencial lineal** pues verifica:

1) $L[cu] = cL[u]$ para todo $c \in \mathbb{R}$,
2) $L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2]$.

Combinando ambas propiedades se obtiene
3) $L[\sum_{k=1}^{n} c_k u_k] = \sum_{k=1}^{n} c_k L[u_k]$, donde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

La demostración de 1), 2) y 3) es muy sencilla y se deja de ejercicio para el lector.

4.3.1 Ecuación Lineal Homogénea de Segundo Orden

Son ecuaciones de la forma

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,. \tag{4.7}$$

con p_1, p_2 funciones continuas definidas en un intervalo I.

Usando el operador diferencial L esta ecuación se reduce a

$$L[y] = 0\,. \tag{4.8}$$

Como consecuencia de la linealidad de L, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.3.1 *1) Si y_1 es solución de la ecuación (4.8), entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, cy_1 es solución.*

2) Si y_1, y_2 son soluciones de (4.8), entonces $y_1 + y_2$ es solución.

3) Luego si $y_1, \ldots, y_m$ son soluciones de (4.8), entonces cualquier combinación lineal de ellas, digamos $\sum_{k=1}^{m} c_k y_k$, es solución.

4) Si (4.8) (con coeficientes $p_i(x)$ reales) tiene una solución compleja $y(x) = u(x) + iv(x)$, entonces la parte real $u(x)$ y la parte imaginaria $v(x)$ son soluciones (reales) de (4.8).

5) Si y es solución de (4.8) y existe $x_0 \in I$ tal que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, entonces $y(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Demostración: 1) y 2) se dejan como ejercicios. 3) es consecuencia directa de 1) y 2). Para 4), notemos que si $y(x) = u(x) + iv(x)$ es solución de (4.8), entonces

$$L[y](x) \ = \ L[u](x) \ + \ iL[v](x) \ = \ 0\,, \quad \text{para todo } x \in I\,.$$

Pero como un número complejo es cero sólo si su parte real y parte imaginaria son cero, tenemos que

$$L[u](x) \ = \ 0\,, \quad L[v](x) \ = \ 0\,, \quad \text{para todo } x \in I\,,$$

y por lo tanto u y v son soluciones de (4.8) en I.

Finalmente 5) sigue directamente del teorema de existencia y unicidad, ya que la función idénticamente cero es también solución.

Definición 4.3.2 *Las funciones $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ se dicen* **linealmente dependientes** *(L.D.) en el intervalo I, si existen constantes $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que*

$$c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in I\,. \tag{4.9}$$

Las funciones $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ se dicen **linealmente independientes** *(L.I) en I si (4.9) se verifica sólo cuando $c_1 = \cdots = c_n = 0$.*

Ejemplo 4.3.3 Las funciones $1, x, x^2, \ldots, x^n$ son L.I. en cualquier intervalo I.

En efecto si

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0 \quad \forall x \in I$$

entonces, todo $x \in I$ es raíz de este polinomio que es de grado $\leq n$. Como todo polinomio, salvo el constante igual a cero, tiene sólo un número finito de raíces, tenemos que $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Ejemplo 4.3.4 *Si $k_1 \neq k_2$ las funciones $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}$ son L.I. en cualquier intervalo I.*

En efecto, la relación

$$\begin{aligned}
& c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} = 0 \quad \forall x \in I \\
\Longrightarrow\ & c_1 + c_2 e^{(k_2 - k_1)x} = 0 \quad \forall x \in I \\
\Longrightarrow\ & \text{(derivando)} \quad (k_2 - k_1) c_2 e^{(k_2 - k_1)x} = 0 \quad \forall x \in I \\
\Longrightarrow\ & c_2 = 0 \quad \Longrightarrow c_1 = 0\,.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.3.5 Demuestre que las funciones e^{kx}, xe^{kx} son L.I. en cualquier intervalo I.

Ejercicio 4.3.6 Demuestre que las funciones $\operatorname{sen}(kx), \cos(kx)$ son L.I. en cualquier intervalo I.

Teorema 4.3.7 *Si y_1, y_2 son L.D. en I, entonces el determinante (llamado* **wronskiano***)*

$$W(x) = W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in I\,.$$

Demostración. Sean c_1, c_2 constantes no ambas nulas tales que

$$\begin{aligned} &c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \quad \forall x \in I\,. \text{ Entonces también} \\ &c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) = 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Si, por ejemplo $c_2 \neq 0$, multiplicando la primera ecuación por $y_1'(x)$ y la segunda por $y_1(x)$ y restando, se obtiene para todo $x \in I$

$$c_2(y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2W(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad W(x) = 0\,.$$

Recuerdo 4.3.8 *Existe $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que*

$$\begin{cases} A_1x + A_2y &= 0 \\ B_1x + B_2y &= 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Teorema 4.3.9 *Sean y_1, y_2 son soluciones L.I. en I de la ecuación lineal homogénea*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,,$$

con coeficientes continuos $p_1(x), p_2(x)$ en I. Entonces el wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I\,.$$

Demostración. Supongamos existe $x_0 \in I$ tal que $W(x_0) = 0$. Entonces existen constantes c_1, c_2, no ambas nulas, tales que

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= 0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= 0 \end{cases}\,.$$

Pero entonces, $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ es también solución y verifica $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Esto implica que $y(x) = 0$ para todo $x \in I$, y luego $c_1 = c_2 = 0$. Esta es una contradicción y por lo tanto $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Teorema 4.3.10 *Sean y_1, y_2 son soluciones L.I. en I de la ecuación lineal homogénea*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,,$$

con coeficientes continuos $p_1(x), p_2(x)$ en I. Entonces la solución general de esta ecuación es

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\,, \quad \textit{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Demostración. Sea $y(x)$ solución cualquiera de nuestra ecuación. Debemos demostrar que existen constantes c_1, c_2 tales que $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, para todo $x \in I$.
Fijemos $x_0 \in I$ y sean $y_0 = y(x_0)$ y $z_0 = y'(x_0)$. Consideremos

$$c_1 = \frac{y_0y_2'(x_0) - z_0y_2(x_0)}{W(x_0)}\,, \quad c_2 = -\frac{y_0y_1'(x_0) - z_0y_1(x_0)}{W(x_0)}\,.$$

Es inmediato verificar que con estos valores de c_1, c_2, se obtiene:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) & = y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) & = z_0\,. \end{cases}$$

Entonces la solución $\alpha(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ verifica las condiciones iniciales $\alpha(x_0) = y_0$ y $\alpha'(x_0) = z_0$. Como la solución $y(x)$ también las verifica, concluímos que $y(x) = \alpha(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, para todo $x \in I$.

Corolario 4.3.11 *El número máximo de soluciones linealmente independientes de la ecuación $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ es dos.*

Ejemplo 4.3.12 Considere la ecuación

$$y'' - y = 0\,.$$

Se puede chequear directamente que las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones particulares. Además como son L.I., la solución general es

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Fórmula de Abel. Si conocemos una solución particular $y_1(x)$ de la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,,$$

hagamos la sustitución $y(x) = y_1(x)z(x)$ con $z(x) = \int u(x)dx$.
Tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= y_1'z + y_1z'\,, \quad \text{y} \\ y'' &= y_1''z + 2y_1'z' + y_1z''\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} & y_1''z + 2y_1'z' + y_1z'' + p_1(y_1'z + y_1z') + p_2y_1z = 0 \\ \Longrightarrow \quad & (y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1)z + (2y_1' + p_1y_1)z' + y_1z'' = 0 \\ \Longrightarrow \quad & (2y_1' + p_1y_1)z' + y_1z'' = 0\,. \end{aligned}$$

Como $z'(x) = u(x)$, nos queda la ecuación de primer orden de variables separables

$$(2y_1' + p_1y_1)u + y_1u' = 0\,.$$

La podemos escribir de la forma

$$\frac{du}{u} = (-2\frac{y_1'}{y_1} - p_1)dx\,,$$

cuya solución es

$$u(x) = \frac{1}{y_1(x)^2}e^{-\int p_1(x)dx}\,.$$

Esto implica que

$$z(x) = \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}dx\,,$$

y por lo tanto

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}dx\,, \qquad \textbf{(fórmula de Abel)}$$

es una segunda solución de nuestra ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,.$$

Finalmente observe que estas soluciones son L.I. ya que el correspondiente wronskiano es

$$W(x) = e^{-\int p_1(x)dx}\,.$$

Ejemplo 4.3.13 Resolver la ecuación $x^2y'' - xy' + y = 0$, sabiendo que $y_1(x) = x$ es una solución particular.

El primer paso es escribir la ecuación en la forma en que podemos aplicar el procedimiento anterior (y'' libre de variables). Dividiendo por x^2 tenemos

$$y'' \;-\; \frac{1}{x}y' \;+\; \frac{1}{x^2}y \;=\; 0\,.$$

De esta forma $p_1(x) = -\dfrac{1}{x}$ y usando la fórmula para $z(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} z(x) \;&=\; \int \frac{e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}}{x^2}\,dx \;=\; \int \frac{e^{\int \frac{1}{x}dx}}{x^2}\,dx \\ &=\; \int \frac{e^{\ln(x)}}{x^2}\,dx \;=\; \int \frac{dx}{x} \;=\; \ln(x)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la segunda solución que se obtiene es

$$y_2(x) \;=\; x\, z(x) \;=\; x\, \ln(x)\,,$$

lo que implica que

$$y(x) \;=\; x\,(c_1\, \ln(x) \;+\; c_2)$$

es la solución general.

4.3.2 Ecuaciones Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes

Ahora nuestra ecuación es

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0\,, \tag{4.10}$$

con a_0, a_1, a_2 constantes reales, $a_0 \neq 0$.

Los ejemplos anteriores sugieren buscar soluciones de la forma $y(x) = e^{kx}$, donde k es una constante real a determinar. Tenemos entonces

$$y'(x) = ke^{kx} \quad \text{y} \quad y''(x) = k^2 e^{kx}\,.$$

Reemplazando en (4.10) se obtiene

$$e^{kx}(a_0 k^2 + a_1 k + a_2) = 0\,.$$

Luego
$y(x) = e^{k_1 x}$ es solución de (4.10) $\Longleftrightarrow$ k_1 es solución de la ecuación cuadrática

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0\,. \tag{4.11}$$

Tal ecuación es llamada **ecuación característica** asociada a (4.10).

Casos posibles. Sea $d = a_1^2 - 4a_0 a_2$, el discriminante de la ecuación característica (4.11), y k_1, k_2 sus raíces.
1) $d > 0$. Entonces k_1, k_2 son raíces reales y distintas de (4.11),

$$k_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{d}}{2a_0}\,, \quad k_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{d}}{2a_0}\,,$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2) $d = 0$. Entonces $k_1 = k_2 = -\frac{a_1}{2a_0} \in \mathbb{R}$ y $y_1(x) = e^{k_1 x}$ es solución.
Afirmación $y_2(x) = xe^{k_1 x}$ es también solución.
En efecto,

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= k_1 x e^{k_1 x} + e^{k_1 x} = k_1 y_2(x) + e^{k_1 x} && (4.12) \\ \Longrightarrow \quad y_2''(x) &= k_1 y_2'(x) + k_1 e^{k_1 x}\,. && (4.13) \end{aligned}$$

De la ecuación (4.12) obtenemos $e^{k_1 x} = y_2'(x) - k_1 y_2(x)$. Reemplazando esto en (4.13) obtenemos

$$y_2''(x) = 2k_1 y_2'(x) - k_1^2 y_2(x) = -\frac{a_1}{a_0} y_2'(x) - \frac{a_1^2}{4a_0^2} y_2(x)$$

y como $\frac{a_1^2}{4a_0^2} = \frac{a_2}{a_0}$, tenemos

$$y_2''(x) = -\frac{a_1}{a_0} y_2'(x) - \frac{a_2}{a_0} y_2(x)\,,$$

lo que implica

$$a_0 y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_2 y_2(x) = 0\,.$$

Esto prueba la afirmación y por lo tanto la solución general en este caso es

$$y(x) = e^{k_1 x}\,(c_1 \ + \ c_2\, x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

3) $d < 0$. En este caso k_1, k_2 son números complejos conjugados,

$$k_1 = \alpha - i\beta\,, \quad k_2 = \alpha + i\beta\,, \quad \text{con} \quad \alpha = -\frac{a_1}{2a_0}\,, \quad \beta = \frac{\sqrt{-d}}{2a_0}\,.$$

De esta forma

$$e^{\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\mathrm{sen}(\beta x)) \quad \text{y} \quad e^{\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\mathrm{sen}(\beta x))$$

son raíces complejas de (4.10). Luego la parte real $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y la parte imaginaria $y_2(x) = e^{\alpha x}\mathrm{sen}(\beta x)$ son soluciones reales. Además como ellas son L.I., la solución general es

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \mathrm{sen}(\beta x))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.14 $\quad y'' - 3y' + 2y = 0$.

La ecuación característica es

$$k^2 - 3k + 2 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = 1$ y $k_2 = 2$. Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.15 $y'' + 4y' + 5y = 0$.

La ecuación característica es
$$k^2 + 4k + 5 = 0\,,$$
cuyas raíces son $k_1 = -2 - i$ y $k_2 = -2 + i$. Por lo tanto la solución general es
$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.16 $y'' + 2y' + y = 0$.

La ecuación característica es
$$k^2 + 2k + 1 = 0\,,$$
cuyas raíces son $k_1 = k_2 = -1$. Por lo tanto la solución general es
$$y(x) = e^{-x}(c_1 + c_2 x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

4.3.3 Ecuación de Euler

Son ecuaciones de la forma
$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0\,, \tag{4.14}$$
con a_0, a_1, a_2 constantes reales, $a_0 \neq 0$.
Si hacemos la sustitución $x = e^t$ (para $x > 0$), obtenemos $\frac{dx}{dt} = e^t$ y por lo tanto $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$. De esta forma
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}\,, \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt}e^{-t}) = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}e^{-t})\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - \frac{dy}{dt}e^{-2t} = e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en (4.14) obtenemos
$$a_0 e^{2t} e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + a_1 e^t e^{-t}\frac{dy}{dt} + a_2 y = 0\,,$$
que es equivalente a la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes:
$$a_0\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2 y = 0\,. \tag{4.15}$$

La ecuación característica de (4.15) es
$$a_0 k^2 + (a_1 - a_0)k + a_2 = 0\,.$$

De este modo si k_1 es raíz de esta ecuación, $y(t) = e^{k_1 t}$ es solución de (4.15), lo que implica que

$$y(x) = e^{k_1 \ln(x)} = x^{k_1}\,,$$

es solución de nuestra ecuación inicial (4.14).

Nota. En la práctica a veces es conveniente buscar directamente soluciones de (4.14) de la forma $y(x) = x^k$.

Ejemplo 4.3.17 $\quad x^2y'' + \frac{5}{2}xy' - y = 0.$

La correspondiente ecuación característica es

$$k^2 + \frac{3}{2}k - 1 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = \frac{1}{2}$ y $k_2 = -2$. Por lo tanto la solución general es

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-2}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.18 $\quad x^2y'' - xy' + y = 0.$

La correspondiente ecuación característica es

$$k^2 - 2k + 1 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = k_2 = 1$. Por lo tanto son soluciones para la ecuación transformada

$$y_1(t) = e^t\,, \quad \text{y} \quad y_2(t) = te^t\,.$$

Así

$$y_1(x) = x\,, \quad \text{y} \quad y_2(x) = (\ln(x))x\,,$$

son soluciones de nuestra ecuación y lasolución general es

$$y(x) = x(c_1 + c_2 \ln(x))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.19 $\quad x^2y'' + xy' + y = 0.$

La correspondiente ecuación característica es

$$k^2 + 1 = 0\,,$$

cuyas raíces son $k_1 = -i$ y $k_2 = i$. Por lo tanto son soluciones para la ecuación transformada

$$y_1(t) = \cos(t)\,, \quad \text{y} \quad y_2(t) = \operatorname{sen}(t)\,.$$

Así

$$y_1(x) = \cos(\ln(x))\,, \quad \text{y} \quad y_2(x) = \operatorname{sen}(\ln(x))\,,$$

son soluciones de nuestra ecuación y la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos(\ln(x)) + c_2 \operatorname{sen}(\ln(x))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 4.3.20 Considere la ecuación

$$a_0(ax+b)^2y'' + a_1(ax+b)y' + a_2y = 0\,.$$

Por medio de una sustitución de variables transformela en una ecuación de Euler y resuelvala.

4.3.4 Ecuaciones Lineales de Segundo Orden no Homogéneas

Consideremos la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)\,, \tag{4.16}$$

donde p_1, p_2 y f son funciones continuas definidas sobre un intervalo I.

Usando el operador diferencial lineal L definido en (4.5), esta ecuación toma la forma

$$L[y\ ] = f(x)\,. \tag{4.17}$$

Las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de la linealidad del operador L.

1) Si y_1 es solución de $L[y\ ] = 0$ y $\tilde{y}$ es solución de $L[y\ ] = f(x)$, entonces $y_1 + \tilde{y}$ el solución de $L[y\ ] = f(x)$.

2) Si y_i es solución de $L[y\ ] = f_i(x)$, para $i = 1, \ldots, n$, entonces $y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$ es solución de $L[y\ ] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, donde α_i, $i = 1, \ldots, n$, son constantes.

3) Suponga que las funciones p_1, p_2, U y V son real valoradas. Entonces, si la ecuación

$$L[y\ ] = U(x) + iV(x)$$

tiene solución

$$y(x) = u(x) + iv(x)\,,$$

con u y v real valoradas, entonces $u(x)$ es solución de $L[y\ ] = U(x)$ y $v(x)$ es solución de $L[y\ ] = U(x)$.

Teorema 4.3.21 *Considere la ecuación $L[y\ ] = f(x)$, con coeficientes p_1, p_2 y f continuos en un intervalo I. Si $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, es la solución general de $L[y\ ] = 0$, y $\tilde{y}$ es una solución particular de $L[y\ ] = f(x)$, entonces*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \tilde{y}(x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

es la solución general de $L[y\ ] = f(x)$.

Demostración Sea $\tilde{y}_1$ una solución cualquiera de $L[y\ ] = f(x)$. Tenemos que demostrar que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\tilde{y}_1(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \tilde{y}(x)\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Pero como $\tilde{y}_1 - \tilde{y}$ es solución de la ecuación $L[y\ ] = 0$, existen constante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \quad \forall x \in I\,,$$

lo que termina la demostración.

Ejemplo 4.3.22 $\quad y'' + y = x.$

Claramente $\tilde{y}(x) = x$ es solución particular.
Consideremos ahora la ecuación homogénea $y'' + y = 0$. Su ecuación característica es $k^2 + 1 = 0$ y por lo tanto su solución general es

$$c_1 \cos(x) + c_2 \mathrm{sen}(x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Por lo tanto la solución general de nuestra ecuación inicial es

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \mathrm{sen}(x) + x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

4.3.5 Método de variación de constantes

A continuación introduciremos un procedimiento para encontrar una solución particular de una ecuación lineal no homogénea bajo el supuesto que conocemos la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.

Como siempre L denota el operador

$$L[u](x) = u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x)\,,$$

donde p_1, p_2 son funciones continuas sobre un intervalo I.
Suponga que $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ es la solución general de $L[y\ ] = 0$.
Dado una función f continua sobre I, buscaremos una solución particular de $L[y\ ] = f(x)$ de la forma:

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)\,.$$

Tenemos entonces dos funciones incógnitas $c_1(x)$ y $c_2(x)$. Estas deben ser tales que $c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ satisfagan la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)\,.$$

Es decir tenemos dos funciones incógnitas y una única ecuación. Podemos entonces pedir que $c_1(x)$ y $c_2(x)$ verifiquen una ecuación adicional que facilite su cálculo.
Observe que si $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, entonces

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x)\,.$$

Para que por lo menos al hacer la primera derivada de $y(x)$, las funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ se comporten como constante, imponemos la condición adicional

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0\,, \quad \forall x \in I\,.$$

Con esta condición tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\,, \\ y'(x) &= c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) \quad \text{y} \\ y''(x) &= c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en nuestra ecuación y ordenando obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x)) \\ &\quad + c_2(x)(y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x)) \\ &= c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto nuestras funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ deben satisfacer el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &=& 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &=& f(x) \end{array} \right.$$

con funciones incógnitas $c_1'(x)$ y $c_2'(x)$.
Observe que para todo $x \in I$, el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

coincide con el wronskiano $W(x)$ de la ecuación homogénea. Como y_1 y y_2 son L.I. $W(x) \neq 0$, y por lo tanto el sistema siempre tiene solución. Estas soluciones son

$$c_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(x)} \quad \text{y} \quad c_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}\,.$$

Así encontramos $c_1'(x) = \phi_1(x)$, $c_2'(x) = \phi_2(x)$. Finalmente integrando obtenemos

$$c_1(x) = \int \phi_1(x)dx + \bar{c_1} \quad \text{y} \quad c_2(x) = \int \phi_2(x)dx + \bar{c_2}\,.$$

Ejemplo 4.3.23 $\quad y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$.

Como la solución general de $y'' + y = 0$ es $c_1\cos(x) + c_2\text{sen}(x)$, ponemos

$$y(x) = c_1(x)\cos(x) + c_2(x)\text{sen}(x)\,,$$

y tratamos de resolver el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(x) + c_2'(x)\text{sen}(x) & = \ 0 \\ -c_1'(x)\text{sen}(x) + c_2'(x)\cos(x) & = \ \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos

$$c_1'(x) = -\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \Longrightarrow c_1(x) = \ln(|\cos(x)|) + \bar{c_1} \quad \text{y}$$

$$c_2'(x) = 1 \Longrightarrow c_2(x) = x + \bar{c_2}\,.$$

Luego la solución general es

$$y(x) = \bar{c_1}\cos(x) + \bar{c_2}\text{sen}(x) + \ln(|\cos(x)|)\cos(x) + x\text{sen}(x)\,, \quad \bar{c_1}, \bar{c_2} \in \mathbb{R}\,.$$

Ejemplo 4.3.24 Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}\,, \quad (x \neq 0)$$

sabiendo que $y_1(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ es solución particular de la correspondiente ecuación homogénea.

Para encontrar una segunda solución $y_2(x)$ de la ecuación homogénea, linealmente independiente con $y_1(x)$, usamos la fórmula de Abel:

$$y_2(x) \ = \ y_1(x)\int e^{-\int p_1(x)dx} y_1(x)^{-2} dx\,,$$

con $p_1(x) = \frac{2}{x}$.
Como

$$-\int p_1(x)dx \ = \ -2\ln(x) \ = \ \ln(x^{-2})\,,$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\text{sen}(x)}{x}\int \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{\text{sen}^2(x)}dx \\ &= \frac{\text{sen}(x)}{x}\int \frac{1}{\text{sen}^2(x)}dx \ = \ \frac{\text{sen}(x)}{x}\cdot\frac{-\cos(x)}{\text{sen}(x)} \\ &= -\frac{\cos(x)}{x}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) \ = \ c_1\frac{\text{sen}(x)}{x} + c_2\frac{\cos(x)}{x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar la solución general de la ecuación no homogénea usamos el método de variación de parámetros. Sea

$$y(x) \;=\; c_1(x)\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} \;+\; c_2(x)\frac{\cos(x)}{x}\,.$$

Debemos entonces resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1'(x)\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} + c_2'(x)\frac{\cos(x)}{x} & = & 0 \\ c_1'(x)\frac{x\cos(x)-\mathrm{sen}(x)}{x^2} + c_2'(x)\frac{-x\mathrm{sen}(x)-\cos(x)}{x^2} & = & \frac{1}{x} \end{array}\right\}.$$

Sus soluciones son

$$c_1'(x) \;=\; \cos(x)\,, \quad c_2'(x) \;=\; -\mathrm{sen}(x)\,,$$

e integrando obtenemos

$$c_1(x) \;=\; \mathrm{sen}(x) + c_1\,, \quad c_2(x) \;=\; \cos(x) + c_2\,.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) \;=\; (\mathrm{sen}(x) + c_1)\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} + (\cos(x) + c_2)\frac{\cos(x)}{x}$$

es decir

$$y(x) \;=\; c_1(x)\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} \;+\; c_2(x)\frac{\cos(x)}{x} \;+\; \frac{1}{x}\cdot$$

4.3.6 Método de coeficientes indeterminados

Este método se aplica para encontrar una solución particular para ecuaciones del tipo

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = \sum_{i=1}^{m} e^{r_ix}(P_i(x)\cos(q_ix) + Q_i(x)\mathrm{sen}(q_ix))\,, \tag{4.18}$$

donde a_0, a_1, a_2, r_i y q_i son constantes reales, $a_0 \neq 0$, y $P_i(x), Q_i(x)$ son polinomios.

La correspondiente ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0\,. \tag{4.19}$$

Observe que el tipo particular de funciones que aparecen en el lado derecho de la ecuación (4.20) consta de términos de la forma k, x^n, con n entero positivo, $e^{rx}, \cos(qx), \mathrm{sen}(qx)$, o bién expresiones que se pueden obtener por un número finito de adiciones, sustracciones y/o multiplicaciones de las anteriores.

Ejemplos de este tipo de ecuaciones son

$$y'' + 4y' + 5y \;=\; 2e^{3x} \qquad \text{y} \qquad y'' + 5y' + 4y \;=\; 8x^2 + 3 + 2\cos(2x)\,.$$

El siguiente teorema nos da un método para encontrar una solución particular en el caso $m = 1$. Si $m > 1$, para cada $i = 1, \cdots, m$, usando este método podemos encontrar una solución particular $y_i(x)$ de la ecuación

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{r_i x}(P_i(x)\cos(q_i x) + Q_i(x)\mathrm{sen}(q_i x)) .$$

Luego

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i(x)$$

es solución particular de (4.18).

Consideremos entonces la ecuación

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{rx}(P(x)\cos(qx) + Q(x)\mathrm{sen}(qx)) , \qquad (4.20)$$

donde a_0, a_1, a_2, r y q son constantes reales, $a_0 \neq 0$, y $P(x), Q(x)$ son polinomios.

Teorema 4.3.25 *Sea* $n = \max\{gradoP, gradoQ\}$.
a) Si $r \pm iq$ *no es raíz de la ecuación característica (4.19), entonces la ecuación (4.20) tiene solución particular de la forma*

$$y_p(x) = e^{rx}(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)sen(qx)) .$$

donde $R_n(x), S_n(x)$ *son polinomios de grado* n.
b) Si $r \pm iq$ *es raíz de multiplicidad* α *de (4.19), entonces la ecuación (4.20) tiene solución particular de la forma*

$$y_p(x) = x^{\alpha} e^{rx}(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)sen(qx)) .$$

donde $R_n(x), S_n(x)$ *son polinomios de grado* n.

En cada caso los coeficientes de los polinomios $R_n(x), S_n(x)$ *se calculan reemplazando* $y_p(x)$ *en la ecuación.*

Ejemplo 4.3.26 Encontremos una solución particular de la ecuación

$$y'' + 4y' + 5y \;=\; 2e^{3x} .$$

Como $r \pm iq = 3$ no es raíz de la ecuación característica

$$k^2 + 4k + 5 = 0 ,$$

y el máximo entre los grados de $P(x) = 2$ y $Q(x) = 0$ es cero, debemos buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ae^{3x} .$$

Para encontrar el valor de A calculamos las dos primeras derivadas de y_p

$$y_p'(x) = 3Ae^{3x} \qquad \text{y} \qquad y_p''(x) = 9Ae^{3x}\,,$$

y reemplazamos en la ecuación diferencial obteniendo

$$9Ae^{3x} \;+\; 12Ae^{3x} \;+\; 5Ae^{3x} \;=\; 2e^{3x}\,.$$

Por lo tanto

$$26Ae^{3x} \;=\; 2e^{3x} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{13}\,,$$

y nuestra solución particular es

$$y_p(x) = \frac{1}{13}e^{3x}\,.$$

Ejemplo 4.3.27 Encontremos una solución particular de la ecuación

$$y'' + 5y' + 4y \;=\; 3 + 8x^2 + 2\cos(2x)\,.$$

La ecuación característica es

$$k^2 + 5k + 4 = 0\,.$$

Escribamos la ecuación de la forma

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x)\,,$$

con $f_1(x) = 3 + 8x^2$ y $f_2(x) = 2\cos(2x)$.

Para $L[y] = f_1(x)$, como $r \pm iq = 0$ no es raíz de la ecuación característica y grado de $P(x) = 3 + 8x^2$ es dos, tenemos solución particular de la forma

$$y_1(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2\,.$$

Con respecto a $L[y] = f_2(x)$, $r \pm iq = 2i$ tampoco es raíz de la ecuación característica. Además como el máximo entre los grados de $P(x) = 2$ y $Q(x) = 0$ es cero, tenemos solución particular de la forma

$$y_2(x) = A_3\cos(2x) + A_4\mathrm{sen}(2x)\,.$$

De esta forma la ecuación inicial $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$, tiene solución particular de la forma

$$y_p(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3\cos(2x) + A_4\mathrm{sen}(2x)\,.$$

Tenemos

$$y_p'(x) = A_1 + 2A_2x - 2A_3\mathrm{sen}(2x) + 2A_4\cos(2x)\,,$$

y

$$y_p''(x) = 2A_2 - 4A_3\cos(2x) - 4A_4\mathrm{sen}(2x)\,.$$

Así

$$\begin{aligned} L[y_p](x) &= 2A_2 - 4A_3\cos(2x) - 4A_4\text{sen}(2x) + 5(A_1 + 2A_2x - 2A_3\text{sen}(2x) \\ &\quad +2A_4\cos(2x)) + 4(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3\cos(2x) + A_4\text{sen}(2x)) \\ &= (2A_2 + 5A_1 + 4A_0) + (10A_2 + 4A_1)x + 4A_2x^2 + 10A_4\cos(2x) \\ &\quad -10A_3\text{sen}(2x)\,, \end{aligned}$$

y comparando con

$$f_1(x) + f_2(x) = 3 + 8x^2 + 2\cos(2x)\,,$$

obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2A_2 + 5A_1 + 4A_0 &= 3 \\ 10A_2 + 4A_1 &= 0 \\ 4A_2 &= 8 \\ 10A_4 &= 2 \\ -10A_3 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$A_3 = 0\,,\ A_4 = \frac{1}{5}\,,\ A_2 = 2\,,\ A_1 = -5\,,\ A_0 = 6\,.$$

Luego

$$y_p(x) = 6 - 5x + 2x^2 + \frac{1}{5}\text{sen}(2x)\,,$$

es la solución particular buscada.

Ejemplo 4.3.28 Busquemos una solución particular de

$$y'' - y' - 6y = e^{-2x} + 2e^{-3x}\,.$$

La ecuación característica es

$$k^2 - k - 6 = (k+2)(k-3) = 0\,.$$

Como -2 es raíz de multiplicidad uno de ella, la ecuación $L[y] = e^{-2x}$ tiene solución de la forma

$$y_1(x) = A_0xe^{-2x}\,.$$

Por otra parte -3 no es raíz de la ecuación característica y luego $L[y] = e^{-3x}$ tiene solución de la forma

$$y_2(x) = A_1e^{-3x}\,.$$

Sea entonces

$$y_p(x) = A_0xe^{-2x} + A_1e^{-3x}\,.$$

Derivando se tiene

$$y_p'(x) = A_0e^{-2x} - 2A_0xe^{-2x} - 3A_1e^{-3x} \quad \text{y} \quad y_p''(x) = -4A_0e^{-2x} + 4A_0xe^{-2x} + 9A_1e^{-3x}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} L[y_p](x) &= -4A_0e^{-2x} + 4A_0xe^{-2x} + 9A_1e^{-3x} - (A_0e^{-2x} - 2A_0xe^{-2x} - 3A_1e^{-3x}) \\ &\quad -6(A_0xe^{-2x} + A_1e^{-3x}) \\ &= -5A_0e^{-2x} + 6A_1e^{-3x}\,, \end{aligned}$$

y comparando con $e^{-2x} + 2e^{-3x}$, obtenemos

$$A_0 = -\frac{1}{5} \qquad \text{y} \qquad A_1 = \frac{1}{3}\,.$$

Por lo tanto

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}xe^{-2x} + \frac{1}{3}e^{-3x}$$

es la solución particular buscada.

4.4 Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.4.1 .Encuentre la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{1-x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1-x}\,y = 1 - x\,,$$

sabiendo que una solución de la ecuación homogénea asociada es $y_1(x) = e^x$.

Solución. Usando fórmula de Abel tenemos una segunda solución de la ecuación homogénea de la forma $y_2 = vy_1$, con

$$\begin{aligned} v(x) &= \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx = \int \frac{1}{e^{2x}}e^{-\int \frac{x}{1-x}dx}dx \\ &= \int \frac{1}{e^{2x}}e^{\int \frac{x}{x-1}dx}dx = \int e^{-2x}e^{x+\ln(x-1)}dx \\ &= \int e^{-x}(x-1)dx = \int xe^{-x}dx - \int e^{-x}dx = -xe^{-x}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $y_2(x) = -xe^{-x}e^x = -x$. De esta forma la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1e^x - c_2x\,.$$

Buscamos ahora una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma

$$y_p(x) = c_1(x)e^x - c_2(x)x\,.$$

Luego las funciones $c_1'(x), c_2'(x)$ deben satisfacer el sistema

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^x - c_2'(x)x &= 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x) &= 1 - x\,. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$\begin{aligned} c_1'(x) = -xe^{-x} \quad &\Longrightarrow \quad c_1(x) = xe^{-x} + e^{-x} + c_1 \\ c_2'(x) = -1 \quad &\Longrightarrow \quad c_2(x) = -x + c_2\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de nuestra ecuación es

$$y(x) = (xe^{-x} + e^{-x} + c_1)e^x - (-x + c_2)x\,,$$

o bien

$$y(x) = x^2 + x + 1 + c_1 e^x - c_2 x\,.$$

Ejercicio 4.4.2 Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}\,, \quad (x \neq 0)$$

sabiendo que $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es solución particular de la correspondiente ecuación homogénea.

Solución. Para encontrar una segunda solución $y_2(x)$ de la ecuación homogénea, linealmente independiente con $y_1(x)$, usamos la fórmula de Abel:

$$y_2(x) \;=\; y_1(x)\int e^{-\int p_1(x)dx} y_1(x)^{-2} dx\,,$$

con $p_1(x) = \frac{2}{x}$.
Como

$$-\int p_1(x)dx \;=\; -2\ln(x) \;=\; \ln(x^{-2})\,,$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\int \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}dx \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}dx \;=\; \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\ &= -\frac{\cos(x)}{x}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) \;=\; c_1\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2\frac{\cos(x)}{x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar la solución general de la ecuación no homogénea usamos el método de variación de constante. Sea

$$y(x) \;=\; c_1(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \;+\; c_2(x)\frac{\cos(x)}{x}\,.$$

Debemos entonces resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1'(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + c_2'(x)\frac{\cos(x)}{x} & = & 0 \\ c_1'(x)\frac{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^2} + c_2'(x)\frac{-x\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{x^2} & = & \frac{1}{x} \end{array}\right\}.$$

Sus soluciones son

$$c_1'(x) \;=\; \cos(x)\,, \quad c_2'(x) \;=\; -\operatorname{sen}(x)\,,$$

e integrando obtenemos

$$c_1(x) \;=\; \operatorname{sen}(x) + c_1\,, \quad c_2(x) \;=\; \cos(x) + c_2\,.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) \;=\; (\operatorname{sen}(x) + c_1)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + (\cos(x) + c_2)\frac{\cos(x)}{x}$$

es decir

$$y(x) \;=\; c_1(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \;+\; c_2(x)\frac{\cos(x)}{x} \;+\; \frac{1}{x}\cdot$$

Ejercicio 4.4.3 Encuentre la solución general de la ecuación

$$4x^4\,\frac{d^2y}{dx^2} \;+\; 8x^3\,\frac{dy}{dx} \;+\; y \;=\; \tan\left(\frac{1}{2x}\right)\,,$$

haciendo la sustitución $x = \frac{1}{t}$.

Solución.Sea $x = \frac{1}{t}$. Por lo tanto

$$dx = -\frac{1}{t^2}dt \quad\Longrightarrow\quad \frac{dt}{dx} = -t^2\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \;=\; -t^2\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right) \;=\; \frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx} \;=\; \left(-2t\frac{dy}{dt} \;-\; t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)\cdot(-t^2) \\ &= 2t^3\frac{dy}{dt} \;+\; t^4\frac{d^2y}{dt^2}\cdot \end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos

$$4\frac{1}{t^4}\left(2t^3\frac{dy}{dt} \;+\; t^4\frac{d^2y}{dt^2}\right) \;-\; 8\frac{1}{t^3}t^2\frac{dy}{dt} \;+\; y \;=\; \tan\left(\frac{t}{2}\right)\,,$$

es decir

$$\frac{d^2y}{dt^2} \;+\; \frac{1}{4}y \;=\; \frac{1}{4}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\,. \tag{4.21}$$

Como la ecuación característica

$$m^2 \;+\; \frac{1}{4} \;=\; 0$$

tiene raíces $m = \pm\frac{1}{2}\imath$, la solución general de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2y}{dt^2} \;+\; \frac{1}{4}y \;=\; 0$$

es

$$y_h(t) \;=\; c_1\cos\left(\frac{t}{2}\right) \;+\; c_2\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Usando el método de variación de parámetros, buscamos una solución particular de (4.21) de la forma

$$y_p(t) \;=\; c_1(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \;+\; c_2(t)\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\,.$$

Luego debemos resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} c_1'(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) & + & c_2'(t)\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right) & = & 0 \\ -\frac{1}{2}c_1'(t)\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right) & + & \frac{1}{2}c_2'(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) & = & \frac{1}{4}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\,. \end{array}\right.$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned} c_1'(t) \;&=\; -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \;=\; -\frac{1}{2}\sec\left(\frac{t}{2}\right) \;+\; \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \quad\Longrightarrow \\ c_1(t) \;&=\; -\ln\left(\sec\left(\frac{t}{2}\right) \;+\; \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \;+\; \mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \;+\; c_1\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c_2'(t) \;&=\; \frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right) \;=\; \frac{1}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \quad\Longrightarrow \\ c_2(t) \;&=\; -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \;+\; c_2\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \left[-\ln\left[\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right] + \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= -\ln\left[\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right), \end{aligned}$$

y la solución general de (4.21) es

$$y(t) = -\ln\left[\sec\left(\frac{t}{2}\right) + \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_1\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right), \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

De esta forma la solución general de nuestra ecuación es

$$\begin{aligned} y(x) &= -\ln\left[\sec\left(\frac{1}{2x}\right) + \tan\left(\frac{1}{2x}\right)\right]\cos\left(\frac{1}{2x}\right) + \\ &\quad c_1\cos\left(\frac{1}{2x}\right) + c_2\text{sen}\left(\frac{1}{2x}\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.4.4 Usando el método de los coeficientes indeterminados encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' - y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + 10\cos(2x).$$

Solución. El polinomio característico de la ecuación homogénea $y'' - y = 0$ es $k^2 - 1 = 0$. Luego la solución general de la homogénea es

$$y_h(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{x}.$$

Para encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea usando coeficientes indeterminados, separamos en dos ecuaciones

$$\begin{aligned} y'' - y &= e^{-x}(2 - 4x) \quad \text{y} && (4.22) \\ y'' - y &= 10\cos(2x) && (4.23) \end{aligned}$$

Como -1 es solución de la ecuación característica debemos buscar una solución particular de (4.22) de la forma

$$y_1(x) = xe^{-x}(Ax + B).$$

Tenemos

$$y_1'(x) = e^{-x}(-Ax^2 + (2A - B)x + B) \quad \text{y} \quad y_1''(x) = e^{-x}(Ax^2 + (B - 4A)x + 2(A - B))$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$e^{-x}(-4Ax + 2(A - B)) = e^{-x}(2 - 4x).$$

Luego $A = 1$ y $A - B = 1$, lo que implica $B = 0$. Por lo tanto

$$y_1(x) = x^2 e^{-x} .$$

Consideremos ahora la ecuación (4.23). Como 2 no es solución de la ecuación característica, buscamos una solución particular de la forma

$$y_2(x) = C\cos(2x) + D\mathrm{sen}(2x) .$$

Tenemos

$$y_2'(x) = -2C\mathrm{sen}(2x) + 2D\cos(2x) \quad \text{y} \quad y_2''(x) = -4C\cos(2x) - 4D\mathrm{sen}(2x) ,$$

y reemplazando en (4.23) obtenemos

$$-5C\cos(2x) - 5D\mathrm{sen}(2x) = 10\cos(2x) .$$

Por lo tanto $C = -2$, $D = 0$ y

$$y_2(x) = -2\cos(2x) .$$

Luego

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = x^2 e^{-x} - 2\cos(x)$$

es solución particular de nuestra ecuación original y su solución general es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + x^2 e^{-x} - 2\cos(x) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Ejercicio 4.4.5 Para $x > 0$ encuentre la solución general de la ecuación

$$4xy'' + (2 - 8\sqrt{x}\,)y' - 5y = (3\sqrt{x} + 2)e^{-\sqrt{x}} ,$$

usando el cambio $x = t^2$.
Solución. Ponemos $x = t^2$ lo que implica $\frac{dx}{dt} = 2t$. Además

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t}\frac{dy}{dt} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{2t}\left[-\frac{1}{2t^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2t}\frac{d^2y}{dt^2}\right] = \frac{1}{4t^2}\left[-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right] . \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos

$$4t^2\,\frac{1}{4t^2}\left[-\frac{1}{t}\,\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right] + (2 - 8t)\,\frac{1}{2t}\,\frac{dy}{dt} - 5y = e^{-t}(3t + 2) ,$$

o bién

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = e^{-t}(3t + 2). \tag{4.24}$$

La correspondiente ecuación característica es

$$k^2 - 4k - 5 = 0 = (k + 1)(k - 5),$$

y por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}.$$

Usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos solución particular de (4.24) de la forma

$$y_p(t) = te^{-t}(A + Bt).$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= e^{-t}[-Bt^2 + (-A + 2B)t + A] \\ y_p''(t) &= e^{-t}[Bt^2 + (A - 4B)t + 2(-A + B)]. \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos

$$e^{-t}[-12Bt - 6A + 2b] = e^{-t}[3t + 2],$$

lo que implica

$$B = -\frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad A = -\frac{5}{12}.$$

Luego la solución general de (4.24) es

$$y(t) = -\frac{1}{12}te^{-t}(5 + 3t) + c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t},$$

y por lo tanto la solución general de nuestra ecuación inicial es

$$y(x) = -\frac{1}{12}\sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}(5 + 3\sqrt{x}\,) + c_1 e^{-\sqrt{x}} + c_2 e^{5\sqrt{x}}.$$

Ejercicio 4.4.6 Encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ de la ecuación

$$y'' + y = \tan(x) + 3x - 1.$$

Determine además el intervalo máximo donde está definida.

Solución. Nuestra ecuación es

$$y'' + y = \tan(x) + 3x - 1. \tag{4.25}$$

Observemos primero que la ecuación no está definida para los x de la forma $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donde n es un entero, ya que en estos x la función coseno se anula y por lo tanto no estan en el dominio de la función tangente. Como queremos una solución alrededor de $x = 0$, debemos partir imponiendo la condición $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Resolvamos entonces la ecuación para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) \;=\; c_1 \cos(x) \;+\; c_2 \mathrm{sen}(x)\,.$$

Resolvamos primero usando variación de parámetros la ecuación

$$y'' \;+\; y \;=\; \tan(x) \tag{4.26}$$

Buscamos entonces solución de (4.26) de la forma

$$y_1(x) \;=\; c_1(x) \cos(x) \;+\; c_2(x) \mathrm{sen}(x)\,,$$

y por lo tanto debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \cos(x) c_1'(x) \;+\; \mathrm{sen}(x) c_2'(x) & = \; 0 \\ -\mathrm{sen}(x) c_1'(x) \;+\; \cos(x) c_2'(x) & = \; \tan(x)\,. \end{cases}$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -\tan(x) \cdot \mathrm{sen}(x) \\ c_2'(x) &= \mathrm{sen}(x)\,, \end{aligned}$$

e integrando

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \mathrm{sen}(x) \;-\; \ln(\sec(x) \;+\; \tan(x)) \;+\; c_1\,, \\ c_2(x) &= -\cos(x) \;+\; c_2\,. \end{aligned}$$

Observe que todo esto tiene sentido ya que para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tenemos que $\sec(x) + \tan(x) > 0$.
Luego la solución general de (4.26) es

$$y_1(x) \;=\; c_1(x) \cos(x) \;+\; c_2(x) \mathrm{sen}(x) \;-\; \ln(\sec(x) \;+\; \tan(x)) \cos(x)\,,$$

y ésta esta definida para todo $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Para resolver

$$y'' \;+\; y \;=\; 3x \;-\; 1 \tag{4.27}$$

usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos solución de la forma

$$y_2(x) \;=\; Ax \;+\; B\,.$$

Reemplazando en (4.27) y comparando coeficientes se obtiene

$$A \;=\; 3 \qquad \text{y} \qquad B \;=\; -1\,,$$

lo que implica
$$y_2(x) \;=\; 3x \;-\; 1\,.$$
Luego la solución general de la ecuación (4.25) es
$$y(x) \;=\; c_1(x)\cos(x) \;+\; c_2(x)\mathrm{sen}(x) \;-\; \ln(\sec(x) \;+\; \tan(x))\cos(x) \;+\; 3x \;-\; 1\,,$$
y el intervalo máximo donde esta solución está definida es $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Ejercicio 4.4.7 Encuentre la solución general alrededor de $x=\pi$ de la ecuación
$$y'' \;+\; y \;=\; \tan(x) \;+\; 3x \;-\; 1\,,$$
y determine además el intervalo máximo donde está definida.

Capítulo 5

Aplicaciones de Ecuaciones Ordinarias de Segundo Orden

Así como hemos hecho con las ecuaciones diferenciales de primer orden, presentamos ahora algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

5.1 Curvas de Persecución

La primera aplicación que veremos se refiere a la determinación de la trayectoria que sigue un cazador al perseguir su presa.

Ejemplo 5.1.1 Supongamos que un barco A, que viaja a velocidad constante α, está persiguiendo a un barco B que viaja a velocidad constante β. En $t = 0$, suponemos que A se encuentra en el origen $(0,0)$ y que B está en el punto $(b,0)$, $b > 0$; y que para $t > 0$, B se desplaza por la recta $x = b$. Al cabo se t horas, A se encuentra en $P = (x,y)$ y B en $Q = (b, \beta t)$. Determine la trayectoria de A como función de x para el caso $\alpha > \beta$.

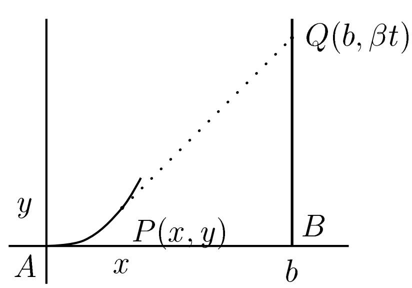


Figura 26

Como el barco A persigue al barco B, la recta tangente al gráfico de la curva $y = y(x)$ en el punto P debe pasar por el punto Q. Esto implica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \beta t}{x - b} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{y - y'(x-b)}{\beta} \,.$$

Como A avanza con velocidad constante α, en el tiempo t recorre αt kilometros. Luego la longitud de la curva que recorre A en el tiempo t es αt; es decir,

$$\alpha t \;=\; \int_0^x \sqrt{1+(y'(u))^2}\,du \quad\Longrightarrow\quad \frac{\alpha}{\beta}(y-y'(x-b)) \;=\; \int_0^x \sqrt{1+(y'(u))^2}\,du\,.$$

Poniendo $y'=w$, tenemos

$$\frac{\alpha}{\beta}(y-w(x-b)) \;=\; \int_0^x \sqrt{1+w(u)^2}\,du\,,$$

y derivando con respecto a x

$$\frac{\alpha}{\beta}(y'-w'(x-b)-w) \;=\; \sqrt{1+w^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\alpha}{\beta}(b-x)w' \;=\; \sqrt{1+w^2}\,.$$

Separando variables obtenemos la ecuación

$$\frac{dw}{\sqrt{1+w^2}} \;=\; -\frac{\beta}{\alpha}\frac{dx}{x-b}\,.$$

Las condiciones del problema indican que $w(0)=0$. Integrando tenemos

$$\ln\left(w+\sqrt{1+w^2}\right) \;=\; -\frac{\beta}{\alpha}\ln\left(\frac{x-b}{-b}\right)$$

$$\Longrightarrow\quad w+\sqrt{1+w^2} \;=\; \left(\frac{b}{b-x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\Longrightarrow\quad \sqrt{1+w^2} \;=\; -w \;+\; \left(\frac{b}{b-x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\Longrightarrow\quad 1+w^2 \;=\; w^2 \;-\; 2w\left(\frac{b}{b-x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \;+\; \left(\frac{b}{b-x}\right)^{2\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\Longrightarrow\quad 2w\left(\frac{b}{b-x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \;=\; \left(\frac{b}{b-x}\right)^{2\frac{\beta}{\alpha}} \;-\; 1$$

$$\Longrightarrow\quad w(x) \;=\; \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b}{b-x}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \;-\; \left(\frac{b}{b-x}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}}\right]$$

$$\Longrightarrow\quad w(x) \;=\; \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha}} \;-\; \left(1-\frac{x}{b}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]$$

$$\Longrightarrow\quad y(x) \;=\; \frac{b}{2}\left[\frac{\left(1-\frac{x}{b}\right)^{1+\frac{\beta}{\alpha}}}{1+\frac{\beta}{\alpha}} \;-\; \frac{\left(1-\frac{x}{b}\right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\right] \;+\; \frac{b\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\,.$$

Cuando el barco A cruza la recta $x = b$ captura al barco B. Por lo tanto el punto en que el barco A intercepta al barco B es

$$(b, y(b)) \;=\; \left(b, \frac{b\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right) \;,$$

y el tiempo $\bar{t}$ que demora la captura es

$$\bar{t} \;=\; \frac{b\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \;.$$

Ejercicio 5.1.2 Desarrolle el ejemplo anterior para el caso $\alpha = \beta$.

Ejercicio 5.1.3 Un conejo parte del punto $(2, 0)$ y corre por $x = 2$ a una velocidad de 10 Km/H. Al mismo tiempo un perro sale de $(0, 0)$ con velocidad 15 Km/H persiguiendo al conejo. ¿ Cuanto tiempo demora el perro en pillar al conejo?

5.2 Movimiento de una Partícula

La ecuación del movimiento de una partícula, según la Segunda Ley de Newton, es

$$\mathbf{m}\,\ddot{x} \;=\; \mathbf{F}\,, \tag{5.1}$$

donde

F es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

m es la masa de la partícula.

$\ddot{x}$ es la aceleración de la partícula relativa a algún sistema de referencia.

A.- Movimiento rectilíneo.
1.- Partícula proyectada verticalmente hacia arriba.
Supondremos que las únicas fuerzas que actúan son:

a) la fuerza gravitacional mg, donde m es la masa de la partícula, y

b) una fuerza de resistencia proporcional al producto del cuadrado de su velocidad por su masa.

Designemos por $x(t)$ la altura en que se encuentra la partícula medida desde el punto de propulsión en un instante t posterior, y por $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ su velocidad. Reemplazando en (5.1) obtenemos la ecuación de segundo orden

$$m\ddot{x} = -mg - mk(\dot{x})^2\,,$$

que se reduce, usando la relación $v = \dot{x}$ y simplificando por m, a

$$\dot{v} = -g - kv^2 \,. \tag{5.2}$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{\dot{v}}{g + kv^2} = -1 \iff \frac{dv}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{g}}\ v\right)^2} = -gdt \,.$$

Integrando el lado izquierdo entre $v_0 = v(0)$ (velocidad inicial) y $v(t)$ y el lado derecho entre 0 y t se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{kg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\ v(t)\right) = -t + \frac{1}{\sqrt{kg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\ v_0\right) \,.$$

Observe que para

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{kg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\ v_0\right)$$

tenemos $v(\bar{t}) = 0$. Luego este $\bar{t}$ es el tiempo que debe trascurrir para que la partícula alcance su altura máxima.

Para poder calcular $\bar{x} = x(\bar{t})$, es decir, la altura máxima que alcanza la partícula, vamos a escribir nuestra ecuación (5.2) en términos de v y de x.

Tenemos

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\, v \,,$$

y reemplazando en (5.2) obtenemos

$$\begin{aligned} v\,\frac{dv}{dx} = -g - kv^2 \quad &\iff \quad \frac{vdv}{g + kv^2} = -dx \\ &\iff \quad \frac{2kvdv}{g + kv^2} = -2kdx \,. \end{aligned}$$

Observemos que como la altura inicial $x(0) = 0$, tenemos que $v_0 = v(x)/_{x=0}$. Entonces integrando el lado izquierdo entre $v_0 = v(0)$ y $v(x)$ y el lado derecho entre 0 y x, se obtiene

$$\ln(g + kv(x)^2) - \ln(g + kv_0^2) = -2kx \,.$$

Para calcular $\bar{x}$ resolvemos $v(\bar{x}) = 0$; luego

$$\bar{x} = -\frac{1}{2k}(\ln(g) - \ln(g + kv_0^2)) = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{g + kv_0^2}{g}\right) \ = \ \frac{1}{2k} \ln\left(1 + \frac{k}{g}v_0^2\right) \,.$$

2.- Partícula proyectada verticalmente hacia abajo.

Supondremos que las únicas fuerzas que actúan son:

a) la fuerza gravitacional mg, donde m es la masa de la partícula, y

b) una fuerza de resistencia proporcional al producto del cuadrado de su velocidad por su masa.

Designemos nuevamente por $x(t)$ la distancia recorrida por la partícula en un instante t posterior, y por $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ su velocidad.
Nuestra ecuación es ahora

$$m\ddot{x} = mg - mk(\dot{x})^2 \,,$$

ya que ahora la fuerza gravitacional está a favor del movimiento de la partícula. Usando la relación $v = \dot{x}$ y simplificando por m, obtenemos

$$\dot{v} = g - kv^2 \,. \tag{5.3}$$

Sea $v_0 = v(0)$ la velocidad inicial. Observe primero que si $v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}}$, tenemos la solución constante $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$ y por lo tanto $x(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\, t$.
Para $v_0 \neq \sqrt{\frac{g}{k}}$ la ecuación se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dv}{g - kv^2} = dt \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{dv}{1 - (\sqrt{\frac{k}{g}}\, v)^2} = g dt \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{dv}{1 - \sqrt{\frac{k}{g}}\, v} + \frac{dv}{1 + \sqrt{\frac{k}{g}}\, v} = 2g dt \,. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Como la ecuación (5.3) cumple las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones (Teorema 4.1.1) y $\tilde{v}(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$ es solución, la condición

$$v_0 < \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \Longrightarrow \quad v(t) < \sqrt{\frac{g}{k}} \qquad \forall\, t \geq 0 \,,$$

y la condición

$$v_0 > \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \Longrightarrow \quad v(t) > \sqrt{\frac{g}{k}} \qquad \forall\, t \geq 0 \,.$$

Luego en cualquiera de los dos casos se tiene

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{k}{g}}\, v(t)}{1 - \sqrt{\frac{k}{g}}\, v_0} \;>\; 0 \quad \forall\, t \geq 0 \,.$$

Por lo tanto, integrando el lado izquierdo de (5.4) entre v_0 y $v(t)$ y el lado derecho entre 0 y t se obtiene

$$\sqrt{\frac{g}{k}} \left[-\ln\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{k}{g}}\, v(t)}{1 - \sqrt{\frac{k}{g}}\, v_0} \right) + \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{k}{g}}\, v(t)}{1 + \sqrt{\frac{k}{g}}\, v_0} \right) \right] = 2gt \,.$$

Agrupando y exponenciando se tiene

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\;v(t)}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\;v(t)}\;\frac{\sqrt{g}-\sqrt{k}\;v_0}{\sqrt{g}+\sqrt{k}\;v_0}=e^{2\sqrt{kg}\,t}\,.$$

Despejando la variable v y denotando $K\;=\;\frac{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v_0}{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v_0}$, se tiene

$$K\,\sqrt{g}+K\,\sqrt{k}\,v\;=\;(\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v)\,e^{2\sqrt{kg}\,t}\,.$$

Esto es,

$$v\,\sqrt{k}\,\left(K+e^{2\sqrt{kg}\,t}\right)\;=\;\sqrt{g}\,\left(e^{2\sqrt{kg}\,t}-K\right)\,.$$

Así

$$\frac{dx}{dt}\;=\;v\;=\;\sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{kg}\,t}\;-\;K}{e^{2\sqrt{kg}\,t}\;+\;K}\,,$$

que implica

$$dx\;=\;\sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{kg}\,t}\;-\;K}{e^{2\sqrt{kg}\,t}\;+\;K}\,dt\,. \tag{5.5}$$

Sea $w\;=\;K+e^{2\sqrt{kg}\,t}$; entonces $dw\;=\;2\sqrt{kg}\,e^{2\sqrt{kg}\,t}\,dt$, y como $w-K\;=\;e^{2\sqrt{kg}\,t}$, obtenemos

$$dw\;=\;2\,\sqrt{kg}\cdot(w-K)\,dt\,.$$

Luego

$$\frac{1}{2\,\sqrt{kg}}\,\frac{dw}{w-K}\;=\;dt\,.$$

De esta forma, reemplazando en (5.5) se obtiene

$$\begin{aligned}
dx\;&=\;\sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{(w-K)\;-\;K}{w}\cdot\frac{dw}{2\,\sqrt{kg}\,(w-K)}\\
&=\;\sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{1}{2\,\sqrt{kg}}\cdot\frac{w-2\,K}{w\,(w-K)}\,dw\\
&=\;\frac{1}{2\,k}\cdot\left[\frac{1}{w-K}\;-\;\frac{2\,K}{w\,(w-K)}\right]\,dw\\
&=\;\frac{1}{2\,k}\,\frac{dw}{w-K}\;+\;\frac{1}{k}\,\left[\frac{1}{w}\;-\;\frac{1}{w-K}\right]\,dw\\
&=\;\frac{1}{k}\,\frac{dw}{w}\;-\;\frac{1}{2\,k}\,\frac{dw}{w-K}\,.
\end{aligned}$$

Como para todo $t\geq 0$ se tiene $w(t)\geq w(0)\;=\;1+K>0$, integrando obtenemos

$$x(w)\;=\;\frac{1}{k}\,\ln\left(\frac{w}{K+1}\right)\;-\;\frac{1}{2\,k}\,\ln\left(\frac{w-K}{1}\right)\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{K + e^{2\sqrt{kg}\,t}}{1+K}\right) - \frac{1}{2\,k} \ln\left(e^{2\sqrt{kg}\,t}\right) \\ &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{K + e^{2\sqrt{kg}\,t}}{K+1}\right) - \sqrt{\frac{g}{k}}\,t\,. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Observe que cuando $v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}}$, tenemos $K = 0$, y reemplazando este valor en (5.6), se recupera la solución $x(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\,t$, obtenida anteriormente.

3.- Partícula proyectada hacia arriba desde la superficie de la Luna.
Supondremos que la única fuerza que domina es la fuerza gravitacional y que esta varía con la altura. Se sabe que la fuerza gravitacional de cualquier planeta o luna varía inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro. Usando esto tenemos la ecuación

$$m\ddot{r} = -kr^{-2}\,,$$

donde $r(t)$ es la distancia a que se encuentra la partícula en el instante t, medida desde el centro de la luna.

Como $v = \frac{dr}{dt}$, tenemos $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\,\frac{dr}{dt} = v\,\frac{dv}{dr}$.
Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} mv\frac{dv}{dr} = -\frac{k}{r^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad mvdv = -\frac{k}{r^2}dr \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{m}{2}v(r)^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0} \\ &\Longleftrightarrow \quad v(r)^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{k}{r} - \frac{k}{r_0} + \frac{m}{2}\,v_0^2\right)\,. \end{aligned}$$

Si a es el radio medio de la luna, tenemos $k = mg_0\,a^2$ donde g_0 es la gravedad sobre la superficie de la luna. Reemplazando en la ultima ecuación se obtiene

$$v(r)^2 = 2g_0\,a\left(\frac{a}{r} - 1 + \frac{v_0^2}{2g_0\,a}\right)\,.$$

Si ocurre que $\frac{v_0^2}{2g_0\,a} > 1$, es decir si $v_0^2 > 2g_0\,a$, entonces $v(r) > 0$ para todo t, y la partícula escapa del campo gravitacional de la luna.
Por el contrario, si $\frac{v_0^2}{2g_0\,a} < 1$, entonces existe cierta altura $\bar{r}$ en la cual $v(\bar{r}) = 0$, es decir, la partícula alcanza una altura máxima $\bar{r}$ y luego regresa a la superficie de la luna. Es fácil ver que

$$\bar{r} \;=\; \frac{a}{1 - \frac{v_0^2}{2\,g_0\,a}}\,.$$

Para calcular el tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima $\bar{r}$, consideramos

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2g_0\, a\left(\frac{a}{r} - 1 + \frac{v_0^2}{2g_0\, a}\right)}$$

(con $+\sqrt{\dots}$ ya que $v_0 > 0$), o bien

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{a}{r} + c_1}} = \sqrt{2g_0\, a}\, dt\,,$$

con $c_1 = \frac{v_0^2}{2g_0\, a} - 1$.
Resuelta esta ecuación debemos encontrar $\bar{t}$ tal que $r(\bar{t}) = \bar{r}$.

4.- Un paracaidista cuyo peso (es decir, masa) es de 80 Kg. se deja caer de un helicóptero que se mantiene a 6.000 mts. de altura. Suponemos que cae bajo la influencia de una fuerza gravitacional constante y que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista. La constante de proporcionalidad es 10 Kg/seg cuando el paracaídas está cerrado y 100 kg/seg cuando el paracaídas está abierto.
Si el paracaídas se abre 1 minuto después que el paracaidista abandona el helicóptero, ¿ al cabo de cuanto tiempo llegará a la superficie?

Solución: Sea $x(t)$ la distancia relativa al helicóptero en que se encuentra el paracaidista en el instante t. Luego la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x}(t) = mg - k\dot{x}(t), \quad \dot{x} = v\,,$$

es decir,

$$m\dot{v} = mg - kv \Longrightarrow \frac{dv}{-g + \frac{k}{m}v} = -dt\,,$$

e integrando

$$\begin{aligned} \frac{m}{k}\ln\left(\frac{-g + \frac{k}{m}v(t)}{-g + \frac{k}{m}v_0}\right) &= -t \\ \Longrightarrow \quad -g + \frac{k}{m}v(t) &= \left(-g + \frac{k}{m}v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t} \\ \Longrightarrow \quad v(t) &= \frac{m}{k}g + \left(v_0 - \frac{m}{k}g\right)e^{-\frac{k}{m}t}\,. \end{aligned}$$

Tenemos $m = 80Kg$ y consideremos $g = 9,81mt/seg^2$. Cuando el paracaídas está cerrado tenemos $v_0 = 0$ y $k = 10Kg/seg$. Esto nos dá

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{m}{k}g(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = 78,48\left(1 - e^{-\frac{1}{8}t}\right) \\ \Longrightarrow \quad x(t) &= 78,48\left[t + 8\left(e^{-\frac{1}{8}t} - 1\right)\right] = 78,48t + 627,84\left(e^{-\frac{1}{8}t} - 1\right)\,. \end{aligned}$$

Como $e^{-\frac{1}{8}t} - 1$ evaluado en $t = 60$ es $-0.99944692..$, aproximando esta cantidad por -1 obtenemos

$$v(60) = 78,48 \quad \text{y} \quad x(60) = 4.080,96\,.$$

Cuando el paracaídas se abre en la ecuación

$$v(t) = \frac{m}{k}g + \left(v_0 - \frac{m}{k}g\right) e^{-\frac{k}{m}t}$$

tenemos $k = 100Kg/seg$ y las condiciones iniciales $x(0) = 4.080,96$ y $v_0 = 78,48$. Luego

$$\begin{aligned} & v(t) = 7,848 + (78,48 - 7,848)e^{-\frac{5}{4}t} \\ \Longrightarrow \quad & v(t) = 7,848 + 70,632e^{-\frac{5}{4}t} \\ \Longrightarrow \quad & x(t) = 7,848t - 56,5056\left(e^{-\frac{5}{4}t} - 1\right) + 4.080,96\,. \end{aligned}$$

Luego debemos resolver

$$7,848t - 56,5056\left(e^{-\frac{5}{4}t} - 1\right) + 4.080,96 = 6.000\,,$$

o lo que es lo mismo

$$7,848t - 56,5056e^{-\frac{5}{4}t} = 1.975,5456\,.$$

La solución de esta ecuación es aproximadamente $t = 251,725$ segundos. Luego se demora aproximadamente $311,725$ segundos en llegar a la superficie.

B.- Proyectiles (sin resistencia del aire).

Suponemos que hay una velocidad inicial y que luego está sometido solo al campo gravitacional.

Sean x, z las coordenados del plano del movimiento. Suponemos

$(x, z) = x\vec{i} + z\vec{k}$,

$-mg\vec{k}$: fuerza gravitacional actuante,

$\vec{V_0} = V_0(\cos(\alpha)\vec{i} + \mathbf{sen}(\alpha)\vec{k})$: vector velocidad inicial,

$r(t) = (x(t), z(t))$: posición del proyectil en el instante t.

La ecuación del movimiento es entonces

$$m\ddot{r} = -mg\vec{k}$$

e integrando obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -g\vec{k}t + \dot{r}(0) = -g\vec{k}t + \vec{V_0}\,, \quad \text{lo que implica} \\ r(t) &= -g\vec{k}\frac{t^2}{2} + \vec{V_0}t\,. \end{aligned}$$

Es decir,

$$r(t) = (x(t), z(t)) = (V_0 \cos(\alpha)t, V_0 \mathrm{sen}(\alpha)t - g\frac{t^2}{2}) \,.$$

Así

$$\begin{aligned} x(t) = V_0 \cos(\alpha)t \quad &\Longleftrightarrow \quad t = \frac{x(t)}{V_0 \cos(\alpha)} \\ &\Longleftrightarrow \quad z(x) = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2(V_0 \cos(\alpha))^2}x^2 \,. \end{aligned}$$

Observaciones 5.2.1 1) Note que $z'(x) = 0 \Longleftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{g}{(V_0 \cos(\alpha))^2}x$, lo que implica $x = \frac{V_0^2}{g}\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha) =$ valor donde el proyectil alcanza su altura máxima.

2)

$$\begin{aligned} z(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{2V_0^2(\cos(\alpha))^2}{g}\tan(\alpha) \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{2V_0^2 \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\alpha)}{g} = \frac{V_0^2}{g}\mathrm{sen}(2\alpha) \,. \end{aligned}$$

Este valor $x = \frac{V_0^2}{g}\mathrm{sen}(2\alpha)$ es el blanco del proyectil.

3) El proyectil recorre una distancia máxima cuando $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y esta distancia es $x = \frac{V_0^2}{g}$. Observe que esta distancia es proporcional al cuadrado de la velocidad inicial.

5.3 Vibraciones en Sistemas Mecánicos

Aparecen cuando se perturba un sistema físico en equilibrio que luego queda sujeto a fuerzas que tienden a restaurar el equilibrio.

1.- Vibraciones armónicas simples no amortiguadas. Consideremos un carro de masa m sujeta por un muelle a un muro.

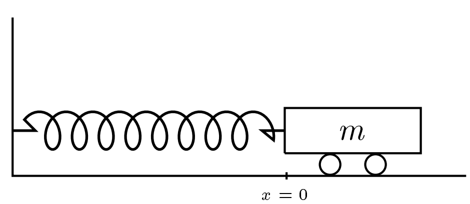


Figura 27

El muelle no ejerce fuerza cuando el carro está en su posición de equilibrio, $x = 0$. Pero si se desplaza una distancia x, entonces el muelle ejerce una fuerza restauradora opuesta a la dirección del alargamiento y con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento (Ley de Hooke):

$$F_s = -kx\,,\ k > 0\,.$$

La constante k se llama constante de rigidez del muelle.

Si aplicamos la Segunda Ley de Newton (Fuerza total = masa . aceleración) obtenemos la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

La ecuación característica es

$$p^2 + \frac{k}{m} = 0\,,$$

y luego la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \ + \ c_2 \text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Si en el instante inicial $t = 0$, el carro se lleva a la posición $x = x_0$ y desde allí se suelta sin velocidad inicial, tenemos las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 \qquad \text{y} \qquad v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0\,,$$

y obtenemos $c_1 = x_0$ y $c_2 = 0$. Luego tenemos la solución

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\ ,$$

cuyo gráfico es

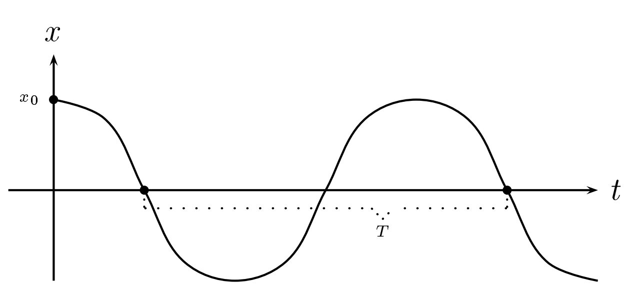


Figura 28

Entonces la *amplitud* de la vibración es x_0, el *período* (tiempo requerido para completar un *ciclo*) es $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ y la frecuencia de la vibración (número de ciclos por unidad de tiempo) es $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Observe que f crece cuando crece la rigidez k del muelle y cuando decrece la masa m del carro.

En el caso que $v(0) = v_0 > 0$, tenemos $c_1 = x_0$ y

$$x'(t) \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}\left[-x_0\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \;+\; c_2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right],$$

lo que implica

$$v_0 \;=\; x'(0) \;=\; \sqrt{\frac{k}{m}}c_2 \quad\Longrightarrow\quad c_2 \;=\; v_0\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Entonces

$$x(t) \;=\; x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \;+\; v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right),$$

que se puede escribir de la forma

$$x(t) \;=\; A\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\phi\right),$$

donde $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$ es la amplitud, $\phi = \arctan\left(\frac{x_0}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ es el ángulo de fase, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ es el período y $f = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi}$ es la frecuencia natural.

2.- Vibraciones amortiguadas. En este caso se agrega el efecto de una fuerza de amortiguamiento F_d, debida a la viscosidad del medio en que el carro se mueve (aire, agua, aceite, etc.), también opuesta a la dirección del alargamiento y con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento:

$$F_d = -c\,\frac{dx}{dt}\,,\quad c > 0\,,\qquad c:\ \text{resistencia del medio}\,.$$

Tenemos entonces la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d\,,\qquad \text{o bién}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

La ecuación característica es

$$p^2 + \frac{c}{m}p + \frac{k}{m} = 0\,,$$

que tiene raíces

$$p_1, p_2 \;=\; -\frac{c}{2m} \;\pm\; \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 \;-\; \frac{k}{m}}\,.$$

A) Vibraciones Sobreamortiguadas. Corresponden al caso $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$ (es decir, $c > 2\sqrt{km}$).

Entonces p_1, p_2 son números negativos distintos y la solución general es

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}.$$

Bajo las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, se obtiene

$$x(t) = \frac{x_0}{p_1 - p_2}\left(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}\right).$$

cuyo gráfico es

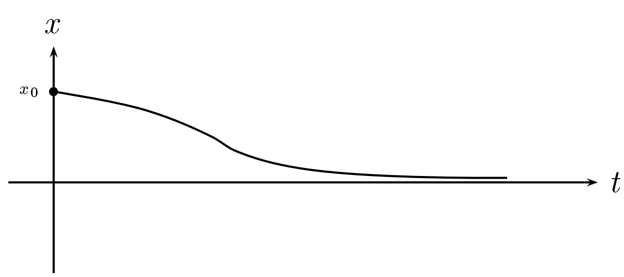


Figura 29

Observe que no hay vibración y el carro tiende a restaurar su posición de equilibrio.

B) Vibraciones críticamente amortiguadas. En este caso $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$ (es decir, $c = 2\sqrt{km}$).

Aquí $p_1 = p_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}$ y la solución general es

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}.$$

Al imponer las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, se obtiene

$$x(t) = x_0(1 + \sqrt{\frac{k}{m}}\,t)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}$$

cuyo gráfico es del mismo tipo que el de la Figura 29. Luego no hay vibración y el carro tiende a ir a su posición de equilibrio.

C) Vibraciones Subamortiguadas. Ahora $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$ (es decir, $c < 2\sqrt{km}$).

Tenemos

$$p_1, p_2 = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2},$$

y la solución general es

$$x(t) = e^{-b\,t}\left[c_1 \cos(\alpha\, t) + c_2 \mathrm{sen}(\alpha\, t)\right],$$

donde $b = \frac{c}{2m}$ y $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m} \; - \; \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$.

Con las condiciones $x(0) = x_0$ y $v(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, se obtiene

$$x(t) \;=\; \frac{x_0}{\alpha} e^{-b\,t} \left[\alpha \cos(\alpha\, t) \;+\; b\mathrm{sen}(\alpha\, t)\right] .$$

Si ponemos además $\theta = \arctan\left(\frac{b}{\alpha}\right)$ tenemos

$$x(t) \;=\; \frac{x_0\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha} e^{-b\,t} \cos(\alpha t - \theta)\,,$$

cuyo gráfico es

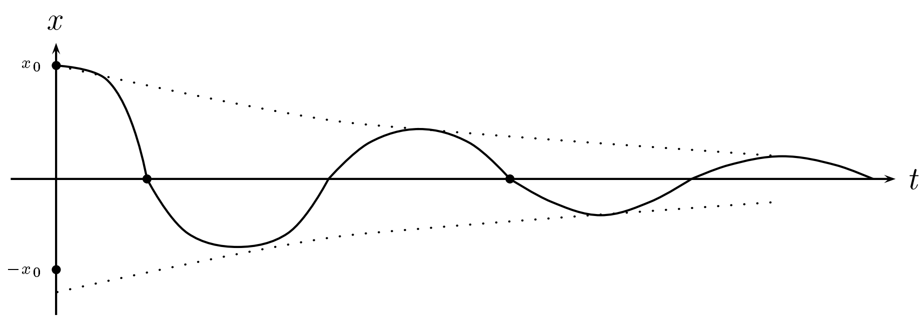


Figura 30

Observe que la amplitud decrece exponencialmente. No es periódica, pero cruza la posición de equilibrio $x = 0$ en intervalos regulares. Así podemos considerar $T = \frac{2\pi}{\alpha}$. Además el número $f = \frac{1}{T} = \frac{\alpha}{2\pi}$, es llamado la *frecuencia natural* del sistema.

2.- Vibraciones forzadas. A las fuerzas anteriores agregamos una fuerza externa $F_e = f(t)$ que actúa sobre el carro. Esta se puede producir por vibraciones del muro o por un campo magnético externo.

Tenemos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_s + F_d + F_e\,,$$

lo que implica

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f(t)\,.$$

Un caso importante es cuando la fuerza externa es periódica

$$f(t) = F_0 \cos(wt)\,.$$

En ese caso la ecuación diferencial es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(wt)\,.$$

Como ya conocemos la solución de la ecuación homogénea correspondiente, podemos usar el método de los coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular, y con ello la solución general de nuestra ecuación. Entonces si iw no es raíz de la ecuación característica, buscamos una solución del tipo

$$x_p(t) = A\mathrm{sen}(wt) + B\cos(w(t)\,.$$

Tenemos las derivadas

$$x_p'(t) = w(A\cos(wt) - B\mathrm{sen}(w(t))\,, \qquad x_p''(t) = -w^2(A\mathrm{sen}(wt) + B\cos(w(t))\,,$$

y reemplazando en nuestra ecuación multiplicada por m, obtenemos

$$\begin{aligned} F_0\cos(wt) &= k(A\mathrm{sen}(wt) + B\cos(w(t)) + cw(A\cos(wt) - B\mathrm{sen}(w(t)) \\ &\quad -mw^2(A\mathrm{sen}(wt) + B\cos(w(t))\,. \end{aligned}$$

Luego las constantes A y B deben verificar

$$\begin{cases} wcA + (k - mw^2)B &= F_0 \\ (k - mw^2)A - wcB &= 0\,. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$A = \frac{wcF_0}{(k - mw^2)^2 + w^2c^2} \qquad B = \frac{F_0(k - mw^2)}{(k - mw^2)^2 + w^2c^2}\,,$$

y

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(k - mw^2)^2 + w^2c^2}\left[wc\mathrm{sen}(wt) + (k - mw^2)\cos(wt)\right]\,.$$

Si ponemos $\phi = \arctan\left(\frac{wc}{k - mw^2}\right)$, podemos escribir

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + w^2c^2}}\cos(wt - \phi)\,.$$

Así por ejemplo, en el caso subamortiguado, la solución general es

$$x(t) = e^{-b\,t}\left[c_1\cos(\alpha\, t) \;+\; c_2\mathrm{sen}(\alpha\, t)\right] \;+\; \frac{F_0}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + w^2c^2}}\cos(wt - \phi)\,.$$

El primer sumando de esta expresión se llama *término transitorio* (tiende a cero cuando t se va para infinito) y el segundo sumando *parte estacionaria* (prevalece cuando el tiempo se hace grande). Por ello, se dice que la frecuencia de esta vibración es $\frac{w}{2\pi}$ y que su amplitud es $\frac{F_0}{\sqrt{(k-mw^2)^2+w^2c^2}}$.

Caso importante. Consideremos el caso anterior cuando la constante de amortiguación c es nula y iw es raíz de la ecuación característica (es decir $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$). Tenemos entonces la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\,.$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) \;=\; c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) ,$$

que se puede escribir de la forma

$$x_h(t) \;=\; A\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi\right) ,$$

con $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y $\phi = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$.

Debemos buscar solución particular de ecuación no-homogénea de la forma

$$x_p(t) \;=\; Ct \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + Dt\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) .$$

Calculando la primera y segunda derivada de $x_p(t)$ y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$C \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad D \;=\; \frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} ,$$

y por lo tanto

$$x_p(t) \;=\; \frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\, t\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) .$$

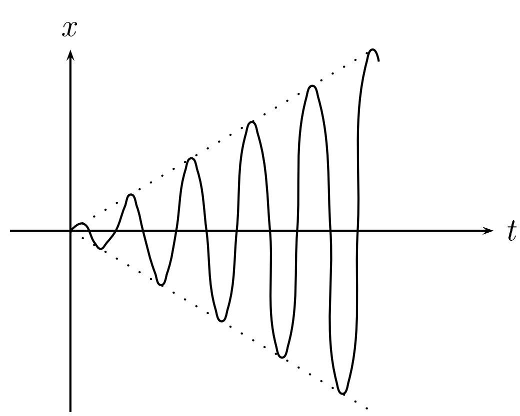


Figura 31

De esta forma la solución general es

$$x(t) \;=\; A\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \phi\right) \;+\; \frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\, t\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) .$$

Observe que la curva $x = x_h(t)$, cuyo gráfico es similar al de la Figura 28, presenta oscilaciones uniformes. Pero la solución $x_p(t)$, como lo muestra la Figura 31, oscila entre los valores $\pm\frac{F_0}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}$, y por lo tanto, su magnitud máxima tiende a infinito cuando t tiende a infinito.

Luego si en el sistema

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(wt)\,.$$

la constante de amortiguación c es muy pequeña, el sistema está sujeto a grandes oscilaciones cuando la función de forzamiento tiene frecuencia (w) cercana a la frecuencia de **resonancia** del sistema $(\sqrt{\frac{k}{m}})$.

Estas grande vibraciones en resonancia son las que preocupan a los ingenieros. Se sabe que las vibraciones en resonancia ocasionan que las alas de los aviones se rompan, que los puentes se desplomen, etc.

Ejemplo 5.3.1 Una masa que pesa 4 lb. estira un resorte 3 pulgadas al llegar al reposo en equilibrio. Se tira luego de la masa 6 pulgadas debajo del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad de $\sqrt{2}$ pie/seg dirigida hacia abajo. Despreciando todas las fuerzas de amortiguación y externas que puedan estar presentes, determine la ecuación del movimiento de la masa junto con su amplitud, periodo y frecuencia natural ¿ Cuánto tiempo transcurre desde que se suelta la masa hasta que pasa por la posición de equilibrio?

Como estamos en el caso de una vibración simple no amortiguada, tenemos la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\,,$$

cuya solución general es

$$x(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \;+\; c_2\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\;, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Para encontrar k observamos que la masa de 4 lb. estira el resorte 3 pulgadas o 1/4 pie. Empleando la ley de Hooke, se tiene

$$4 = mg = k\frac{1}{4}\,,$$

lo que implica k =16 lb/pie. Como $g = 32$ pie/seg^2, se tiene que $m = 4/32 = 1/8$ slug y por lo tanto

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{16}{1/8}} = 8\sqrt{2}\,.$$

Luego
$$x(t) = c_1 \cos\left(8\sqrt{2}\,t\right) \;+\; c_2 \operatorname{sen}\left(8\sqrt{2}\,t\right)\,.$$
Imponiendo nuestras condiciones iniciales son $x(0) = 6$ pulgadas $= 1/2$ pie y $x'(0) = \sqrt{2}$ pie/seg, tenemos
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= x(0) = c_1\,, \\ \sqrt{2} &= x'(0) = 8\sqrt{2}c_2\,, \end{aligned}$$
lo que implica $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = \frac{1}{8}$. Por consiguiente, la ecuación del movimiento de la masa es
$$x(t) \;=\; \frac{1}{2}\cos\left(8\sqrt{2}\,t\right) \;+\; \frac{1}{8}\operatorname{sen}\left(8\sqrt{2}\,t\right)\,.$$
Para expresar la solución en forma senoidal hacemos
$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{\sqrt{17}}{8}\,, \quad \tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2} = 4\,,$$
Entonces
$$x(t) \;=\; \frac{\sqrt{17}}{8}\operatorname{sen}\left(8\sqrt{2}\,t + \phi\right)\,,$$
con $\phi = \arctan(4) = 1.326$.

Por lo tanto, la amplitud es $A = \frac{\sqrt{17}}{8}$, el período es $T = \frac{2\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ y la frecuencia natural es $f = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$. Finalmente el tiempo $\bar{t}$ que transcurre desde que se suelta la masa hasta que pasa por la posición de equilibrio verifica $8\sqrt{2}\;\bar{t} + \phi = \pi$, lo que implica $\bar{t} = \frac{\pi-\phi}{8\sqrt{2}} = 0.16042...$

5.4 Circuitos eléctricos simples

Establecimos en 3.4, para un circuito del tipo

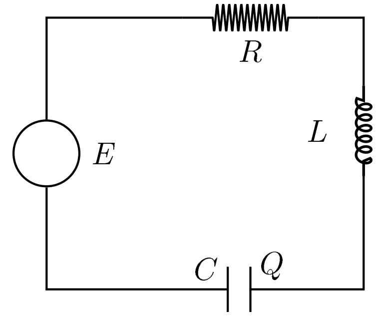


Figura 32

la ecuación diferencial
$$L\frac{dI}{dt} \;+\; RI \;+\; \frac{1}{C}q \;=\; E(t)\,, \tag{5.7}$$

donde:

I	=	intensidad de la corriente (amperios),
E	=	fuerza electromotriz (voltios),
R	=	resistencia (ohmios),
L	=	inductancia (henrios),
C	=	capacitancia (faradios),
q	=	carga (coulombs).

Como la intensidad de corriente es igual a la razón del cambio instantáneo de la carga, es decir, $I = \frac{dq}{dt}$, tenemos la ecuación

$$L\frac{d^2q}{dt^2} \;+\; R\frac{dq}{dt} \;+\; \frac{1}{C}q \;=\; E(t)\,; \tag{5.8}$$

o bien, diferenciando

$$L\frac{d^2I}{dt^2} \;+\; R\frac{dI}{dt} \;+\; \frac{1}{C}I \;=\; \frac{dE}{dt}\cdot \tag{5.9}$$

Ejemplo 5.4.1 Un circuito RLC en serie tiene una fem dada por $E(t) = \text{sen}(100\,t)$ voltios, un resistor de 0,02 ohmios, un inductor de 0,001 henrios y un capacitor de 2 faradios. Si la corriente inicial y la carga inicial son cero, determinemos la corriente del circuito para $t > 0$.

Tenemos $L = 0,001$, $R = 0,02$, $C = 2$, y $E(t) = \text{sen}(100\,t)$. Reemplazando en (5.9) obtenemos

$$0,001\frac{d^2I}{dt^2} \;+\; 0,02\frac{dI}{dt} \;+\; 0,5I \;=\; 100\cos(100\,t)\,,$$

o bien

$$\frac{d^2I}{dt^2} \;+\; 20\frac{dI}{dt} \;+\; 500I \;=\; 100.000\cos(100\,t)\,.$$

Como la ecuación característica

$$k^2 + 20k + 500 = 0$$

tiene raíces $k = -10 \pm 20\imath$, la solución general de la ecuación homogénea es

$$I_h(t) = e^{-10\,t}[c_1\cos(20\,t) + c_2\text{sen}(20\,t)]\,.$$

Usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos una solución particular de la forma

$$I_p(t) = A\cos(100\,t) + B\text{sen}(100\,t)\,.$$

Reemplazando en la ecuación no homogénea obtenemos

$$A = -\frac{95}{9.425}\,, \qquad B = \frac{20}{9.425}\,,$$

lo que implica

$$I_p(t) = \frac{1}{9.425}[-95\cos(100\,t) + 20\mathrm{sen}(100\,t)]\,.$$

Entonces

$$I(t) = e^{-10\,t}[c_1\cos(20\,t) + c_2\mathrm{sen}(20\,t)] \;+\; \frac{1}{9.425}[-95\cos(100\,t) + 20\mathrm{sen}(100\,t)]\,.$$

Nuestras condiciones iniciales son $I(0) = q(0) = 0$.

Para encontrar $I'(0)$, se sustituyen los valores de L, R y C en (5.7) y se igualan ambos miembros para $t = 0$:

$$(0,001)I'(0) + 0,02I(0) + 0,5q(0) = \mathrm{sen}(0) \quad \Longrightarrow \quad I'(0) = 0\,.$$

Obtenemos así

$$\begin{aligned} 0 = \quad I(0) \quad &= c_1 - \frac{95}{9.425} \\ 0 = \quad I'(0) \quad &= -10c_1 + 20c_2 + \frac{2.000}{9.425}\,, \end{aligned}$$

lo que implica

$$c_1 = \frac{95}{9.425} \qquad \text{y} \qquad c_2 = -\frac{105}{18.850}\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I(t) \quad = \quad & e^{-10\,t}\left[\frac{95}{9.425}\cos(20\,t) - \frac{105}{18.850}\mathrm{sen}(20\,t)\right] \\ & - \frac{95}{9.425}\cos(100\,t) \;+\; \frac{20}{9.425}\mathrm{sen}(100\,t)\,. \end{aligned}$$

5.5 Problemas resueltos

Ejercicio 5.5.1 Un hombre se desplaza en dirección norte con velocidad constante de v_1 metros por segundo. En el instante inicial llama a su perro que se encuentra a 100 metros al este de él. Si el perro corre con velocidad $v_2 = 2v_1$ dirigido a cada instante a su dueño, determine la trayectoria descrita por el perro y el tiempo en que tarda en alcanzar a su amo.

Solución. Supongamos que inicialmente el hombre se encuentra en el origen y que el perro se encuentra en el punto $(100, 0)$. Sea $P = (x, y)$ la posición del perro en el instante t. En ese mismo instante el hombre se encuentra en $H = (0, v_1 t)$.

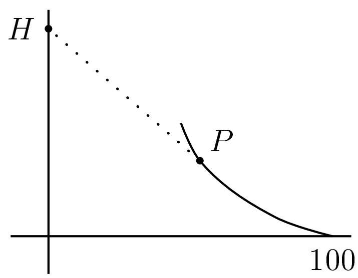


Figura 33

Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - v_1 t}{x} \implies t = \frac{1}{v_1}(y - xy')\,.$$

La longitud de la curva $y = y(x)$ que describe la trayectoria del perro entre el punto $(100, 0)$ y P es

$$v_2 t = \int_x^{100} \sqrt{1 + y'(u)^2}\, du \implies \frac{v_2}{v_1}(y - xy') = \int_x^{100} \sqrt{1 + y'(u)^2}\, du\,.$$

Derivando con respecto a x y usando que $v_2 = 2v_1$, nos queda

$$2(-xy'') = -\sqrt{1 + (y')^2}\,.$$

Poniendo $p = y'$, que implica $p' = y''$, y reemplazando obtenemos

$$\frac{2dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{x}\cdot$$

Al integrar se tiene

$$2\ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \ln(x) + \ln(c) \implies p + \sqrt{1 + p^2} = c \cdot \sqrt{x}\,.$$

Como en $x = 100$, tenemos $y = 0$ y $y' = 0$, debemos tener $c = \frac{1}{10}$, y luego

$$p + \sqrt{1 + p^2} = \frac{\sqrt{x}}{10}\cdot$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} \;=\; p \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x}}{10} \;-\; \frac{10}{\sqrt{x}}\right],$$

e integrando

$$\begin{aligned} y(x) \;&=\; \frac{1}{2}\int_{100}^{x}\left[\frac{\sqrt{u}}{10} \;-\; \frac{10}{\sqrt{u}}\right] du \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{15} \;-\; 20\sqrt{u}\right]\Big/_{100}^{x} \\ &=\; \frac{1}{30}x^{\frac{3}{2}} \;-\; 10\sqrt{x} \;+\; \frac{200}{3}\cdot \end{aligned}$$

De esta forma

$$y(0) \;=\; \frac{200}{3}$$

y el tiempo en que tarda en alcanzar a su amo es

$$\frac{200}{3v_1} \quad \text{segundos.}$$

Ejercicio 5.5.2 Un cuerpo de 8 libras de peso cae desde el reposo hacia la tierra desde gran altura. A medida que cae, la resistencia del aire actúa sobre él. Suponga que esta resistencia en libras, equivale numéricamente al doble de la velocidad, en pies por segundos. Determine la velocidad y la distancia de caída en el tiempo t. Considere $g = 32(pies/seg^2)$. Analice las funciones resultantes en el caso que $t \to \infty$.

Solución. Por la Segunda Ley de Newton se tiene

$$m\,\frac{dv}{dt} \;=\; F_1 \;+\; F_2\,,$$

donde

$$m \;=\; \frac{W}{g} \;=\; \frac{\text{peso}}{g} \;=\; \frac{8}{32} \;=\; \frac{1}{4}\,,$$

$$F_1 \;=\; \text{fuerza de empuje} \;=\; m\,g \;=\; 8\,,$$

y

$$F_2 \;=\; \text{fuerza de resistencia} \;=\; -2\,v\,.$$

Por lo tanto tenemos la ecuación

$$\frac{1}{4}\,\frac{dv}{dt} \;=\; 8 \;-\; 2\,v\,.$$

Separando variables y multiplicando por 4 obtenemos

$$\frac{dv}{4-v} \;=\; 8\,dt\,,$$

e integrando

$$-\ln|4-v| \;=\; 8t \;-\; \ln(c) \quad \Longrightarrow 4 \;-\; v \;=\; c\,e^{-8t}\,.$$

Como $v(0)=0$, debemos tener $c=4$ y luego $v(t) \;=\; 4\,(1-e^{-8t})$.

Para conocer la distancia recorrida en el tiempo t, pongamos $v=\dfrac{dx}{dt}$ con $x(0)=0$. Obtenemos así la ecuación

$$\begin{aligned}
&dx = 4\left(1-e^{-8t}\right)dt \quad \text{cuya solución es}\\
&x(t) = 4\left[t+\frac{e^{-8t}}{8}\right]+c_1 \quad \text{y como} \quad x(0)=0 \quad \Longrightarrow \quad c_1=-\frac{1}{2}\\
&x(t) = 4\left[t+\frac{e^{-8t}}{8}-\frac{1}{8}\right]\,.
\end{aligned}$$

Conclusiones.

a) Como $v(t)=4\,(1-e^{-8t})$, se tiene que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} v(t)=4$.

b) Como $x(t)=4\left[t+\frac{1}{8}e^{-8t}-\frac{1}{8}\right]$, se tiene que $x\to\infty$ si $t\to\infty$.
Esto no implica que el movimiento será eterno. Al llegar a la superficie esta solución no funciona.

Ejercicio 5.5.3 Una barcaza está siendo remolcada a 16 pies/seg . Cuando se revienta la cuerda que tira de ella, a partir de ese momento, continúa su movimiento en línea recta, pero frenándose con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de su velocidad instantánea. Si después de dos minutos de que se revienta la cuerda se observa que la velocidad de la barcaza es de 9 pies/seg , ¿ qué distancia recorrerá antes de quedar en reposo?

Solución. Se tiene

$$\frac{dv}{dt} \;=\; -k\sqrt{v} \quad \text{con las condiciones} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & 0\,,\\ v(0) & = & 16 \text{ pies/seg}\,,\\ v(120) & = & 9 \text{ pies/seg}\,. \end{array}\right.$$

Integrando la ecuación se obtiene

$$2\sqrt{v} \;=\; -kt \;+\; c_1\,.$$

Como $v(0) \;=\; 16$, debemos tener $c_1 \;=\; 8$, y por lo tanto

$$\sqrt{v} \;=\; -\frac{k}{2}t \;+\; 4\,.$$

Pero

$$v(120) \;=\; 9 \quad\Longrightarrow\quad 3 \;=\; -60k + \;4 \quad\Longrightarrow\quad k \;=\; \frac{1}{60}\,,$$

y luego

$$\sqrt{v} \;=\; 4 \;-\; \frac{t}{120}\,.$$

De esta forma

$$\frac{dx}{dt} \;=\; v \;=\; \left(4 \;-\; \frac{t}{120}\right)^2\,,$$

e integrando

$$x(t) \;=\; -\frac{120}{3}\left(4 \;-\; \frac{t}{120}\right)^3 \;+\; c_2 \;=\; -40\left(4 \;-\; \frac{t}{120}\right)^3 \;+\; c_2\,.$$

La condición $x(0) \;=\; 0$ implica $c_2 \;=\; 40 \cdot 4^3 \;=\; 2.560$, y tenemos

$$x(t) \;=\; -40\left(4 \;-\; \frac{t}{120}\right)^3 \;+\; 2.560\,.$$

La barcaza estará en reposo cuando $\frac{dx}{dt} \;=\; 0$, luego esto sucederá a los $t \;=\; 480$ segundos. Además como

$$x(480) \;=\; -40\left(4 \;-\; \frac{480}{120}\right)^3 \;+\; 2.560 \;=\; 2.560 \text{ pies}\,,$$

la distancia que recorre antes de quedar en reposo es de 2.560 pies.

Ejercicio 5.5.4 Una partícula de masa m se desliza *hacia abajo* sobre un plano inclinado bajo la influencia de la gravedad. Si al movimiento se opone una fuerza $f = kmv^2$ y θ es el ángulo de inclinación del plano, encontrar:

a) La velocidad de la partícula en función del tiempo, suponiendo que parte del reposo.

b) El desplazamiento en función del tiempo si $x(0) = 0$.

c) El tiempo necesario para que se desplace una distancia d desde el reposo.

Solución. La ecuación del movimiento es

$$m\frac{dv}{dt} = mg\text{sen}(\theta) - kmv^2\,.$$

a) Separando variables obtenemos

$$\frac{dv}{A - v^2} = k dt\,, \quad \text{donde} \quad A = \sqrt{\frac{g}{k}\text{sen}(\theta)}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dv}{v-A} - \frac{dv}{v+A} = -2Akdt\,.$$

Como $v(0) = 0$, integrando obtenemos

$$\ln(v(t) - A) - \ln(-A) - \ln(v + A) + \ln(A) = -2kAt\,,$$

y exponenciando

$$\frac{v(t) - A}{-A} \quad \frac{A}{v(t) + A} = e^{-2kAt} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{v(t) - A}{v(t) + A} = e^{-2Akt}\,.$$

Despejando y reemplazando el valor de A se tiene

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}\mathrm{sen}(\theta)}\,\frac{1 - e^{-2\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t}}{1 + e^{-2\sqrt{kg\mathrm{sen}(\theta)}\,t}} = \sqrt{\frac{g}{k}\mathrm{sen}(\theta)}\,\tanh(\sqrt{kg\mathrm{sen}(\theta)}\,t)\,.$$

b) Integrando la expresión anterior y usando que $x(0) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sqrt{\frac{g}{k}\mathrm{sen}(\theta)}\int_0^t \frac{1 - e^{-2\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,s}}{1 + e^{-2\sqrt{kg\mathrm{sen}(\theta)}\,s}}ds \\
&= \sqrt{\frac{g}{k}\mathrm{sen}(\theta)}(\int_0^t ds + \frac{1}{\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}}\int_0^t \frac{-2\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}e^{-2\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,s}}{1 + e^{-2\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,s}}ds) \\
&= \sqrt{\frac{g}{k}\mathrm{sen}(\theta)}(t + \frac{1}{\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}}\ln(\frac{1 + e^{-2\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t}}{2})) \\
&= \frac{1}{k}(\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t + \ln(\frac{1 + e^{-2\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t}}{2}) \\
&= \frac{1}{k}(\ln(e^{\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t}) + \ln(\frac{1 + e^{-2\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t}}{2})) \\
&= \frac{1}{k}\ln(e^{\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t}\frac{1 + e^{-2\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t}}{2}) \\
&= \frac{1}{k}\ln(\frac{e^{\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t} + e^{-\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t}}{2}) \\
&= \frac{1}{k}\ln(\cosh(\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t))\,.
\end{aligned}$$

c) Si $x = d$

$$d = \frac{1}{k}\ln(\cosh(\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}\,t))$$

lo que implica

$$t = \frac{\mathrm{arccos\,h}(e^{kd})}{\sqrt{gk\mathrm{sen}(\theta)}}\,.$$

Ejercicio 5.5.5 Una pelota de 6 onzas de peso se lanza hacia arriba desde una altura de 7 pies con una velocidad inicial de 84 pies por segundo. Si la pelota está sujeta a una resistencia del aire igual a 3/128 (libras por segundo) de la velocidad de ella (pies por segundo) ¿ Que altura máxima alcanzará antes de regresar a la tierra? Datos: 1 libra = 16 onzas, g = 32 pies por segundo al cuadrado.

Solución.Tenemos la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} \;=\; -mg - \frac{3}{128}v,\; x(0) \;=\; 7,\; v(0) \;=\; 84,$$

donde

$$mg \;=\; 6 \text{ onzas} \;=\; \frac{6}{16}\text{lb} \;=\; \frac{3}{8}\text{lb} \quad\Longrightarrow\quad m \;=\; \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{32} \;=\; \frac{3}{256}\cdot$$

Reemplazando obtenemos

$$\frac{3}{256}\frac{dv}{dt} \;=\; -\frac{3}{8} \;-\; \frac{3}{128}v \quad\Longrightarrow\quad \frac{dv}{dt} \;+\; 2v \;=\; -32\,,$$

cuya solución es

$$v(t) \;=\; e^{-\int 2dt}\left[\int -32e^{\int 2dt}dt \;+\; c\right] \;\Longrightarrow\; v(t) \;=\; e^{-2t}\left[-16e^{2t} \;+\; c\right]$$
$$\Longrightarrow\; v(t) \;=\; -16 \;+\; ce^{-2t}\,.$$

Como $v(0) \;=\; 84$ tenemos

$$84 \;=\; -16 \;+\; c \quad\Longrightarrow\quad c \;=\; 100\,,$$

y entonces

$$v(t) \;=\; -16 \;+\; 100e^{-2t}\,.$$

Para calcular el tiempo t_0 que se demora en alcanzar la altura máxima debemos resolver

$$v(t_0) \;=\; -16 \;+\; 100e^{-2t_0} \;=\; 0\,.$$

Por lo tanto

$$e^{-2t_0} \;=\; \frac{16}{100} \;=\; \frac{4}{25} \;\Longrightarrow\; -2t_0 \;=\; \ln\left(\frac{4}{25}\right) \;=\; 2\ln\left(\frac{2}{5}\right)$$
$$\Longrightarrow\; t_0 \;=\; -\ln\left(\frac{2}{5}\right) \;=\; \ln\left(\frac{5}{2}\right)\cdot$$

También tenemos

$$x(t) \;=\; x(0) \;+\; \int_0^t v(s)ds \;=\; 7 - 16t - 50(e^{-2t} - 1) \;=\; 57 - 16t - 50e^{-2t}\,,$$

y luego la altura máxima es

$$\begin{aligned} x\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right) &= 57 - 16\ln\left(\frac{5}{2}\right) - 50e^{-2\ln\left(\frac{5}{2}\right)} \;=\; 57 - 50\cdot\frac{4}{25} - 16\ln\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= 49 - 16\cdot\ln\left(\frac{5}{2}\right) \;=\; 34.3393\,\text{pies}. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.5.6 Una masa de 4 libras se suspende de un resorte ocasionando un estiramiento de 2 pie. En el instante $t = 0$, sin velocidad inicial la masa se desplaza 0.5 pie sobre su posición de equilibrio y se suelta. En el mismo instante se aplica una fuerza externa equivalente a $f(t) = 8\mathrm{sen}(t)$ libras. Suponiendo que no hay resistencia del aire, encontrar la ecuación del movimiento resultante y la posición del objeto al cabo de $\frac{\pi}{4}$ segundos. Considere $g = 32\frac{\text{pie}}{\text{seg}^2}$.

Solución. La constante de rigidez k del resorte verifica

$$2\,k \;=\; m\,g \;=\; 4$$

lo que implica $k = 2\frac{\text{lb}}{\text{pie}}\cdot$ y $m = \frac{1}{8}$ Slugs.
Como el constante de amortiguación es nula, la ecuación del movimiento es

$$x'' + \frac{k}{m}x \;=\; \frac{f(t)}{m}\,,$$

es decir

$$x'' + 16x \;=\; 64\mathrm{sen}(t)\,, \quad x(0) = -\frac{1}{2}\,, \quad x'(0) = 0\,.$$

Aplicando transformada de Laplace y poniendo $\mathcal{L}(x(t))(s) = X(s)$ obtenemos

$$s^2X(s) + \frac{1}{2}s + 16X(s) \;=\; \frac{64}{1+s^2}\,.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{64}{(s^2+1)(s^2+4^2)} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4^2} \\ &= \frac{64}{15}\frac{1}{s^2+1} - \frac{16}{15}\frac{4}{s^2+4^2} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4^2}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x(t) \;=\; \frac{64}{15}\mathrm{sen}(t) - \frac{16}{15}\mathrm{sen}(4t) - \frac{1}{2}\cos(4t)\,.$$

Luego

$$x(\frac{\pi}{4}) \;=\; \frac{32}{15}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \;=\; 3.516989\,.$$

y el objeto está abajo de la posición de equilibrio.

Ejercicio 5.5.7 Una masa de 2 kg. se sujeta a un resorte suspendido del techo. Esto ocasiona que el resorte se estire $\frac{196}{125}$m. al llegar al reposo en equilibrio. En el instante $t = 0$, la masa se desplaza 1 m. hacia abajo, y se suelta. En el mismo instante se aplica una fuerza externa $f(t) = \frac{195}{14}\cos(t)$newton al sistema. Si la constante de amortiguación es 6 newton seg/m , determine el desplazamiento $x(t)$ de la masa en un instante $t > 0$ cualquiera. Considere $g = 9.8\text{m/seg}^2$.

Solución. Tenemos $m = 2$ Kg y estiramiento $\frac{196}{125}$m. Luego la constante k del resorte es

$$k \;=\; 2 \cdot 9.8 \cdot \frac{125}{196} \;=\; \frac{125}{10} \cdot$$

De esta forma nuestra ecuación diferencial es

$$x'' + 3x' + \frac{125}{20}x \;=\; \frac{195}{28}\cos(t)\,.$$

con las condiciones iniciales

$$x(0) \;=\; 1\,, \quad x'(0) \;=\; 0\,.$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + 3\lambda + \frac{125}{20} \;=\; 0\,,$$

cuyas raíces son

$$\lambda \;=\; -\frac{3}{2} \pm 2\imath\,.$$

Luego la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) \;=\; e^{-\frac{3}{2}t}[c_1\cos(2t) \;+\; c_2\mathrm{sen}(2t)]\,.$$

Para encontrar una solución particular de la no homogénea, usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos una solución de la forma

$$x_p(t) \;=\; A\cos(t) \;+\; B\mathrm{sen}(t)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= -A\mathrm{sen}(t) \;+\; B\cos(t)\,, \\ x_p''(t) &= -A\cos(t) \;-\; B\mathrm{sen}(t)\,, \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\frac{195}{28}\cos(t) \;=\; [-A + 3B + \frac{125}{20}A]\cos(t) \;+\; [-B - 3A + \frac{125}{20}B]\mathrm{sen}(t)\,.$$

Tenemos entonces el sistema

$$\begin{cases} \frac{21}{4}A + 3B &= \frac{195}{28} \\ -3A + \frac{21}{4}B &= 0 \end{cases}$$

cuya solución es

$$A = 1\,, \quad B = \frac{4}{7}\cdot$$

Por lo tanto la solución general de nuestra ecuación es

$$x(t) = e^{-\frac{3}{2}t}[c_1\cos(2t) + c_2\mathrm{sen}(2t)] + \cos(t) + \frac{4}{7}\mathrm{sen}(t)\,.$$

Las condiciones $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$ implican respectivamente

$$c_1 + 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad 2c_2 - \frac{3}{2}c_1 + \frac{4}{7} = 0\,.$$

Luego

$$c_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad c_2 = -\frac{2}{7}\,,$$

y nuestra solución es

$$x(t) = -\frac{2}{7}e^{-\frac{3}{2}t}\mathrm{sen}(2t) + \cos(t) + \frac{4}{7}\mathrm{sen}(t)\,.$$

Capítulo 6

Soluciones en Serie de Potencias

6.1 Recuerdos de Series de Potencias

Una **serie de potencias** en un punto x_0 es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad = \quad a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{6.1}$$

donde x es la variables y los coeficientes a_n son constantes.

Se dice que (6.1) **converge** (resp. **converge absolutamente**) en $x = r$ si la serie infinita (de números reales)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r-x_0)^n \qquad \text{(resp.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n(r-x_0) \mid^n)$$

converge; es decir, si el límite de la sumas parciales

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n(r-x_0)^n \qquad \text{(resp.} \quad \sum_{n=0}^{N} \mid a_n(r-x_0) \mid^n)$$

cuando N tiende a infinito existe (pertenece a $\mathbb{R}$).

Si este límite no existe, se dice que la serie de potencias (6.1) *diverge* en $x = r$.

El siguiente resultado, cuya demostración fue hecha en los cursos de Cálculo, determina para que valores de x la serie de potencia (6.1) converge.

Teorema 6.1.1 *1. Para cada serie de potencias de la forma (6.1), existe un número R, $0 \leq R \leq \infty$, llamado* **radio de convergencia**, *tal que (6.1) converge absolutamente para $\mid x - x_0 \mid < R$ y diverge para $\mid x - x_0 \mid > R$.*

2. Si

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = L$$

entonces

$$\begin{aligned}
&a) \quad 0 < L < \infty \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{1}{L}\\
&b) \quad L = \infty \quad \Longrightarrow \quad R = 0\\
&c) \quad L = 0 \quad \Longrightarrow \quad R = \infty
\end{aligned}$$

Si $\lim_{n\to\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid$ *no existe, se deben emplear otros métodos para calcular* R *(por ejemplo: el criterio de la raíz).*

3. *Si la serie de potencias (6.1) tiene radio de convergencia* $R > 0$*, podemos definir*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \forall \quad x_0 - R < x < x_0 + R\,.$$

Entonces $\quad \forall \quad x_0 - R < x < x_0 + R$*,* $f(x)$ *es diferenciable y*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}\,.$$

Además el radio de convergencia de esta nueva serie de potencias es también R*.*
Por lo tanto $\quad \forall \quad x_0 - R < x < x_0 + R$*,* $f(x)$ *es infinitamente diferenciable y podemos obtener sus derivadas derivando término a término en la serie de potencias.*

4. $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

5. *También se tiene*

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} + C \qquad \forall \quad x_0 - R < x < x_0 + R\,.$$

Ejemplo 6.1.2 Calculemos el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}(x-3)^n\,.$$

Tenemos

$$\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = \mid \frac{(-2)^{n+1}}{n+2}\frac{n+1}{(-2)^n} \mid = \mid -2\frac{n+1}{n+2} \mid = 2\frac{n+1}{n+2} \to 2\,.$$

Por lo tanto $R = \frac{1}{2}$ y la serie converge absolutamente para $\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$, y diverge para $x < \frac{5}{2}$ y $x > \frac{7}{2}$. Para $x = \frac{5}{2}$ nos queda la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}(-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \quad \text{(serie armónica)}\,,$$

que es divergente.
Para $x = \frac{7}{2}$ nos queda la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}(\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{(serie armónica alternada)}\,,$$

que es convergente.
Luego el conjunto de convergencia de esta serie de potencias es el intervalo $]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$

Ejemplo 6.1.3 Consideremos las serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,.$$

Tenemos $L = 1$ y por lo tanto su radio de convergencia es $R = 1$. Como claramente esta serie no converge para $x = \pm 1$, su conjunto de convergencia es el intervalo $]-1, 1[$. Además $\forall \quad -1 < x < 1$ tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{progresión geométrica de razón } x\,.$$

Ejemplo 6.1.4 Cambiando x por $-x$ en la serie anterior obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\,.$$

Por lo tanto $R = 1$, su conjunto de convergencia es $]-1, 1[$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \qquad \forall \quad -1 < x < 1\,.$$

Ejemplo 6.1.5 También las siguientes series de potencias tienen radio de convergencia $R = 1$ y conjunto de convergencia el intervalo $]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\,.$$

Como la segunda serie se obtiene integrando término a término la primera y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall \quad -1 < x < 1\,,$$

tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad = \quad \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \quad = \quad \arctan(x) \qquad \forall \quad -1 < x < 1\,.$$

Además como la tercera serie se obtiene derivando término a término la serie del ejemplo (6.1.3) tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad = \quad \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) \quad = \quad \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \forall \quad -1 < x < 1\,.$$

6.2 Recuerdos de Funciones Analíticas

Se dice que una función $f(x)$ es **analítica** en $x = x_0$ si existe intervalo abierto $I(x_0)$ en torno a x_0 y sucesión (a_n) de números reales tal que

$$f(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \forall\, x \in I(x_0)\,.$$

Observe que la serie anterior necesariamente tiene radio de convergencia $R > 0$.

Ejemplo 6.2.1 La función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ es analítica en $]-1, 1[$.

Por (6.1.3) sabemos que es analítica en $x = 0$. Si $x_0 \in$]-1,1[,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \frac{1}{(1-x_0)-(x-x_0)} \quad = \quad \frac{1}{1-x_0}\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{1-x_0}} \\ &= \frac{1}{1-x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x_0)^n}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

y el radio de convergencia de esta serie de potencias es $R = \mid 1 - x_0 \mid > 0$.

Ejemplo 6.2.2 Más en general si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ es analítica en todo $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$.

En efecto si $x_1 \in\ ]x_0 - R, x_0 + R[$, f es infinitamente diferenciable en $x = x_1$ y entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_1)^n$$

con $b_n = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}$.

Ejemplo 6.2.3 Todo polinomio $f(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$, es analítico en todo punto x_0 de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6.2.4 Toda función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (donde $P(x), Q(x)$ son polinomios), es analítica en todo x_0 tal que $Q(x_0) \neq 0$.

Ejemplo 6.2.5 Las siguientes funciones son analíticas en todo $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \cdots &&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \operatorname{sen}(x) &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \cdots &&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \cos(x) &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \cdots &&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

y las respectivas series de potencias tienen radio de convergencia $R = \infty$.

Ejemplo 6.2.6 La función

$$\ln(x) \quad = \quad x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

es analítica para todo $x_0 > 0$ y el radio de convergencia de la serie de potencias es $R = 1$.

6.3 Solución en torno a puntos ordinarios

Consideremos la ecuación homogénea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,, \tag{6.2}$$

en su forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\,. \tag{6.3}$$

Definición 6.3.1 *Un punto x_0 se dice un* **punto ordinario** *de (6.2) o de (6.3) si las funciones $p = \frac{a_1}{a_2}$ y $q = \frac{a_0}{a_2}$ son analíticas en x_0. Si x_0 no es ordinario para (6.2) se dice que x_0 es un* **punto singular** *de (6.2).*

Ejemplo 6.3.2 Considere la ecuación

$$xy'' + \frac{x}{1-x}y' + sen(x)y = 0\,.$$

Entonces $p(x) = \frac{1}{1-x}$ es analítica en todo $x_0 \neq 1$. Por otra parte

$$q(x) \quad = \quad \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x} \quad = \quad 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

y como esta serie tiene radio de convergencia $R = \infty$, $q(x)$ es analítica en todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Así el único punto singular de nuestra ecuación es $x_0 = 1$.

El siguiente teorema nos dice como resolver (6.2) alrededor de un punto ordinario.

Teorema 6.3.3 *Si x_0 es punto ordinario de (6.2), entonces (6.2) tiene dos soluciones analíticas linealmente independientes de la forma*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con radio de convergencia mayor o igual que la distancia de x_0 al punto singular (real o complejo) de (6.2) más cercano a x_0.

Ejemplo 6.3.4 Encuentre la solución general de

$$y'' - xy = 0$$

alrededor de $x_0 = 0$.

Primero notemos que como nuestra ecuación no tiene puntos singulares, las soluciones que encontremos usando el teorema (6.3.3) estarán definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sea $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Debemos determinar los valores de los coeficientes a_n para que $\phi(x)$ sea solución de nuestra ecuación. Sus derivadas son:

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad \phi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0\,.$$

Dejando ambas sumatorias con término general x^n tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0\,,$$

y juntando las sumatorias

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0\,.$$

Por lo tanto debemos tener

$$a_2 = 0 \quad \text{y} \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 1$$

lo que implica

$$a_2 = 0 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad \forall n \geq 1\,.$$

Para darnos cuenta como es la expresión del término general a_n, lo calculamos para los primeros valores de n. Tenemos para $n = 1, 2$ y 3 respectivamente

$$a_3 = \frac{1}{3.2} a_0 \qquad a_4 = \frac{1}{4.3} a_1 \qquad a_5 = \frac{1}{5.4} a_2 = 0\,,$$

y para $n = 4, 5$ y 6

$$a_6 = \frac{1}{6.5} a_3 = \frac{1}{(2.3)(5.6)} a_0 \qquad a_7 = \frac{1}{7.6} a_4 = \frac{1}{(3.4)(6.7)} a_1 \qquad a_8 = \frac{1}{8.7} a_5 = 0\,.$$

Esto nos permite darnos cuenta que para todo $n \geq 1$

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(2.3)(5.6)\cdots(3n-1)(3n)} \qquad a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3.4)(6.7)\cdots(3n)(3n+1)} \quad \text{y}$$

$$a_{3n+2} = 0\,,$$

con a_0 y a_1 arbitrarios. Luego si definimos

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2.3)(5.6)\cdots(3n-1)(3n)} \\ \phi_2(x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3(n+1)}}{(3.4)(6.7)\cdots(3n)(3n+1)}\,, \end{aligned}$$

como $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son L.I. ($W(\phi_1, \phi_2)(0) = 1$) la solución general de nuestra ecuación es

$$\phi(x) = a_0\phi_1(x) \quad + \quad a_1\phi_2(x) \quad , \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

y está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

6.4 Ecuación de Legendre y Polinomios de Legendre

En ésta sección estudiaremos las soluciones de la **ecuación de Legendre**

$$L(y) = (1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0\,,$$

donde α es una constante real, alrededor del punto $x = 0$.

Como las funciones

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \qquad \text{y} \qquad q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}$$

son analíticas en todo $x \neq \pm 1$, los puntos singulares de la ecuación de Legendre son precisamente $x = \pm 1$. Por lo tanto el punto $x = 0$ es ordinario y las soluciones $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, estarán definidas por lo menos para $\mid x \mid < 1$.

Para este $\phi(x)$ tenemos

$$\phi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad \phi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}\,.$$

Luego

$$-2x\phi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -2n a_n x^n \quad \text{y}$$

$$\phi''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \quad \text{y} \quad -x^2\phi''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -n(n-1)a_n x^n \,.$$

Reemplazando en la ecuación de Legendre obtenemos

$$\begin{aligned} L(\phi)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2a_n + \alpha(\alpha+1)a_n)]x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\alpha+n+1)(\alpha-n)a_n]x^n \quad = \quad 0\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, debemos tener para todo $n \geq 0$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\alpha+n+1)(\alpha-n)a_n \quad = \quad 0$$

lo que implica

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha+n+1)(\alpha-n)}{(n+2)(n+1)}\, a_n \,.$$

Para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} a_2 &= -\tfrac{(\alpha+1)\alpha}{2.1}a_0 \\ a_3 &= -\tfrac{(\alpha+2)(\alpha-1)}{3.2}a_1 \\ a_4 &= -\tfrac{(\alpha+3)(\alpha-2)}{4.3}a_2 \quad = \quad \tfrac{(\alpha+3)(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)}{4.3.2.1}a_0 \\ a_5 &= -\tfrac{(\alpha+4)(\alpha-3)}{5.4}a_3 \quad = \quad \tfrac{(\alpha+4)(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)}{5.4.3.2}a_1 \\ a_6 &= -\tfrac{(\alpha+5)(\alpha-4)}{6.5}a_4 \quad = \quad -\tfrac{(\alpha+5)(\alpha+3)(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)}{6.5.4.3.2}a_0\,. \end{aligned}$$

A partir de estos valores se puede demostrar por inducción que para todo $n \leq 1$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^n\frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}a_0\,, \\ a_{2n+1} &= (-1)^n\frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)\cdots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}a_1\,. \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}\,, \\ \phi_2(x) &= x + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)\cdots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Entonces $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ están definidas por lo menos para $\mid x \mid< 1$ y son linealmente independientes ($W(\phi_1, \phi_2)(0) = 1$). Luego la solución general de la ecuación de Legendre es

$$\phi(x) \quad = \quad a_0\phi_1(x) \quad + \quad a_1\phi_2(x)\,, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Observaciones 6.4.1 1. Si $\alpha = 2m$ con m un número natural, entonces

$$\begin{aligned}\phi_1(x) \quad = \quad & 1 + \\ & \sum_{n=1}^{m}(-1)^n \frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)\cdots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}\,,\end{aligned}$$

es un polinomio de grado $2m$ que contiene solo potencias pares de x. Por su parte $\phi_2(x)$ es una serie infinita de potencias. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\alpha = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \phi_1(x) = 1\,,\\ \alpha = 2 \quad &\Longrightarrow \quad \phi_1(x) = 1 - 3x^2\,,\\ \alpha = 4 \quad &\Longrightarrow \quad \phi_1(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\,.\end{aligned}$$

2. Si $\alpha = 2m + 1$ con m un número natural, entonces $\phi_1(x)$ es una serie infinita de potencias, pero ahora $\phi_2(x)$ es un polinomio de grado $2m + 1$ que contiene solo potencias impares de x. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\alpha = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \phi_2(x) = x\,,\\ \alpha = 3 \quad &\Longrightarrow \quad \phi_2(x) = x - \frac{5}{3}x^3\,,\\ \alpha = 5 \quad &\Longrightarrow \quad \phi_2(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5\,.\end{aligned}$$

3. Luego podemos concluir que para todo número natural m, existe un polinomio de grado m que es solución de la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y \quad = \quad 0\,.$$

Definición 6.4.2 *Sea n un número natural. Se llama* **enésimo polinomio de Legendre** *al polinomio $P_n(x)$ de grado n que es solución de la ecuación de Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y \quad = \quad 0\,,$$

y verifica $P_n(1) = 1$.

La siguiente fórmula, que demostraremos como ejercicio, nos dá una definición alternativa de los polinomios de Legendre.

Ejercicio 6.4.3 Para todo número natural n se tiene

$$P_n(x) \quad = \quad \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,.$$

Demostración. Fijado n consideremos el polinomio $u(x) = (x^2-1)^n$. Tenemos entonces

$$u'(x) = n(x^2-1)^{n-1}2x \quad \Longrightarrow \quad (x^2-1)u'(x) - 2nxu(x) = 0 \,.$$

Derivando consecutivamente esta última expresión k veces se obtiene

$$\begin{array}{l} (x^2-1)u''(x) + 2xu'(x) - 2nxu'(x) - 2nu(x) = 0 \\ (x^2-1)u'''(x) + 4xu''(x) + 2u'(x) - 2nxu''(x) - 4nu'(x) = 0 \\ \vdots \\ (x^2-1)u^{(k+1)}(x) + 2xku^{(k)}(x) + k(k-1)u^{(k-1)}(x) - 2nxu^{(k)}(x) - 2nku^{(k-1)}(x) = 0 \end{array}$$

Poniendo $k = n+1$ en la última ecuación se tiene

$$(x^2-1)u^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)u^{(n+1)}(x) + (n+1)nu^{(n)}(x) - 2nxu^{(n+1)}(x) - 2n(n+1)u^{(n)}(x) = 0 \,,$$

y agrupando términos

$$(x^2-1)u^{(n+2)}(x) + 2xu^{(n+1)}(x) - n(n+1)u^{(n)}(x) = 0 \,.$$

Poniendo $q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}u(x)$ y multiplicando por -1 obtenemos

$$(1-x^2)q_n''(x) - 2xq_n'(x) + n(n+1)q_n(x) = 0 \,.$$

Luego el polinomio $q_n(x)$, que es de grado n, es solución de la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y \quad = \quad 0 \,.$$

Además

$$\begin{aligned} q_n(x) &= [(x^2-1)^n]^{(n)} \quad = \quad [(x-1)^n(x+1)^n]^{(n)} \\ &= [(x-1)^n]^{(n)}(x+1)^n \quad + \quad \text{términos que contienen a } x-1 \text{ como factor} \\ &= n!(x+1)^n \quad + \quad \text{términos que contienen a } x-1 \text{ como factor} \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$q_n(1) = 2^n n! \,,$$

y así

$$P_n(x) \quad = \quad \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \,.$$

Los siguientes tres ejercicios se dejan para ser resueltos por el lector.

Ejercicio 6.4.4 Usando la fórmula anterior compruebe que

$$P_0(x) = \; 1 \,, \quad P_1(x) = x \,, \quad P_2(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} \,, \quad P_3(x) = \tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x \,,$$

$$P_4(x) = \; \tfrac{35}{32}x^4 - \tfrac{15}{4}x^2 + \tfrac{3}{8} \,.$$

Ejercicio 6.4.5 Sea $f(x)$ una función n veces continuamente diferenciable en el intervalo $[-1,1]$ y sea

$$I \quad = \quad \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx\,.$$

Integrando por partes demuestre que

$$I \quad = \quad \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(x^2-1)^n dx\,.$$

Ejercicio 6.4.6 Demuestre que

$$\int \cos^{2n+1}(\theta)d\theta \quad = \quad \frac{1}{2n+1}\cos^{2n}(\theta)\mathrm{sen}(\theta) \quad + \quad \frac{2n}{2n+1}\int \cos^{2n-1}(\theta)d\theta\,.$$

El siguiente ejercicio nos dice que la familia de los polinomios de Legendre es ortogonal.

Ejercicio 6.4.7 Pruebe que

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m \neq n; \\ 1, & \text{si} \quad m = n\,. \end{cases}$$

Demostración. Usando ejercicio (6.4.5) con $f(x) = P_m(x)$ y $m < n$, tenemos $f^{(n)}(x) = 0$ para todo x y por lo tanto $I = 0$. Esto demuestra la fórmula para $n \neq m$.
Supongamos ahora $f(x) = P_n(x)$. Entonces $f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ y luego

$$I \quad = \quad \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx \quad = \quad \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx\,.$$

Para resolver esta integral pongamos $x = \mathrm{sen}(\theta)$ y usemos ejercicio (6.4.6):

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)d\theta \\
&= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\Big(\frac{1}{2n+1}\cos^{2n}(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} \quad + \quad \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(\theta)d\theta\Big) \\
&= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}(\theta)d\theta \\
&= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)d\theta \\
&= \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{2^n n!}{1.3.5.\cdots(2n+1)} \quad = \quad \frac{2(2n)!}{2^n n!}\,\frac{n!2^n}{(2n)!(2n+1)} \\
&= \frac{2}{2n+1}\,.
\end{aligned}$$

Esto prueba la fórmula cuando $m = n$.

Ejercicio 6.4.8 Considere la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2py = 0\,.$$

a) Demuestre que la solución general es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

donde

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{2p}{2!}x^2 + \frac{2^2 p(p-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3 p(p-2)(p-4)}{6!}x^6 + \cdots \\ y_2(x) &= x - \frac{2(p-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(p-1)(p-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(p-1)(p-3)(p-5)}{7!}x^7 + \cdots \end{aligned}$$

Encuentre el enésimo sumando de ambas series y pruebe que convergen para todo $x \in \mathbb{R}$.
b) Muestre que si $p = 2n$ con n un número natural, entonces $y_1(x)$ es un polinomio de grado $2n$ que contiene solo potencias pares de x y que $y_2(x)$ es una serie infinita. Muestre que si $p = 2n+1$ con n un número natural, entonces $y_2(x)$ es un polinomio de grado $2n+1$ que contiene solo potencias impares de x y que $y_1(x)$ es una serie infinita.
Calcule estos polinomios para $p = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5.
c) Para cada número natural n se define el **enésimo polinomio de Hermite** $H_n(x)$, como el polinomio que es solución de

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

y cuyo término dominante es $2^n x^n$.
Calcule $H_1(x), H_2(x), \cdots, H_5(x)$.
d) Pruebe que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\,.$$

6.5 Solución en torno a puntos singulares regulares

Definición 6.5.1 *Sea x_0 un punto singular de la ecuación*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\,.$$

Entonces x_0 se dice un punto **singular regular** *de la ecuación si las funciones*

$$(x - x_0)p(x) \quad y \quad (x - x_0)^2 q(x)$$

son analíticas en $x = x_0$.

Ejemplo 6.5.2 Considere la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y \;=\; 0\,.$$

Sabemos que sus únicos puntos singulares son $x = \pm 1$. Aquí

$$p(x) \;=\; \frac{-2x}{1-x^2} \quad \text{y} \quad q(x) \;=\; \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}\,.$$

Como las funciones

$$(x-1)p(x) \;=\; \frac{2x}{1+x} \quad \text{y} \quad (x-1)^2 q(x) \;=\; -\alpha(\alpha+1)\frac{x-1}{1+x}$$

son analíticas en $x = 1$, y las funciones

$$(x+1)p(x) \;=\; -\frac{2x}{1-x} \quad \text{y} \quad (x+1)^2 q(x) \;=\; \alpha(\alpha+1)\frac{x+1}{1-x}$$

son analíticas en $x = -1$, tenemos que ambos puntos $x = 1$ y $x = -1$ son puntos singulares regulares de la ecuación de Legendre.

Ejemplo 6.5.3 Para $p \geq 0$ considere la **ecuación de Bessel de orden p**

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y \;=\; 0\,.$$

Claramente su único punto singular es $x = 0$. Como

$$x\frac{x}{x^2} \;=\; 1 \quad \text{y} \quad x^2\frac{x^2-p^2}{x^2} \;=\; x^2 - p^2$$

son analíticas en $x = 0$, el punto $x = 0$ es punto singular regular de la ecuación de Bessel.

Ejemplo 6.5.4 También se puede comprobar que $x = 0$ es punto singular regular de la ecuación de Euler

$$x^2 y'' + pxy' + qy \;=\; 0\,.$$

Observaciones 6.5.5 Suponga que x_0 es punto singular regular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y \;=\; 0\,.$$

Entonces multiplicando la ecuación por $(x-x_0)^2$ nos queda la ecuación

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0)P(x)y' + Q(x)y \;=\; 0\,,$$

donde las funciones $P(x) = (x-x_0)p(x)$ y $Q(x) = (x-x_0)^2 q(x)$ son analíticas en $x = x_0$.

6.6 Método de Frobenius

En esta sección desarrollaremos el método de Frobenius para resolver una ecuación homogénea de segundo orden alrededor de un punto singular regular. Primero que nada observemos que las soluciones pueden no estar definidas en el punto singular, ya que la misma ecuación no está definida allí. Note además que podemos restringirnos al caso en que el punto singular regular es $x = 0$, haciendo una traslación en la variable independiente si es necesario, y en que la ecuación es de la forma

$$L(y) \;=\; x^2y'' + xP(x)y' + Q(x)y \;=\; 0\,, \tag{6.4}$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ analíticas en $x = 0$.
De esta forma

$$P(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \quad \text{y} \quad Q(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$$

y las series son convergentes para $\mid x \mid < R$, $R > 0$.
Buscaremos soluciones ϕ de la forma

$$\phi(x) \;=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad \text{con} \quad c_0 \neq 0$$

definidas inicialmente solo para $x > 0$, $x < R$. Tenemos

$$\phi'(x) \;=\; x^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k x^k \quad \text{y} \quad \phi''(x) \;=\; x^{r-2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^k\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Q(x)\phi(x) \;&=\; x^r\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k x^k\Big)\\
&=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\beta}_k x^k \quad \text{con} \quad \tilde{\beta}_k = \sum_{j=0}^{k} c_j\beta_{k-j}\,,\\
xP(x)\phi'(x) \;&=\; x^r\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k\Big)\\
&=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\alpha}_k x^k \quad \text{con} \quad \tilde{\alpha}_k = \sum_{j=0}^{k}(j+r)c_j\alpha_{k-j}\,, \quad \text{y}\\
x^2\phi''(x) \;&=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k x^k\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$L(\phi)(x,r) \;=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}[(k+r)(k+r-1)c_k + \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k]x^k \;=\; 0\,.$$

Entonces

$$[\quad]_k \;=\; (k+r)(k+r-1)c_k + \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_k \;=\; 0\,, \qquad \forall k = 0,1,2,\cdots.$$

Pero

$$\begin{aligned}
[\quad]_k \;&=\; (k+r)(k+r-1)c_k \;+\; \sum_{j=0}^{k}(j+r)c_j\alpha_{k-j} \;+\; \sum_{j=0}^{k} c_j\beta_{k-j}\,,\\
&=\; [(k+r)(k+r-1)+(k+r)\alpha_0+\beta_0]c_k \;+\; \sum_{j=0}^{k-1}[(j+r)\alpha_{k-j}+\beta_{k-j}]c_j\,,\\
&=\; [q(r+k)c_k \;+\; d_k]\,,
\end{aligned}$$

donde

$$q(r) \;=\; r(r-1)+\alpha_0 r+\beta_0\,, \quad \text{y} \quad d_k \;=\; \sum_{j=0}^{k-1}[(j+r)\alpha_{k-j}+\beta_{k-j}]c_j\,.$$

El polinomio cuadrático $q(r) = r(r-1)+\alpha_0 r+\beta_0$ es llamado el **polinomio indicial** asociado a la ecuación. Para $k = 0$

$$[\quad]_0 \;=\; q(r)c_0 \;=\; 0$$

y luego los únicos valores que pueden admitirse para r son la raíces de q. Observe además que d_k es combinación lineal de $c_0, c_1, \cdots, c_{k-1}$ y que si estos ya están calculados, c_k también puede calcularse por la fórmula

$$c_k(r) = \frac{-d_k(r)}{q(r+k)}$$

sí y sólo sí $q(r+k) \neq 0$.

Entonces bajo la condición $q(r+k) \neq 0$ para todo $k \geq 1$, todos los $c_k(r)$ pueden calcularse recursivamente de modo que si la serie

$$\phi(x,r) \;=\; c_0x^r + x^r\sum_{k=1}^{\infty}c_k(r)x^k$$

converge para $0 < x < r$, tengamos

$$L(\phi)(x,r) \;=\; c_0q(r)x^r\,.$$

Bajo estas condiciones

$$\phi(x,r) \quad \text{es solución} \quad \Longleftrightarrow \quad r \quad \text{es raíz de } q\,.$$

Sean r_1, r_2 las raíces de q y supongamos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \geq r_2$. Entonces

$$q(r_1+k) \neq 0 \quad \forall k \geq 1\,,$$

lo que implica que si definimos los $c_k(r_1)$ por la fórmula

$$c_0(r_1) = 1 \quad \text{y} \quad c_k(r_1) = \frac{-d_k(r_1)}{q(r_1+k)} \quad \forall k \geq 1\,,$$

tenemos que

$$\phi_1(x) \;=\; x^{r_1}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r_1)x^k)$$

es solución si la serie converge.

Si r_2 es distinto de r_1 y si se verifica que $q(r_2+k) \neq 0$ para todo $k \geq 1$, entonces poniendo también

$$c_0(r_2) = 1 \quad \text{y} \quad c_k(r_2) = \frac{-d_k(r_2)}{q(r_2+k)} \quad \forall k \geq 1\,,$$

resulta que

$$\phi_2(x) \;=\; x^{r_2}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r_2)x^k)$$

es otra solución si la serie converge.

El siguiente teorema nos garantiza que estas series convergen para $\mid x \mid < r$, que las soluciones $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ están definidas también para $-r < x < 0$ (poniendo $\mid x \mid^r$ en lugar de x^r) y que son linealmente independientes. Antes una pequeña observación.

Observaciones 6.6.1

$$\begin{aligned} q(r_2+k) \neq 0 \quad \forall k \geq 1 \qquad &\Longleftrightarrow \; r_1 \neq r_2 + k \quad \forall k \geq 1 \\ &\Longleftrightarrow \; r_1 - r_2 \quad \text{no es un entero positivo}\,. \end{aligned}$$

Teorema 6.6.2 *Consideremos la ecuación*

$$x^2y'' + xa(x)y' + b(x)y \;=\; 0\,,$$

donde $a(x), b(x)$ tienen desarrollo en serie de potencias (centradas en $x=0$) convergentes para $\mid x \mid < \rho_0$, $\rho_0 > 0$.
Suponga que las raíces r_1, r_2 del polinomio indicial

$$q(r) \;=\; r(r-1) + a(0)r + b(0)\,,$$

son reales y distintas, digamos $r_1 > r_2$.
Entonces, para $0 <\mid x \mid < \rho_0$, *existe solución* $\phi_1(x)$ *de la forma*

$$\phi_1(x) \; = \mid x \mid^{r_1} (1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k)\,,$$

donde la serie converge para $\mid x \mid < \rho_0$.
Además si $r_1 - r_2$ *no es un entero positivo, existe una segunda solución*

$$\phi_2(x) \; = \mid x \mid^{r_2} (1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k x^k)\,,$$

tal que la serie converge para $\mid x \mid < \rho_0$.
Tales soluciones son linealmente independientes para $0 <\mid x \mid < \rho_0$, *y los coeficientes* c_k *y* $\tilde{c}_k$ *pueden obtenerse sustituyendo en la ecuación.*

Para desarrollar el siguiente ejemplo conviene tener en cuenta la siguiente identidad que puede ser demostrada por inducción

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1) \; = \; \frac{(2k+1)!}{2^k \; k!}\,. \tag{6.5}$$

Ejemplo 6.6.3 Consideremos la ecuación

$$L(y) \; = \; x^2 y'' + \frac{3}{2} x y' + x y \; = \; 0\,.$$

Su polinomio indicial es

$$q(r) \; = \; r(r-1) + \frac{3}{2} r \quad = \quad r^2 + \frac{1}{2} r \quad = \quad r(r + \frac{1}{2})\,,$$

cuyas raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = -\frac{1}{2}$.
Busquemos una solución de la forma

$$\phi(x) \; = \; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
x\phi(x) \; &= \; x^r \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} & &= \; x^r \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k\,, \\
\frac{3}{2} x \phi'(x) \; &= \; x^r \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+r) c_k x^k & &= \; x^r \frac{3}{2} r c_0 + x^r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2} (k+r) c_k x^k\,, \\
x^2 \phi''(x) \; &= \; x^r \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^k & &= \; x^r r(r-1) c_0 + \\
& & & \quad\; x^r \sum_{k=1}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^k\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$L(\phi)(x) \;=\; c_0 x^r + x^r \sum_{k=1}^{\infty} [q(r+k)c_k + c_{k-1}]x^k \,,$$

lo que implica que para todo $k \geq 1$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{-c_{k-1}}{q(r+k)} \\ \Longrightarrow \quad c_k &= \frac{c_{k-2}}{q(r+k)q(r+k-1)} \\ &\vdots \\ \Longrightarrow \quad c_k &= \frac{(-1)^k c_0}{q(r+k)q(r+k-1)\cdots q(r+1)} \,. \end{aligned}$$

En $r = r_1 = 0$ tenemos $q(r_1 + k) = q(k) = k(k + \frac{1}{2})$, lo que implica que, tomando $c_0(r_1) = 1$, para todo $k \geq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} c_k(r_1) &= \frac{(-1)^k}{1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3 \cdot \frac{7}{2} \cdots k \cdot \frac{2k+1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^k\, 2^k}{k!\; 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} \\ &= \frac{(-1)^k\, 2^k\, 2^k\, k!}{k!\; (2k+1)!} \qquad \text{(usando (6.5))} \\ &= \frac{(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k+1)!} \,. \end{aligned}$$

Por su parte, en $r = r_2 = -\frac{1}{2}$ tenemos $q(r_2 + k) = q(-\frac{1}{2} + k) = (k - \frac{1}{2})k$. Luego si $c_0(r_2) = 1$, para todo $k \geq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} c_k(r_2) &= \frac{(-1)^k}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3 \cdots \frac{2k-1}{2} \cdot k} \\ &= \frac{(-1)^k\, 2^k}{k!\; 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} \\ &= \frac{(-1)^k\, 2^k\, 2^{k-1}\, (k-1)!}{k!\; (2k-1)!} \qquad \text{(usando (6.5))} \\ &= \frac{(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k)!} \,. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\phi_1(x) \;=\; 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k+1)!} x^k \quad \text{y} \quad \phi_2(x) \;=\; |\, x \,|^{-\frac{1}{2}} \,(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k)!} x^k) \,,$$

y la solución general es

$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x) \;+\; b\phi_2(x)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Finalmente observe que como las funciones $a(x) = \frac{3}{2}$ y $b(x) = x$ tienen desarrollo en serie de potencias convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$, nuestra solución general está definida para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

Casos excepcionales.

Llamemos $\phi_1(x)$ la solución encontrada para $r = r_1$ según el procedimiento anterior. Veremos aquí como se encuentra una segunda solución $\phi_2(x)$, linealmente independiente con $\phi_1(x)$ en los casos $r_1 = r_2$ y $r_1 - r_2$ igual a un entero positivo.

1) $r_1 = r_2$.

En este caso

$$q(r_1) = q'(r_1) = 0\,.$$

Observe que existe $\delta > 0$ tal que si $r \in \,]r_1 - \delta, r_1 + \delta[$ entonces $q(r+k) \neq 0$ para todo $k \geq 1$. Luego para estos r's y cada $k \geq 1$ existen coeficientes $c_k = c_k(r)$ tales que si

$$\phi(x, r) = x^r(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r)x^k)\,,$$

entonces

$$L(\phi)(x, r) \;=\; x^r q(r)\,.$$

También para todo $r \in \,]r_1 - \delta, r_1 + \delta[$, tenemos

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)(x, r) \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial r}L(\phi)(x, r) \;=\; [q'(r) + \ln(x)q(r)]x^r \\ &\Longrightarrow \quad L\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)(x, r_1) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \phi_2(x) \quad &= \quad \frac{\partial\phi}{\partial r}(x, r_1) \\ &= \quad x^{r_1}\sum_{k=1}^{\infty} c_k'(r_1)x^k) \;+\; \ln(x)x^{r_1}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(r_1)x^k) \\ &= \quad x^{r_1}\sum_{k=1}^{\infty} c_k'(r_1)x^k) \;+\; \ln(x)\phi_1(x)\,, \end{aligned}$$

es solución de nuestra ecuación diferencial.

2) $r_1 = r_2 + m$ con m un entero positivo.

En este caso tenemos que

$$q(r) = (r - r_1)(r - r_2)\,,$$

y poniendo $c_0(r) = r - r_2$ y obtenemos

$$\begin{array}{rcll} d_1(r_2) & = & c_1(r_2) & = 0 \\ \vdots & & & \\ d_{m-1}(r_2) & = & c_{m-1}(r_2) & = 0 \quad \text{y} \\ d_m(r_2) & = & 0 & . \end{array}$$

Luego

$$d_m(r) = (r - r_2)\tilde{d}_m(r) \quad \text{y} \quad c_m(r) = \frac{-(r - r_2)\tilde{d}_m(r)}{(r + m - r_1)(r + m - r_2)}\,,$$

y por lo tanto

$$c_m(r_2) \;=\; \lim_{r \to r_2} c_m(r) = \frac{-\tilde{d}_m(r)}{m}\,.$$

De esta forma todos los $c_k(r_2)$ y los $c_k(r)$ con r cercano a r_2 pueden calcularse de modo que si

$$\psi(x, r) \;=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r) x^k \quad \text{con} \quad c_0(r) = r - r_2\,,$$

entonces

$$L(\psi)(x, r) \;=\; c_0(r) q(r) x^r \;=\; (r - r_2) q(r) x^r\,.$$

Pero como $c_0(r_2) = c_1(r_2) = \cdots = c_{m-1}(r_2) = 0$, no es difícil de demostrar que la solución

$$\psi(x) \;=\; \psi(x, r_2) \;=\; x^{r_2} x^m \sigma(x) \;=\; x^{r_1} \sigma(x)$$

es linealmente dependiente con $\phi_1(x)$. Para encontrar una solución linealmente independiente con $\phi_1(x)$, derivamos $L(\psi)(x, r) = (r - r_2) q(r) x^r$ con respecto a r, obteniéndose

$$L\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)(x, r) \;=\; \frac{\partial}{\partial r} L(\psi)(x, r) \;=\; q(r) x^r + (r - r_2)[q'(r) + \ln(x) q(r)] x^r\,.$$

Por lo tanto

$$\phi_2(x) \;=\; \frac{\partial \psi}{\partial r}(x, r_2)$$

es solución de nuestra ecuación.
Observe que

$$\begin{array}{rcl} \phi_2(x) & = & x^{r_2} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k'(r_2) x^k \;+\; \ln(x) x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r_2) x^k\,, \qquad \text{es decir} \\ \phi_2(x) & = & x^{r_2} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k'(r_2) x^k \;+\; c \ln(x) \phi_1(x)\,, \end{array}$$

para cierta constante $c \in \mathbb{R}$ (c podrá ser cero).

Resumiendo tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.6.4 *Consideremos la ecuación*

$$x^2y'' + xa(x)y' + b(x)y \;=\; 0\,,$$

donde las funciones $a(x)$ y $b(x)$ tienen desarrollo en series de potencias (centradas en cero) convergentes para $\mid x \mid < \rho_0$, $\rho_0 > 0$. Suponga que las raíces r_1, r_2 del polinomio indicial

$$q(r) \;=\; r(r-1) + a(0)r + b(0)$$

son reales y verifican $r_1 \geq r_2$.
Si $r_1 = r_2$, existen dos soluciones $\phi_1(x), \phi_2(x)$ definidas y linealmente independientes para $0 <\mid x \mid < \rho_0$, las cuales son de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \mid x \mid^{r_1} \sigma_1(x)\,,\\ \phi_2(x) &= \mid x \mid^{r_1+1} \sigma_2(x) + \ln(\mid x \mid)\phi_1(x)\,,\end{aligned}$$

donde $\sigma_1(x)$ y $\sigma_2(x)$ son series de potencias (centradas en cero y convergentes para $\mid x \mid < \rho_0$) con $\sigma_1(0) \neq 0$.
Si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, existen dos soluciones $\phi_1(x), \phi_2(x)$ definidas y linealmente independientes para $0 <\mid x \mid < \rho_0$, las cuales son de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \mid x \mid^{r_1} \sigma_1(x)\,,\\ \phi_2(x) &= \mid x \mid^{r_2} \sigma_2(x) + c\ln(\mid x \mid)\phi_1(x)\,,\end{aligned}$$

donde $\sigma_1(x)$ y $\sigma_2(x)$ son series de potencias (centradas en cero y convergentes para $\mid x \mid < \rho_0$) con $\sigma_1(0) \neq 0 \neq \sigma_2(0)$ y $c \in \mathbb{R}$ es una constante (que puede ser cero).
Finalmente si las raíces del polinomio indicial son complejas, digamos $r_1 = \alpha + \imath\beta$, $r_2 = \alpha - \imath\beta$, $\beta \neq 0$, existen soluciones linealmente independientes de la forma

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \mid x \mid^{\alpha} \cos(\beta\ln(\mid x \mid))(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k)\,,\\ \phi_2(x) &= \mid x \mid^{\alpha}\, sen(\beta\ln(\mid x \mid))(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k x^k)\,.\end{aligned}$$

Ejemplo 6.6.5 Considere la ecuación

$$L(y) \;=\; x^2y'' + 3xy' + (1+x)y \;=\; 0\,.$$

Tenemos $a(x) = 3$ y $b(x) = 1 + x$. Luego el polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1) + 3r + 1 \;=\; (r+1)^2\,,$$

cuyas raíces son $r_1 = r_2 = -1$.
Sea

$$\phi(x) \;=\; \phi(x,r) \;=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
x\phi(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = x^r \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k \,, \\
3x\phi'(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} 3(k+r) c_k x^k \,, \\
x^2\phi''(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^k \,.
\end{aligned}
$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$L(\phi)(x,r) = c_0 x^r q(r) + \sum_{k=0}^{\infty} [q(r+k)c_k + c_{k-1}] x^k \,.$$

Para todo r cercano a $r_1 = -1$, $q(r+k) \neq 0$ para todo $k \geq 1$. Luego poniendo

$$c_k(r) = \frac{-c_{k-1}}{q(r+k)}$$

obtenemos

$$L(\phi)(x,r) = c_0 x^r q(r) \,.$$

Para estos r's, poniendo $c_0(r) = 1$, de la fórmula de recurrencia de los c_k se puede deducir

$$c_k(r) = \frac{(-1)^k}{q(r+1)q(r+2)\cdots q(r+k)} = \frac{(-1)^k}{(r+2)^2(r+3)^2\cdots(r+k+1)^2} \,.$$

Por lo tanto

$$c_k(r_1) = \frac{(-1)^k}{1^2 \cdot 2^2 \cdots k^2} = \frac{(-1)^k}{(k!)^2}$$

y

$$\phi_1(x) = x^{-1}[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} x^k] \,.$$

Observe además que

$$
\begin{aligned}
c_k'(r) = {} & (-1)^k(-2)[\frac{1}{(r+2)^3}\frac{1}{(r+3)^2}\cdots\frac{1}{(r+k)^2} + \\
& \frac{1}{(r+2)^2}\frac{1}{(r+3)^3}\cdots\frac{1}{(r+k)^2} + \\
& \frac{1}{(r+2)^2}\frac{1}{(r+3)^2}\cdots\frac{1}{(r+k)^3}] \\
= {} & (-2)c_k(r)[\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+3} + \cdots \frac{1}{r+k}]
\end{aligned}
$$

lo que implica

$$c_k'(r_1) \;=\; \frac{(-2)(-1)^k}{(k!)^2}[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k}]\cdot$$

Por lo tanto

$$\phi_2(x) \;=\; (-2)x^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k})x^k \quad + \quad \ln(|\,x\,|)\phi_1(x)\,,$$

y la solución general es

$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x)+b\phi_2(x)\,, \quad a,b\in\mathbb{R}\,,$$

la cual está definida para todo $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$.

6.7 Ecuación de Bessel y funciones de Bessel

Para cada $p\in\mathbb{R}$, $p\geq 0$, consideremos la ecuación de Bessel de orden p

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y \;=\; 0\,.$$

Se llama **función de Bessel** a toda solución de esta ecuación. Estas aparecen en problemas sobre vibraciones de una cadena colgante (Daniel Bernoulli), vibraciones de una membrana circular (Euler), movimiento de planetas (Bessel), propagación de ondas, elasticidad, movimiento de fluidos, teoría del potencial, etc.

Ya sabemos que esta ecuación tiene a $x=0$ como único punto singular y que este es regular. Para resolverla alrededor de $x=0$ usando el método de Frobenious calculamos primeramente su polinomio indicial

$$q(r) \;=\; r(r-1)+r-p^2 \;=\; r^2-p^2\,,$$

cuyas raíces son $r_1=p$ y $r_2=-p$.
Buscamos entonces un solución $\phi(x)$ de la forma

$$\phi(x) \;=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\,.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
-p^2\phi(x) &= x^r(-p^2c_0-p^2c_1x+\sum_{k=2}^{\infty}-p^2c_kx^k)\,,\\
x^2\phi(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+2} \;=\; x^r\sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}x^k\,,\\
x\phi'(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kx^k \;=\; x^r(rc_0+(r+1)c_1x+\sum_{k=2}^{\infty}(k+r)c_kx^k)\,,\\
x^2\phi''(x) &= x^r(r(r-1)c_0+(r+1)rc_1x+\sum_{k=2}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_kx^k)\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de Bessel obtenemos

$$x^r(c_0q(r) + c_1q(r+1)x + \sum_{k=2}^{\infty}[q(r+k)c_k + c_{k-2}]x^k \;=\; 0\,.$$

Asumiendo para r los valores $\pm p$, con $p \neq \frac{1}{2}$, tenemos que $q(r+1)$ es no nulo. Por lo tanto asumimos $c_1 = 0$, inclusive para $p = \frac{1}{2}$. Para anular los coeficientes correspondientes a $k \geq 2$ debemos tener

$$c_k(r) \;=\; \frac{-c_{k-2}(r)}{q(r+k)} \;=\; \frac{-c_{k-2}(r)}{(r+k)^2 - p^2} \;=\; \frac{-c_{k-2}(r)}{(r+k+p)(r+k-p)}\,.$$

Los primeros $c_k(r)$ son:

$$\begin{aligned}
c_2(r) &= \frac{-c_0(r)}{(r+p+2)(r-p+2)}\\
c_3(r) &= 0\\
c_4(r) &= \frac{-c_2(r)}{(r+p+4)(r-p+4)} \;=\; \frac{c_0(r)}{(r+p+2)(r+p+4)(r-p+2)(r-p+4)}\\
c_5(r) &= 0\\
c_6(r) &= \frac{-c_4(r)}{(r+p+6)(r-p+6)}\\
&= \frac{-c_0(r)}{(r+p+2)(r+p+4)(r+p+6)(r-p+2)(r-p+4)(r-p+6)}
\end{aligned}$$

de lo que se deduce

$$\begin{aligned}
c_{2k-1}(r) &= 0 \quad \text{y}\\
c_{2k} &= \frac{(-1)^k c_0(r)}{(r+p+2)(r+p+4)\cdots(r+p+2k)(r-p+2)(r-p+4)\cdots(r-p+2k)}
\end{aligned}$$

para todo $k \geq 1$.
Luego para $r = r_1 = p$ y todo $k \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
c_{2k}(r_1) &= \frac{(-1)^k c_0(r_1)}{(2p+2)(2p+4)\cdots(2p+2k)2\cdot 4\cdots 2k}\\
&= \frac{(-1)^k c_0(r_1)}{2^{2k}k!(p+1)(p+2)\cdots(p+k)}\,.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\phi_1(x) \;=\; x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_0(r_1)}{2^{2k}k!(p+1)(p+2)\cdots(p+k)}x^{2k}$$

es una función Bessel.

Para elegir $c_0(r)$ de modo que $\phi_1(x)$ sea la llamada función de Bessel de orden p de primera clase, debemos hacer algunos recuerdos sobre la función gamma de Euler.

Recuerdos de la función Gamma.
Para $q > 0$ está definida por la fórmula

$$\Gamma(q) \;=\; \int_0^\infty e^{-t}\, t^{q-1}\, dt\,.$$

y tiene la siguientes propiedades

$$\lim_{q\to 0^+} \Gamma(q) \;=\; +\infty \tag{6.6}$$
$$\Gamma(1) \;=\; 1 \tag{6.7}$$
$$\Gamma(q+1) \;=\; q\,\Gamma(q) \tag{6.8}$$
$$\Gamma(k+1) \;=\; k! \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z} \cup \{0\} \tag{6.9}$$

Para $-1 < q < 0$ tenemos $0 < q+1 < 1$ y por lo tanto $\Gamma(q+1)$ está bien definido. Usando esto y (6.8) se define para $-1 < q < 0$

$$\Gamma(q) \;=\; \frac{\Gamma(q+1)}{q}\,. \tag{6.10}$$

Teniendo así definido $\Gamma(q)$ para $-1 < q < 0$, podemos usar la misma fórmula (6.10) para definir Γ en el intervalo] -2, -1[. De esta forma podemos definir Γ para todo número negativo que no es un entero preservando la propiedad (6.8). Además se puede demostrar que

$$\lim_{q\to 0^-} \Gamma(q) \;=\; -\infty \quad \text{y} \tag{6.11}$$
$$\lim_{q\to k^\pm} |\,\Gamma(q)\,| \;=\; +\infty \quad \text{para todo entero negativo } k \tag{6.12}$$

Volviendo a la ecuación de Bessel, pongamos

$$c_0(r_1) = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}\,.$$

Con este valor de $c_0(r_1)$, usando reiteradas veces (6.8), obtenemos

$$c_{2k}(r_1) \;=\; \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\; k!\; \Gamma(k+p+1)}\,,$$

y la solución $\phi_1(x)$ que se denota por $J_p(x)$ que asume la forma

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\;(\frac{x}{2})^{2k+p}}{k!\;\Gamma(k+p+1)}$$

se denomina **función de Bessel de primera clase de orden** p.
Observe que como la ecuación de Bessel no tiene otros puntos singulares la función de Bessel $J_p(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

Para $r = r_2 = -p$ y todo $k \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} c_{2k}(r_2) &= \frac{(-1)^k c_0(r_2)}{2 \cdot 4 \cdots 2k(-2p+2)(-2p+4)\cdots(-2p+2k)} \\ &= \frac{(-1)^k c_0(r_1)}{2^{2k}k!(-p+1)(-p+2)\cdots(-p+k)} \,. \end{aligned}$$

Para que todos los $c_k(r_2)$ estén definidos imponemos la condición $p \notin \mathbb{Z}^+$.
Así tenemos la solución

$$\phi_2(x) \;=\; x^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_0(r_1)}{2^{2k}k!(-p+1)(-p+2)\cdots(-p+k)} x^{2k} \,.$$

Poniendo

$$c_0(r_2) = \frac{1}{2^{-p}\Gamma(-p+1)} \,,$$

obtenemos

$$c_{2k}(r_2) \;=\; \frac{(-1)^k}{2^{2k-p}\; k!\; \Gamma(k-p+1)} \,,$$

y la solución $\phi_2(x)$ que se denota por $J_{-p}(x)$ y que asume la forma

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{x}{2})^{2k-p}}{k! \; \Gamma(k-p+1)}$$

se denomina **función de Bessel de primera clase de orden** $-p$.
Esta función de Bessel $J_p(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Además $J_p(0) = 0$, lo que implica que $J_p(x)$ es acotada para $x > 0$ cercano a cero. Por otra parte el primer término de $J_{-p}(x)$ es

$$\frac{(\frac{x}{2})^{-p}}{\Gamma(-p+1)} \,,$$

lo que implica que $J_{-p}(x)$ no es acotada para $x > 0$ cercano a cero.
Luego bajo nuestra condición: p no es cero ni un entero positivo, las soluciones $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^+$ y la solución general es

$$\phi(x) \;=\; aJ_p(x) \;+\; J_{-p}(x) \,, \quad a, b \in \mathbb{R} \,.$$

Caso p es un entero no negativo.
Sea $p \geq 0$ un entero. Tenemos

$$J_p(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{x}{2})^{2k+p}}{k! \; (k+p)!} \,.$$

Observe que (6.12) implica

$$\lim_{q \to p} \mid \Gamma(-q+k+1) \mid = +\infty \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, p-1$$

Por lo tanto en la serie que define a $J_{-p}(x)$ los coeficientes correspondientes a $k = 0, 1, \ldots, p-1$ son cero. Así

$$\begin{aligned} J_{-p}(x) &= \sum_{k=p}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{x}{2})^{2k-p}}{k! \; (k-p)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+p} \; (\frac{x}{2})^{2(k+p)-p}}{(k+p)! \; (k+p-p)!} \\ &= (-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{x}{2})^{2k+p}}{k! \; (k+p)!} \\ &= (-1)^p \; J_p(x) \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son linealmente dependientes. Para encontrar una función de Bessel linealmente independiente con $J_p(x)$, definimos para $q > 0$ que no es un entero

$$Y_q(x) \;=\; \frac{J_q(x)\cos(q\pi) - J_{-q}(x)}{\operatorname{sen}(q\pi)} \,.$$

Esta función de Bessel es llamada **función de Bessel de segunda clase de orden** q y es linealmente independiente con $J_q(x)$ para todo $q > 0$ que no es un entero.
Si en la fracción que define a $Y_q(x)$ ponemos $q = p$, tanto el numerador como el denominador se anulan. Usando L'Hopital se puede demostrar que

$$Y_p(x) \;=\; \lim_{q \to p} Y_q(x)$$

está bien definida y que es una función de Bessel linealmente independiente con $J_p(x)$. Por lo tanto, en este caso, la solución general es

$$\phi(x) \;=\; aJ_p(x) \;+\; bY_p(x) \,, \quad a, b \in \mathbb{R} \,.$$

Ejercicios.

1) $\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] \;=\; x^p J_{p-1}(x) \quad .$

2) $\frac{d}{dx}[x^{-p}J_p(x)] \;=\; -x^{-p}J_{p+1}(x)$.

3) $J_p'(x)+\frac{p}{x}J_p(x) \;=\; J_{p-1}(x)$.

4) $J_p'(x)-\frac{p}{x}J_p(x) \;=\; -J_{p+1}(x)$.

5) $J_p'(x) \;=\; \frac{1}{2}[J_{p-1}(x)-J_{p+1}(x)]$.

6) $J_p(x) \;=\; \frac{x}{2p}[J_{p-1}(x)+J_{p+1}(x)]$.

7) Demuestre que el cambio de coordenadas $y=x^{-\frac{1}{2}}u$ transforma la ecuación de Bessel de orden p en la ecuación

$$u''+(1+\frac{1-4p^2}{4x^2})u \;=\; 0\,.$$

8) Demuestre que $J_{\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{sen}(x)$.

9) Demuestre que $J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)$.

Soluciones.
1) Tenemos

$$\begin{aligned} x^pJ_p(x) &= x^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(\frac{x}{2})^{2k+p}}{k!\,\Gamma(k+p+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2(k+p)}}{2^{2k+p}\,k!\,\Gamma(k+p+1)} \end{aligned}$$

Derivando con respecto a x obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^pJ_p(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2(k+p)\,x^{2(k+p)-1}}{2^{2k+p}\,k!\,\Gamma(k+p+1)} \\ &= x^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x^{2(k+p)-1-p}}{2^{2k+p-1}\,k!\,\frac{\Gamma(k+p+1)}{k+p}} \\ &= x^p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(\frac{x}{2})^{2k+p-1}}{k!\,\Gamma(k+p)} \\ &= x^pJ_{p-1}(x)\,. \end{aligned}$$

2) Se demuestra de la misma forma que 1) y se deja de ejercicio.
3) De 1) tenemos

$$x^pJ_p'(x)\;+\;px^{p-1}J_p(x)\;=\;x^pJ_{p-1}(x)\,,$$

y nuestro resultado se obtiene multiplicando por x^{-p}.

4) Se demuestra de la misma forma que 3) y se deja de ejercicio.
5) Se demuestra sumando las ecuaciones 3) y 4).
6) Se demuestra restando las ecuaciones 3) y 4).
7) Tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{-\frac{1}{2}}u(x)\,, \\ y'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}u(x) + x^{-\frac{1}{2}}u'(x)\,, \\ y''(x) &= \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}u(x) - x^{-\frac{3}{2}}u'(x) + x^{-\frac{1}{2}}u''(x)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} -p^2y(x) &= -p^2x^{-\frac{1}{2}}u(x)\,, \\ x^2y(x) &= x^{\frac{3}{2}}u(x)\,, \\ xy'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u(x) + x^{\frac{1}{2}}u'(x)\,, \\ x^2y''(x) &= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}u(x) - x^{\frac{1}{2}}u'(x) + x^{\frac{3}{2}}u''(x)\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de Bessel se obtiene

$$\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}u(x) - x^{\frac{1}{2}}u'(x) + x^{\frac{3}{2}}u''(x) - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}u(x) + x^{\frac{1}{2}}u'(x) + x^{\frac{3}{2}}u(x) - p^2x^{-\frac{1}{2}}u(x) \;=\; 0\,.$$

Reordenando

$$x^{\frac{3}{2}}u''(x) + (-x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})u'(x) + (\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - p^2x^{-\frac{1}{2}})u(x) \;=\; 0\,,$$

o lo que es lo mismo

$$x^{\frac{3}{2}}u''(x) + (x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}(1-4p^2)x^{-\frac{1}{2}})u(x) \;=\; 0\,.$$

Finalmente multiplicando por $x^{-\frac{3}{2}}$ obtenemos

$$u''(x) + (1 + \frac{1}{4}(1-4p^2)x^{-2})u(x) \;=\; 0\,.$$

8) Para $p = \frac{1}{2}$ el cambio de coordenadas $y = x^{-\frac{1}{2}}u$ anterior nos da la ecuación

$$u'' + u = 0\,,$$

cuya solución general es

$$u(x) \;=\; c_1\cos(x) + c_2\mathrm{sen}(x)\,.$$

Por lo tanto las funciones

$$\phi_1(x) \;=\; x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(x) \quad \text{y} \quad \phi_2(x) \;=\; x^{-\frac{1}{2}}\cos(x)\,,$$

son soluciones de nuestra ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$.
Observe que como

$$\lim_{x\to 0^+} J_{\frac{1}{2}}(x) \;=\; 0 \;=\; \lim_{x\to 0^+}\phi_1(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=+\infty \;=\; \lim_{x\to 0^+}\phi_2(x)\,,$$

tenemos que existe constante A tales que

$$J_{\frac{1}{2}}(x) \;=\; A\phi_1(x)\,.$$

Además

$$\begin{aligned} J'_{\frac{1}{2}}(x) \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2k+\frac{1}{2})\,(\frac{x}{2})^{2k-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{2}}{k!\,\Gamma(k+\frac{3}{2})} \\ &=\; \frac{\sqrt{2}}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2k+\frac{1}{2})\,(\frac{x}{2})^{2k}}{k!\,(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2})}\,, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \phi'_1(x) \;&=\; x^{-\frac{1}{2}}\cos(x) - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{sen}(x) \\ &=\; x^{-\frac{1}{2}}(\cos(x) - \frac{1}{2}x^{-1}\mathrm{sen}(x))\,. \end{aligned}$$

Luego si llamamos

$$M(x) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(2k+\frac{1}{2})\,(\frac{x}{2})^{2k}}{k!\,(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{1}{2})} \;=\; A(\cos(x) - \frac{1}{2}x^{-1}\mathrm{sen}(x))\,,$$

debemos tener

$$M(0) \;=\; \frac{\sqrt{2}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \;=\; A\frac{1}{2}\,.$$

Como $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, concluimos que $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, lo que implica

$$J_{\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{sen}(x)\,.$$

9) Como

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(\frac{x}{2})^{2k}}{k!\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}\,,$$

y en el desarrollo en serie de potencias centrada en cero de la función $\mathrm{sen}(x)$ (resp. $\cos(x)$) aparecen solo potencias impares de x (resp. solo potencias pares de x) existe constante B tal que

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; B\phi_2(x)\,.$$

Si llamamos

$$N(x) \;=\; \sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(\frac{x}{2})^{2k}}{k!\;\Gamma(k+\frac{1}{2})}\,,$$

debemos tener

$$N(0) \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \;=\; B\,.$$

Por lo tanto

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x)\,.$$

6.8 Ecuación Hipergeométrica de Gauss

Para a, b, c constantes reales, se llama **ecuación hipergeométrica de Gauss** a la ecuación

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby \;=\; 0\,.$$

Supondremos desde el inicio que $c \neq 0$ y $c \neq a+b+1$. Bajo estas condiciones las funciones

$$P(x) \;=\; \frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)} \quad \text{y} \quad Q(x) \;=\; \frac{-ab}{x(1-x)}\,,$$

solo no son analíticas en los puntos $x=0$ y $x=1$. Por lo tanto estos son los únicos puntos singulares de nuestra ecuación.
Como las funciones

$$a(x) \;=\; xP(x) \;=\; \frac{c-(a+b+1)x}{1-x} \quad \text{y} \quad b(x) \;=\; x^2Q(x) \;=\; \frac{-abx}{1-x}\,,$$

son analíticas en $x=0$, este es un punto singular regular.

Ejercicio. El punto $x=1$ es punto singular regular.

Busquemos primero la solución general alrededor de $x=0$. El correspondiente polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1) + a(0)r + b(0) \;= r(r-1) + cr \;=\; r(r-1+c)\,.$$

Examinemos las condiciones que deben cumplirse para que tengamos una solución asociada a $r=0$, es decir, para que tengamos una solución de la forma

$$\phi(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,.$$

Estas son $r_1 = 0$ (es decir $0 \geq 1-c \iff c \geq 1$), o $r_2 = 0$ (es decir $c \leq 1$) y $r_1 - r_2 = 1-c$ no es un entero positivo (es decir c no es cero ni un entero negativo). Luego la condición es

$$c \notin \{0\} \cup \mathbb{Z}^- \,. \tag{6.13}$$

Bajo esta condición y con $\phi(x)$ definido como arriba, tenemos

$$\begin{aligned}
-ab\phi(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} -abc_k x^k \\
-(a+b+1)x\phi'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} -k(a+b+1)c_k x^k \\
c\phi'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} ckc_k x^{k-1} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c(k+1)c_{k+1}x^k \\
-x^2\phi''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} -k(k-1)c_k x^k \\
x\phi''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)kc_{k+1}x^k \,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}([(k+1)k + c(k+1)]c_{k+1} + [\,-k(k-1) - (a+b+1)k - ab]c_k)x^k \;=\; 0\,.$$

Luego para todo $k \geq 0$ debemos tener

$$[(k+1)k + c(k+1)]c_{k+1} + [\,-k(k-1) - (a+b+1)k - ab]c_k \;=\; 0\,,$$

o lo que es lo mismo

$$(k+1)(k+c)c_{k+1} - (k+a)(k+b)c_k \;=\; 0\,.$$

Esto implica

$$\begin{aligned}
c_{k+1} &= \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)}c_k \\
&= \frac{(a+k)(a+k-1)(b+k)(b+k-1)}{(k+1)k(c+k)(c+k-1)}c_{k-1} \\
&\;\vdots \\
&= \frac{(a+k)(a+k-1)\cdots(a+1)a(b+k)(b+k-1)\cdots(b+1)b}{(k+1)k\cdots 2\cdot 1(c+k)(c+k-1)\cdots(c+1)c}c_0\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto si ponemos $c_0 = 1$, tenemos para todo $k \geq 1$

$$c_k \;=\; \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!\; c(c+1)\cdots(c+k-1)}\,,$$

y nuestra solución es

$$\phi_1(x) \;=\; 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!\;c(c+1)\cdots(c+k-1)}x^k\,.$$

Esta serie se conoce como la **serie hipergeométrica** y se denota por

$$F(a,b,c,x) \;=\; 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)b(b+1)\cdots(b+k-1)}{k!\;c(c+1)\cdots(c+k-1)}x^k\,.$$

Observaciones 6.8.1

1. Cuando $a=1$ y $b=c$ tenemos

   $$F(1,b,b,x) \;=\; 1+\sum_{k=1}^{\infty}x^k\,.$$

   Por lo tanto para todo $\mid x \mid< 1$

   $$F(1,b,b,x) \;=\; \frac{1}{1-x}\,.$$

2. Si a o b son un entero negativo o cero, la serie hipergeométrica se reduce a un polinomio, y por lo tanto converge para todo $x\in\mathbb{R}$.

3. Si a o b no son un entero negativo ni cero, la serie hipergeométrica converge sólo para $\mid x \mid< 1$.

4. Luego para $\mid x \mid< 1$, $F(a,b,c,x)$ es una función analítica, que se denomina **función hipergeométrica**.

5. Tenemos $F(a,b,c,x)=F(b,a,c,x)$.

Determinemos ahora bajo que condiciones tenemos una solución asociada a la raíz $1-c\neq 0$ del polinomio indicial.
Esto sucede cuando $r_1=1-c$ (es decir, cuando $1-c>0 \iff c<1$) o cuando $r_2=1-c$ (es decir $c>1$) y $r_1-r_2=c-1$ no es un entero positivo ni cero (es decir, c no es un entero positivo).
Luego la condición es

$$c\notin\mathbb{Z}^+\,. \tag{6.14}$$

Luego asociada a la condición (6.14) tenemos una solución de la forma

$$\phi_2(x) \;=\; x^{1-c}\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{c}_k x^k\,,\quad \tilde{c}_0\neq 0\,.$$

donde los $\tilde{c}_k$ pueden encontrarse sustituyendo en la ecuación.
Otra manera de encontrarlos, es hacer el cambio de coordenadas

$$y=x^{1-c}z\,,$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} y' &= (1-c)x^{-c}z + x^{1-c}z' \\ y'' &= -c(1-c)x^{-c-1}z + 2(1-c)x^{-c}z' + x^{1-c}z''\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= x(1-x)[\,-c(1-c)x^{-c-1}z + 2(1-c)x^{-c}z' + x^{1-c}z''] + \\ &\quad [c-(a+b+1)x][(1-c)x^{-c}z + x^{1-c}z'] - abx^{1-c}z \\ &= x^{1-c}x(1-x)z'' + [x(1-x)2(1-c)x^{-c} + (c-(a+b+1)x)x^{1-c}]z' + \\ &\quad [\,-c(1-c)x(1-x)x^{-c-1} + (1-c)x^{-c}(c-(a+b+1)x) - abx^{1-c}]z\,. \end{aligned}$$

Multiplicando por x^{c-1} se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= x(1-x)z'' + [2(1-c)(1-x) + c - (a+b+1)x]z' + \\ &= [\,-c(1-c)(1-x)x^{-1} + (1-c)cx^{-1} - (1-c)(a+b+1) - ab]z\,, \end{aligned}$$

o bien

$$x(1-x)z'' + [2-c-((a-c+1)+(b-c+1)+1)x]z' - (a-c+1)(b-c+1)z \;=\; 0\,.$$

Observe que esta última ecuación es la ecuación hipergeomértrica con las constantes a, b, c sustituidas por $a-c+1, b-c+1, 2-c$, respectivamente. Además como la condición (6.14) para c implica la condición (6.13) para $2-c$, tenemos que

$$z(x) \;=\; F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

es solución alrededor de $x = 0$ de la ecuación transformada.
Por lo tanto

$$\phi_2(x) \;= \mid x \mid^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

es solución de la ecuación original alrededor de $x = 0$.
Así bajo la condición

$$c \notin \mathbb{Z}$$

(que es la condición (6.13) más la condición (6.14))
tenemos que la solución general alrededor de $x = 0$ es

$$\phi(x) \;=\; c_1 F(a,b,c,x) \;+\; c_2 \mid x \mid^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

la cual está definida para $0 <\mid x \mid< 1$.

Para resolver alrededor de $x = 1$, hacemos el cambio de coordenadas $t = 1 - x$. Observemos que este cambio lleva $x = 1$ en $t = 0$ y que $\frac{dt}{dx} = -1$. Luego reemplazando en la ecuación nos queda

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} + [a+b-c+1-(a+b+1)t]\frac{dy}{dt} - aby \;=\; 0\,.$$

Luego si $c-a-b$ no es un entero, la solución general de la ecuación transformada alrededor de $t=0$ es

$$\phi(t) = c_1 F(a,b,a+b-c+1,t) + c_2 \mid t \mid^{c-a-b} F(c-b,c-a,c-a-b+1,t)\,, \quad c_1,c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

y está definida para $0 <\mid t \mid< 1$. Por lo tanto la solución general alrededor de $x=1$ de la ecuación hipergeométrica original es

$$\phi(x) = c_1 F(a,b,a+b-c+1,1-x) + c_2 \mid 1-x \mid^{c-a-b} F(c-b,c-a,c-a-b+1,1-x)\,,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, y está definida para $0 <\mid 1-x \mid< 1$, es decir para x en $]0,2[$ - $\{1\}$.

6.9 Ejercicios resueltos

Ejercicio 6.9.1 Usando series de potencias encuentre la solución general de la ecuación

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y \;=\; 0\,,$$

alrededor de $x=0$. Determine su intervalo máximo de definición.

Solución. Como los puntos singulares son $x=1$ y $x=-1$, la solución general alrededor de $x=0$ está definida por lo menos para $\mid x \mid< 1$.
Sea

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}
-4y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -4a_n x^n \\
-6xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -6na_n x^n \\
-x^2y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} -n(n-1)a_n x^n \\
y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(-4-6n-n(n-1))a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n \;=\; 0\,,$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{n=0}^{\infty}[-(n+4)(n+1)a_n+(n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n \;=\; 0\,.$$

Por lo tanto debemos tener

$$a_{n+2} \;=\; \frac{n+4}{n+2}\,a_n \quad \forall n\geq 0\,.$$

Así para $n=0,1,2,3,4$ y 5 obtenemos

$$\begin{array}{llllllllll} a_2 & = & \frac{4}{2}\,a_0 & & & a_3 & = & \frac{5}{3}\,a_1 & & \\ a_4 & = & \frac{6}{4}\,a_2 & = & \frac{6}{2}\,a_0 & a_5 & = & \frac{7}{5}\,a_3 & = & \frac{7}{3}\,a_1 \\ a_6 & = & \frac{8}{6}\,a_4 & = & \frac{8}{2}\,a_0 & a_7 & = & \frac{9}{7}\,a_5 & = & \frac{9}{3}\,a_1 \end{array}$$

De aquí podemos concluir que para todo $n\geq 1$ se tiene

$$a_{2n} \;=\; \frac{2(n+1)}{2}\,a_0 \;=\; (n+1)\,a_0 \qquad \text{y} \qquad a_{2n+1} \;=\; \frac{2n+3}{3}\,a_1\,.$$

Entonces la solución general es

$$y(x) \;=\; a_0\,[1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}] \;+\; a_1\,[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3}x^{2n+1}]\,, \qquad a_0,a_1\in\mathbb{R}\,.$$

Finalmente el intervalo máximo de definición de la solución general es]-1, 1[, ya que por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{2n}$ diverge para $x\pm 1$.

Ejercicio 6.9.2 Usando series de potencia encuentre la solución general alrededor de $x=0$ de la ecuación

$$y'' \;-\; 2x^2y' \;-\; 6xy \;=\; 0\,.$$

Determine además el intervalo máximo donde la solución está definida.

Solución.Como esta ecuación no tiene puntos singulares la solución general alrededor de $x=0$ estará definida para todo $x\in\mathbb{R}$.

Sea

$$\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\,.$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} -6x\phi(x) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}-6a_nx^{n+1} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}-6a_{n-1}x^n \\ -2x^2\phi'(x) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}-2na_nx^{n+1} \;=\; \sum_{n=2}^{\infty}-2(n-1)a_{n-1}x^n \\ \phi''(x) & = & \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\,. \end{array}$$

Reemplazando en la ecuación se obtiene

$$2a_2 \ + \ 6(a_3 - a_0)x \ + \ \sum_{n=2}^{\infty} [(-4-2n)a_{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n \ = \ 0 \, .$$

Por lo tanto debemos tener

$$a_2 \ = \ 0 \, , \quad a_3 \ = \ a_0 \, , \quad \text{y} \quad a_{n+2} \ = \ \frac{2}{n+1} \, a_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \, .$$

Como el salto en la recurrencia es 3, los coeficientes de la forma a_{3n} se escriben en términos de a_0, los de la forma a_{3n+1} en términos de a_1 y los de la forma a_{3n+2} en términos de a_2.

De esta forma

$$a_{3n} \ = \ \frac{2}{3n-2} a_{3n-3} \ = \ \frac{2}{3n-2} \cdot \frac{2}{3n-5} \cdot \frac{2}{3n-8} \cdots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{1} \cdot a_0$$

lo que implica que para todo $n \geq 1$

$$a_{3n} \ = \ \frac{2^n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)} a_0 \, .$$

También

$$a_{3n+1} \ = \ \frac{2}{3n-1} a_{3n-2} \ = \ \frac{2}{3n-1} \cdot \frac{2}{3n-4} \cdot \frac{2}{3n-7} \cdots \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{2} \cdot a_1$$

lo que implica que para todo $n \geq 1$

$$a_{3n+1} \ = \ \frac{2^n}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)} a_1 \, .$$

Finalmente como

$$a_{3n+2} \ = \ 0 \, , \qquad \text{para todo} \quad n \geq 0 \, ,$$

la solución general es

$$\begin{aligned} \phi(x) \ &= \ a_0 \, [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)} x^{3n}] \ + \\ & \quad \ a_1 \, [x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)} x^{3n+1}] \, , \end{aligned}$$

con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

Ejercicio 6.9.3 Usando series de potencias resuelva el problema de valores iniciales

$$y'' + xy' - y = 0\,, \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = \frac{1}{2}\,.$$

Solución. Como las funciones x y -1 son analíticas en todo punto, buscamos soluciones de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,.$$

Como

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \quad \text{y} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2}\,,$$

sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0\,,$$

o lo que es lo mismo

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + (n-1)\, a_n]\, x^n = 0\,.$$

Por lo tanto

$$2a_2 - a_0 = 0 \quad \text{y} \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+2} + (n-1)\, a_n = 0\,,$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Luego

$$a_2 = \frac{1}{2}\, a_0$$

y

$$a_{n+2} = -\frac{n-1}{(n+2)\,(n+1)}\, a_n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

De esta forma

$$a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n+1} = 0 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

y para $n \geq 2$

$$a_{2n} = (-1)^{n+1}\, \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{(2n)!}\, a_0 = (-1)^{n+1}\, \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}\,(n-2)!(2n)!}\, a_0\,.$$

Luego la solución general es

$$y(x) = a_1\, x + a_0 \left(1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}\,(n-2)!(2n)!}\, x^{2n} \right)\,.$$

Finalmente la condición inicial

$$y(0) \;=\; 2 \quad \Longrightarrow \quad a_0 \;= 2 \quad \text{y} \quad y'(0) \;=\; \frac{1}{2} \Longrightarrow \quad a_1 \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

De esta forma la solución particular buscada es

$$y(x) \;= \frac{1}{2}\,x \;+\; 2\left(1 \;+\; \frac{1}{2}\,x^2 \;+\; \sum_{n=2}^{\infty}\;(-1)^{n+1}\,\frac{(2n-3)!}{2^{n-2}\,(n-2)!(2n)!}\,x^{2n}\right)\,.$$

Ejercicio 6.9.4 Usando el método de Frobenious encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2y'' - x(\frac{1}{2} + 2x)y' + \frac{1}{2}(1-2x)y \;=\; 0\,,$$

alrededor de $x = 0$. Determine para que valores de x está definida la solución.

Solución. El único punto singular de la ecuación es $x = 0$. Además, como las funciones $a(x) = -(\frac{1}{2} + 2x)$ y $b(x) = \frac{1}{2}(1-2x)$ son analíticas en $x = 0$, $x = 0$ es punto singular regular.
El polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1) - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} \;=\; (r-1)(r-\frac{1}{2})\,,$$

cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1}{2}$. Luego estamos en el caso $r_1 - r_2 = \frac{1}{2}$ no es cero ni un entero positivo.
Sea

$$\phi(x) \;=\; \phi(x,r) \;=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty} c_k(r)x^k\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\phi(x) \;&=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}c_k(r)x^k\\
-x\phi(x) \;&=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}-c_k(r)x^{k+1} \;=\; x^r\sum_{k=1}^{\infty}-c_{k-1}(r)x^k\,,\\
-\frac{1}{2}x\phi'(x) \;&=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{2}(k+r)c_k(r)x^k\,,\\
-2x^2\phi'(x) \;&=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}-2(k+r)c_k(r)x^{k+1} \;=\; x^r\sum_{k=1}^{\infty}-2(k-1+r)c_{k-1}(r)x^k\\
x^2\phi''(x) \;&=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k(r)x^k\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$c_0(r)x^r q(r) + \sum_{k=1}^{\infty} [q(r+k)c_k(r) + (-1-2(k-1+r))c_{k-1}(r)]x^k\,.$$

Ponemos entonces

$$c_k(r) \;=\; \frac{-(-1-2(k-1+r))c_{k-1}(r)}{q(r+k)} \;=\; \frac{2(r+k-\frac{1}{2})c_{k-1}(r)}{(r+k-1)(r+k-\frac{1}{2})} \;=\; \frac{2c_{k-1}(r)}{k+r-1}\,.$$

Luego si $c_0(r) = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} c_k(r) &= \frac{2c_{k-1}(r)}{k+r-1} = \frac{2^2 c_{k-2}}{(k+r-1)(k+r-2)} \\ &\vdots \\ &= \frac{2^k}{(r+k-1)(r+k-2)\cdots(r+1)r} \\ &= \frac{2^k}{r(r+1)\cdots(r+k-1)}\,. \end{aligned}$$

Para $r = r_1 = 1$ obtenemos

$$c_k(r_1) = \frac{2^k}{1\cdot 2\cdots k} \;=\; \frac{2^k}{k!}$$

y

$$\phi_1(x) \;=\; x[1 \quad + \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}x^k]\,.$$

Para $r = r_2 = \frac{1}{2}$ obtenemos

$$c_k(r_2) = \frac{2^k}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}} \;=\; \frac{4^k}{1\cdot 3\cdots(2k-1)} \;=\; \frac{8^k k!}{(2k)!}$$

y

$$\phi_2(x) \;= \mid x \mid^{-\frac{1}{2}} [1 \quad + \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k k!}{(2k)!}x^k]\,.$$

Por lo tanto la solución general es

$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x) + b\phi_2(x)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,,$$

Ella está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, ya que $x = 0$ es el único punto singular.

Ejercicio 6.9.5 Usando Frobenius encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ de la ecuación

$$x^2y'' \;+\; \frac{3}{2}x(1+2x)y' \;-\; \frac{1}{2}(1-12x)y \;=\; 0\,.$$

Solución.Tenemos

$$P(x) \ = \ \frac{3}{2}(1+2x) \quad \text{y} \quad Q(x) \ = \ -\frac{1}{2}(1-12x)\,.$$

Luego el polinomio indicial es

$$q(r) \ = \ r(r-1) \ + \ \frac{3}{2}r \ - \ \frac{1}{2} \ = \ (r \ + \ 1)(r \ - \ \frac{1}{2})\,,$$

cuyas raíces son $r_1 = \frac{1}{2}$, y $r_2 \ = \ -1$. Además como $r_1 - r_2 \ = \ \frac{3}{2}$ no es un entero, tenemos soluciones linealmente independientes asociadas a r_1 y r_2.

Sea

$$\phi(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\phi(x) \ &= \ x^r \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2}a_n x^n \\
6x\phi(x) \ &= \ x^r \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^{n+1} \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} 6a_{n-1}x^n \\
3x^2\phi'(x) \ &= \ x^r \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+1} \ = \ x^r \sum_{n=1}^{\infty} 3(n-1+r)a_{n-1}x^n \\
\frac{3}{2}x\phi'(x) \ &= \ x^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2}(n+r)a_n x^n \\
x^2\phi''(x) \ &= \ x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n-1+r)a_n x^n\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación se obtiene

$$a_0 q(r)x^r \ + \ x^r \sum_{n=1}^{\infty} [q(r+n)a_n \ + \ (6 \ + \ 3(n-1+r))a_{n-1}]x^n \ = \ 0\,.$$

Por lo tanto debemos tener $r = r_1$ o $r = r_2$ y

$$a_n \ = \ -\frac{(6 \ + \ 3(n-1+r))}{(r+n+1)(r+n-\frac{1}{2})}\, a_{n-1} \quad \forall n \geq 1\,.$$

Simplificando obtenemos

$$a_n \ = \ -\frac{3}{r+n-\frac{1}{2}}\, a_{n-1} \quad \forall n \geq 1\,.$$

Entonces poniendo $a_0 = 1$, tenemos

$$a_n \;=\; \frac{(-1)^n\,3^n}{(r+\frac{1}{2})(r+\frac{3}{2})\cdots(r+\frac{2n-1}{2})}\,, \qquad \text{para todo} \quad n \geq 1\,.$$

Para $r = r_1 = \frac{1}{2}$ nos queda

$$a_n \;=\; \frac{(-1)^n\,3^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \;=\; \frac{(-1)^n\,3^n}{n!}\,,$$

lo que genera la solución

$$\phi_1(x) \;= |\,x\,|^{\frac{1}{2}} \left(1 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,3^n}{n!} x^n\right)\,.$$

Para $r = r_2 = -1$ nos queda

$$\begin{aligned} a_n \;&=\; \frac{(-1)^n\,3^n}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-3}{2}} \\ &=\; \frac{-2^n\,(-1)^n\,3^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)} \\ &=\; \frac{(-1)^{n+1}\,3^n\,2^{2n-2}\,(n-2)!}{(2n-3)!}\,, \end{aligned}$$

lo que genera la solución

$$\phi_2(x) \;= |\,x\,|^{-1} \left(1 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,3^n\,2^{2n-2}\,(n-2)!}{(2n-3)!} x^n\right)\,.$$

Por lo tanto la solución general es con $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

Ejercicio 6.9.6 Con los cambios de coordenadas $t = 2x^4$ y $y = x^3 z$ transforme la ecuación

$$y'' \;-\; \frac{5}{x}\,y' \;+\; 8\left(8x^6 \;+\; \frac{1}{x^2}\right) y \;=\; 0$$

en una ecuación de Bessel. Use esto para encontrar su solución general.

Solución. Usando los cambios de coordenadas sugeridos obtenemos

$$\begin{aligned} y' \;&=\; \frac{dy}{dx} \;=\; 3x^2 z \;+\; x^3\frac{dz}{dx} \\ y'' \;&=\; \frac{d^2y}{dx^2} \;=\; 6xz \;+\; 6x^2\frac{dz}{dx} \;+\; x^3\frac{d^2z}{dx^2}\,, \end{aligned}$$

y la ecuación

$$x^3\frac{d^2z}{dx^2} \;+\; x^2\frac{dz}{dx} \;+\; (64x^9 \;-\; x)z \;=\; 0\,.$$

Como $\frac{dt}{dx} = 8x^3$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = 8x^3\frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= 24x^2\frac{dz}{dt} + 64x^6\frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}$$

y la ecuación

$$64x^9\frac{d^2z}{dt^2} + 32x^5\frac{dz}{dt} + (64x^9 - x)z = 0.$$

Dividiendo por $16x$ y haciendo el reemplazo $t = 2x^4$, obtenemos finalmente la ecuación de Bessel

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + (t^2 - \frac{1}{16})z = 0,$$

cuya solución general es

$$z(t) = c_1\, J_{\frac{1}{4}}(t) + c_2\, J_{-\frac{1}{4}}(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto la solución general de nuestra ecuación es

$$y(x) = x^3\left(c_1\, J_{\frac{1}{4}}(2x^4) + c_2\, J_{-\frac{1}{4}}(2x^4)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 6.9.7 Usando el método de Frobenius encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ de la ecuación

$$x^2y'' + \frac{3}{2}xy' - \frac{1}{2}(x^2+1)y = 0.$$

Solución. Como

$$P(x) = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad Q(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)$$

son analíticas, $x = 0$ es un punto singular regular.

El polinomio indicial es

$$q(r) = r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = (r + 1)(r - \frac{1}{2}).$$

Sus raíces son $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -1$. Además como $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$ no es un entero, podemos encontrar soluciones linealmente independientes asociadas a r_1 y r_2 por el método de Frobenius. Sea

$$\phi(x) = x^r\sum_{k=0}^{\infty} c_k(r)x^k.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\phi(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{2}c_k(r)x^k \\
-\frac{1}{2}x^2\phi(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{2}c_k(r)x^{k+2} = x^r\sum_{k=2}^{\infty}-\frac{1}{2}c_{k-2}(r)x^k \\
\frac{3}{2}x\phi'(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)\frac{3}{2}c_k(r)x^k \\
x^2\phi''(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k(r)x^k\ ,
\end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$x^r\left(c_0(r)q(r) + c_1(r)q(r+1)x + \sum_{k=2}^{\infty}\left[q(r+k)c_k(r) - \frac{1}{2}c_{k-2}(r)\right]x^k\right) = 0\,.$$

Así debemos tener $c_1(r) = 0$ (ya que $q(r+1)\neq 0$ para $r=r_1$ y $r=r_2$ y

$$c_k(r) = \frac{\frac{1}{2}\,c_{k-2}(r)}{(r+k+1)(r+k-\frac{1}{2})} \quad \text{para todo} \quad k\geq 2\,.$$

Luego para todo $k\geq 1$ tenemos

$$c_{2k-1}(r) = 0$$

y asumiendo $c_0(r) = 1$,

$$c_{2k}(r) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{(r+3)(r+5)\cdots(r+2k+1)(r+\frac{3}{2})(r+\frac{7}{2})\cdots(r+\frac{4k-1}{2})}\,.$$

Para $r=r_1=\frac{1}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
c_{2k}(r_1) &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\frac{7}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdots\frac{4k+3}{2}\cdot 2\cdot 4\cdots(2k)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k\ 2^k}{7\cdot 11\cdots(4k+3)\cdot 2^k\cdot k!} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{7\cdot 11\cdots(4k+3)\cdot k!}
\end{aligned}$$

y la solución

$$\phi_1(x) \;=\mid x \mid^{\frac{1}{2}} \left(1 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{7 \cdot 11 \cdots (4k+3) \cdot k!} \, x^{2k}\right) \; .$$

Para $r = r_2 = -1$ se obtiene

$$\begin{aligned} c_{2k}(r_2) \;&=\; \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{2 \cdot 4 \cdots (2k) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{4k-3}{2}} \\ &=\; \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k \; 2^k}{2^k \cdot k! \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4k-3)} \\ &=\; \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k! \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4k-3)} \; , \end{aligned}$$

y la solución

$$\phi_2(x) \;=\mid x \mid^{-1} \left(1 \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k! \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4k-3)} \, x^{2k}\right) \; .$$

De esta forma la solución general es

$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x) \;+\; b\phi_2(x)$$

con a, b números reales arbitrarios.

Ejercicio 6.9.8 Usando el método de Frobenious encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ de la ecuación

$$x^2 y'' - x(3+5x)y' + (4+5x)y \;=\; 0 \, .$$

Solución. El único punto singular de la ecuación es $x = 0$. Además, como las funciones $a(x) = -(3+5x)$ y $b(x) = 4+5x$ son analíticas en $x = 0$, $x = 0$ es punto singular regular.
El polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1) - 3r + 4 \;=\; (r-2)^2 \, ,$$

cuyas raíces son $r_1 = r_2 = 2$.
Sea

$$\phi(x) \;=\; \phi(x, r) \;=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r) x^k \, .$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
4\phi(x) &= \phi(x,r) \;=\; x^r\sum_{k=0}^{\infty} 4c_k(r)x^k\,,\\
5x\phi(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty} 5c_k(r)x^{k+1} \;=\; x^r\sum_{k=1}^{\infty} 5c_{k-1}(r)x^k\,,\\
-3x\phi'(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty} -3(k+r)c_k(r)x^k\,,\\
-5x^2\phi'(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty} -5(k+r)c_k(r)x^{k+1} \;= x^r\sum_{k=1}^{\infty} -5(k-1+r)c_{k-1}(r)x^k\,,\\
x^2\phi''(x) &= x^r\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)c_k(r)x^k\,.
\end{aligned}$$

Poniendo $c_0(r) \equiv 1$ y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$x^r q(r) + x^r\sum_{k=1}^{\infty}[q(r+k)c_k(r) + 5(1-(k-1+r))c_{k-1}(r)]x^k \;=\; 0\,.$$

Ponemos entonces

$$c_k(r) \;=\; \frac{5(k+r-2)c_{k-1}(r)}{(k+r-2)^2} \;=\; \frac{5c_{k-1}(r)}{r+k-2}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned}
c_k(r) &= \frac{5c_{k-1}(r)}{k+r-2} \;=\; \frac{5^2c_{k-2}}{(k+r-2)(k+r-3)}\\
&\;\;\vdots\\
&= \frac{5^k}{(r+k-2)(r+k-3)\cdots(r+1)r(r-1)}\\
&= \frac{5^k}{(r-1)r(r+1)\cdots(r+k-2)}\,.
\end{aligned}$$

Para $r = r_1 = 1$ obtenemos

$$c_k(r_1) = \frac{5^k}{1\cdot 2\cdots k} \;=\; \frac{5^k}{k!}$$

y

$$\phi_1(x) \;=\; x^2[1 \quad + \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}x^k]\,.$$

Para obtener una segunda solución linealmente independiente con la anterior, calculamos $c'_k(r)$ para r cercano a 2.
Tenemos

$$\begin{aligned} c'_k(r) &= -1 \cdot 5^k [\frac{1}{(r-1)^2 r(r+1)\cdots(r+k-2)} + \frac{1}{(r-1)r^2(r+1)\cdots(r+k-2)} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(r-1)r(r+1)^3\cdots(r+k-2)}] \\ &= \frac{-5^k}{(r-1)r(r+1)\cdots(r+k-2)}[\frac{1}{r-1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{r+k-2}] \cdot \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$c'_k(r_1) = \frac{-5^k}{k!}[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}] \cdot$$

Luego nuestra segunda solución es

$$\phi_2(x) \;=\; -x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}]x^k \;+\; \ln(\mid x \mid)\phi_1(x)\,.$$

Por lo tanto la solución general es

$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x) + b\phi_2(x)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Ella está definida para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, ya que $x = 0$ es el único punto singular.

Ejercicio 6.9.9 Usando el método de Frobenious encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2 y'' - xy' + (1-x)y \;=\; 0\,,$$

alrededor de $x = 0$. Determine para que valores de x está definida la solución.

Solución. El único punto singular de la ecuación es $x = 0$. Además, como las funciones $a(x) = -1$ y $b(x) = 1 - x$ son analíticas en $x = 0$, $x = 0$ es punto singular regular.
El polinomio indicial es

$$q(r) \;=\; r(r-1) - r + 1 \;=\; (r-1)^2\,,$$

cuyas raíces son $r_1 = r_2 = 1$.
Sea

$$\phi(x) \;=\; \phi(x, r) \;=\; x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r) x^k\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
-x\phi(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} -c_k(r)x^{k+1} \;=\; x^r \sum_{k=1}^{\infty} -c_{k-1}(r)x^k\,,\\
-x\phi'(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty} -(k+r)c_k(r)x^k\,,\\
x^2\phi''(x) &= x^r \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k(r)x^k\,.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$c_0(r)x^r q(r) + \sum_{k=1}^{\infty}[q(r+k)c_k(r) - c_{k-1}(r)]x^k \;=\; 0\,.$$

Ponemos entonces

$$c_k(r) \;=\; \frac{c_{k-1}(r)}{q(r+k)} \;=\; \frac{c_{k-1}(r)}{(r+k-1)^2}\,.$$

Luego si $c_0(r) = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
c_k(r) &= \frac{c_{k-1}(r)}{(k+r-1)^2} \;=\; \frac{c_{k-2}}{(k+r-1)^2(k+r-2)^2}\\
&\;\vdots\\
&= \frac{1}{(r+k-1)^2(r+k-2)^2\cdots(r+1)^2r^2}\\
&= \frac{1}{r^2(r+1)^2\cdots(r+k-1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Para $r = r_1 = 1$ obtenemos

$$c_k(r_1) = \frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdots k^2} \;=\; \frac{1}{(k!)^2}$$

y

$$\phi_1(x) \;=\; x[1 \quad + \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}x^k]\,.$$

Para obtener una segunda solución linealmente independiente con la anterior, calculamos $c_k'(r)$ para r cercano a 1.
Tenemos

$$\begin{aligned}
c_k'(r) &= -2[\frac{1}{r^3(r+1)^2\cdots(r+k-1)^2} + \frac{1}{r^2(r+1)^3\cdots(r+k-1)^2} +\\
&\quad \cdots + \frac{1}{r^2(r+1)^2\cdots(r+k-1)^3}]\\
&= -2c_k(r)[\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{r+k-1}]\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$c'_k(r_1) = \frac{-2}{(k!)^2}[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}]\cdot$$
Luego nuestra segunda solución es
$$\phi_2(x) \;=\; x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{(k!)^2}[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}]x^k \;+\; \ln(|\,x\,|)\phi_1(x)\,.$$
Por lo tanto la solución general es
$$\phi(x) \;=\; a\phi_1(x)+b\phi_2(x)\,,\quad a,b\in\mathbb{R}\,,$$
Ella está definida para todo $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, ya que $x=0$ es el único punto singular.

Ejercicio 6.9.10 a) Muestre que la ecuación de Legendre
$$(1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y \;=\; 0\,,$$
se convierte en una ecuación de Gauss con el cambio $x^2=t$.
b) Usando parte a) determine dos soluciones linealmente independientes para $m=\frac{1}{2}$.

Solución. a) Como $x^2=t$, tenemos
$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx}=2x\frac{dy}{dt}\\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dt}+4x^2\frac{d^2y}{dt^2}\cdot \end{aligned}$$
Reemplazando en la ecuación obtenemos
$$(1-t)\left(2\frac{dy}{dt}+4t\frac{d^2y}{dt^2}\right)-2\sqrt{t}\;2\sqrt{t}\;\frac{dy}{dt}+m(m+1)y=0\,,$$
o bien
$$4t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+[2(1-t)-4t]\frac{dy}{dt}+m(m+1)y=0\,,$$
y dividiendo por 4
$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t\right]\frac{dy}{dt}+\frac{m(m+1)}{4}y=0\,.$$
Esta es una ecuación de Gauss con $c=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1+\sqrt{1+4m(m+1)}}{4}$ y $b=\frac{1-\sqrt{1+4m(m+1)}}{4}$.
b) Para $m=\frac{1}{2}$ tenemos $c=\frac{1}{2}$, $a=\frac{3}{4}$ y $b=-\frac{1}{4}$.
Como $a-c+1=\frac{5}{4}$, $b-c+1=\frac{1}{4}$, $2-c=\frac{3}{2}$ y $1-c=\frac{1}{2}$, la solución general de nuestra ecuación de Gauss es
$$y(t) \;=\; c_1F\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{2},t\right) \;+\; c_2t^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{2},t\right)\,.$$
Por lo tanto la solución general de la ecuación original es
$$y(x) \;=\; c_1F\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{2},x^2\right) \;+\; c_2xF\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{2},x^2\right)\,.$$

Capítulo 7

Transformada de Laplace

7.1 Definición y Propiedades

Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ y suponga que

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{R \longrightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} f(t)dt$$

converge para algunos valores de s. Para estos valores definimos una nueva función $\widehat{f}$, llamada **transformada de Laplace** de f, poniendo

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Notación. $\mathcal{L}(f(t))(s) = \widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
si esta integral converge.

Teorema 7.1.1

a) *$\mathcal{L}$ es lineal, es decir dadas $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $\widehat{f}(s)$ y $\widehat{g}(s)$ existen, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\mathcal{L}(af(t) + bg(t))(s) = a\mathcal{L}(f(t))(s) + b\mathcal{L}(g(t))(s)$$

b) *Si $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y $\widehat{f}(s) = \widehat{g}(s)$, entonces $f = g$.*

c) *Si f' es continua en $[0, +\infty[$ y $\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st} f(t) = 0$, entonces*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) \quad \textit{existe} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}(f(t))(s) \quad \textit{existe}.$$

Además se tiene $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$.

d) *Para* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, definamos* $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)du$. *Si para* $s > 0$ $\mathcal{L}(f(t))(s)$ *existe y* $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st} F(t) = 0$, *entonces se tiene que* $\mathcal{L}(F(t))(s)$ *existe y que*

$$\mathcal{L}(F(t)) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s)$$

(es decir $\quad \mathcal{L}\left(\displaystyle\int_0^t f(u)du\right)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s).$*)*

Demostración.

a) Se deja al lector.

b) Pendiente (vea sección 7.8).

c) Sea s tal que $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st} f(t) = 0$, y $R > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-st} f'(t)dt &= e^{-st} f(t)\Big/_0^R + s\int_0^R e^{-st} f(t)dt \\ &= e^{-sR} f(R) - f(0) + s\int_0^R e^{-st} f(t)dt \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_0^R e^{-st} f'(t)dt \quad \text{existe} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_0^R e^{-st} f(t)dt \quad \text{existe},$$

y en caso positivo

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)\,.$$

d) Tenemos que $F'(t) = f(t)$ es continua y $F(0) = 0$. Como $\mathcal{L}(F'(t))(s)$ existe y $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st} F(t) = 0$, entonces $\mathcal{L}(F(t))(s)$ existe y

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(F'(t))(s) = s\mathcal{L}(F(t))(s) - F(0) = s\mathcal{L}(F(t))(s)\,.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(F(t))(s)\,.$$

Ejemplo 7.1.2 $\quad \mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s} \qquad \forall s > 0.$

En efecto si $s > 0$

$$\int_0^R e^{-st}dt = \quad -\frac{1}{s}(e^{-sR} - 1)\,,$$

lo que implica

$$\mathcal{L}(1)(s) = \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_0^R e^{-st}dt = \frac{1}{s} \qquad \forall s > 0\,.$$

Observe que $\mathcal{L}(1)(s)$ no existe para $s \leq 0$. Así $\mathcal{L}(1)(s)$ sólo está definida para $s > 0$.

Ejemplo 7.1.3 $\quad \mathcal{L}(t)(s) = \dfrac{1}{s^2} \quad \forall s > 0.$

Pongamos $f(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$. Entonces $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)du = t$ y para $s > 0$

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st}F(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st}t = 0\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F(t))(s) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s) \qquad \forall s > 0 \\ \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(t)(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \qquad \forall s > 0\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.4 $\quad \mathcal{L}(t^2)(s) = \dfrac{2}{s^3}, \quad \forall s > 0.$

Sea ahora $f(t) = 2t$ y pongamos $F(t) = \int_0^t f(u)du = t^2$. Entonces para $s > 0$ tenemos

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-st}t^2 = 0\,.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^2)(s) &= \mathcal{L}(F(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(2t)(s) \\ &= \frac{2}{s}\mathcal{L}(t)(s) = \frac{2}{s^3} \qquad \forall s > 0\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.1.5 $\quad \mathcal{L}(t^n)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad \forall s > 0 \ \textit{si} \ n = 1, 2, \cdots.$

Ejemplo 7.1.6 $\quad \mathcal{L}(e^t)(s) = \dfrac{1}{s-1} \quad \forall s > 1.$

Para $R > 0$

$$\int_0^R e^{-st}e^t dt = \int_0^R e^{(1-s)t}dt = \frac{1}{1-s}e^{(1-s)t}\Big/_0^R = \frac{1}{1-s}\left[e^{(1-s)R} - 1\right].$$

$$\therefore \quad \lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_0^R e^{-st}e^t dt \;=\; \frac{1}{s-1} + \frac{1}{1-s}\lim_{R\longrightarrow+\infty} e^{(1-s)R} \;=\; \frac{1}{s-1} \;+\; 0 \quad \forall s > 1\,.$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}(e^t)(s) \;=\; \frac{1}{s-1} \qquad \forall s > 1\,.$$

Ejemplo 7.1.7 Considere el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' - y & = 1 - t \\ y(0) & = 2 \end{cases}$$

Sea $y(t)$ la solución y asumamos que $\mathcal{L}(y(t))(s)$ existe y $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} e^{-st}\,y(t) = 0$ para todo $s > s_0$, cierto s_0.
Entonces como $y'(t)$ es continua, $\mathcal{L}(y'(t))(s)$ existe $\forall s > s_0$. Luego para todo estos s se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'(t) &- y(t))(s) = \mathcal{L}(1-t)(s) \\ \mathcal{L}(y'(t))(s) &- \mathcal{L}(y(t))(s) = \mathcal{L}(1)(s) - \mathcal{L}(t)(s) \\ s\mathcal{L}(y(t))(s) &- y(0) - \mathcal{L}(y(t))(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s-1)\mathcal{L}(y(t))(s) - 2 &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{1}{s-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + 2\right] = \frac{s-1+2s^2}{s^2(s-1)} \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s-1} = \mathcal{L}(t)(s) + \mathcal{L}(2e^t)(s) \\ \therefore \quad \mathcal{L}(y(t))(s) &= \mathcal{L}(t + 2e^t)(s) \qquad \forall s > s_0\,, \quad \text{y} \\ y(t) &= t + 2e^t\,. \end{aligned}$$

Definición 7.1.8 *Sea* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Decimos que* f *es de* **orden exponencial** b *(orden exp. b) si existe* $M > 0$ *tal que* $e^{-bt}|f(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$.

Teorema 7.1.9 *Sea* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continua y de orden exp. b. Entonces* *a)* $\mathcal{L}(f(t))(s)$ *existe* $\forall s > b$.

b) *Si además* $f' : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua, entonces* $\mathcal{L}(f'(t))(s)$ *existe* $\forall s > b$ *y*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0).$$

c) *Si* $b \neq 0$ *y* $F(t) = \int_0^t f(u)du$, *entonces* F *es de orden exp.* b *y*

$$\mathcal{L}(F(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s) \quad \forall s > b.$$

Demostración. Ejercicio.

Observaciones 7.1.10 Si $f, f', f'', \cdot$, etc. son continuas y de orden exp. b , se tiene para $s > b$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t))(s) &= s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0) \\
\mathcal{L}(f''(t))(s) &= s^2\mathcal{L}(f(t))(s) - sf(0) - f'(0) \\
\mathcal{L}(f'''(t))(s) &= s^3\mathcal{L}(f(t))(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) \\
&\vdots \\
etc.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.1.11 $f(t)$ de orden exp. $b \Longrightarrow$ $e^{-at}f(t)$ es de orden exp. $b - a$ y para $s > b - a$ tenemos

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(s) = \quad \mathcal{L}(f(t))(s + a).$$

Sabemos $e^{-bt}|f(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0.$

$$\therefore \quad e^{-(b-a)t}|e^{-at}f(t)| = e^{-bt}|f(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$$

$\therefore$ $e^{-at}f(t)$ es de orden exp. $b - a$.
Además para $s > b - a$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(s) &= \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_0^R e^{-st}e^{-at}f(t)dt \\
&= \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_0^R e^{-(s+a)t}f(t)dt \\
&= \mathcal{L}(f(t))(s + a)
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.1.12 $\mathcal{L}(sen(bt))(s) = \dfrac{b}{s^2+b^2}$ *para* $s > 0$.

En efecto, para $R > 0$, tenemos

$$\int_0^R e^{-st}\text{sen}(bt)dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\text{sen}(bt)\Big/_0^R + \frac{b}{s}\int_0^R e^{-st}\cos(bt)dt$$

$$= \quad -\frac{1}{s}\text{sen}(bR) + \frac{b}{s^2}\left[-\frac{1}{s}e^{-sR}\cos(bR) - 1\right] - \frac{b^2}{s^2}\int_0^R e^{-st}\text{sen}(bt)dt$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{b^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{-st}\text{sen}(bt)dt = -\frac{1}{s}e^{-sR}\text{sen}(bR) - \frac{b}{s^2}e^{-sR}\cos(bR) + \frac{b}{s^2}$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}(\text{sen}(bt))(s) = \frac{s^2}{s^2+b^2}\cdot\frac{b}{s^2} \qquad \forall s > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\text{sen}(bt))(s) = \frac{b}{s^2+b^2} \qquad \forall s > 0$$

Ejercicio 7.1.13 $\mathcal{L}(\cos(bt))(s) = \dfrac{s}{s^2+b^2}$ $\quad \forall s > 0$.

Para $s > 0$ tenemos

$$\mathcal{L}(b\cos(bt))(s) = \mathcal{L}((\text{sen}(bt))')(s) = s\mathcal{L}(\text{sen}(bt))(s) - \text{sen}(0) = s\frac{b}{s^2+b^2}\,\cdot$$

Luego

$$\mathcal{L}(\cos(bt))(s) = \frac{s}{s^2+b^2}\,\cdot$$

Ejercicio 7.1.14 $\mathcal{L}(e^{-at}\,sen(bt))(s) = \dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$ $\quad \forall s > -a.$

Aplicación directa del ejercicio 7.1.11.

Ejercicio 7.1.15 $\mathcal{L}(te^t)(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2}$ $\quad \forall s > 1.$

Usando ejercicio 7.1.11, tenemos

$$\mathcal{L}(te^t)(s) = \mathcal{L}(t)(s-1) \quad \forall s > 1\,,$$

lo que implica

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(te^t)(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \quad \forall s > 1\,.$$

Teorema 7.1.16 *Si f es de orden exp. b, entonces $\widehat{f}(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ tiene derivada de todas las ordenes para $s > b$ y*

$$(\widehat{f})'(s) = \mathcal{L}(-tf(t))(s); \quad (\widehat{f})''(s) = \mathcal{L}(t^2f(t))(s); \quad (\widehat{f})'''(s) = \mathcal{L}(-t^3f(t))(s), \quad \textit{etc.}$$

Demostración. $\dfrac{\partial}{\partial s}(e^{-ts}f(t)) = -te^{-ts}f(t) = e^{-ts}(-tf(t)).$

Además la integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt$ converge uniformemente para $s \geq b_0$ donde $b_0 > b$ es cualquiera (es decir $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0$ tal que $R > N \implies$ $|\displaystyle\int_0^R e^{-st}tf(t)dt - \int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt| < \varepsilon \quad \forall s \geq b_0$).

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{f}(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty e^{-ts}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}(e^{-ts}f(t))dt \\ &= \int_0^\infty e^{-ts}(-t\,f(t)dt = \mathcal{L}(-tf(t))(s)\,.\end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.17 Tenemos $\mathcal{L}(1)(s) = \dfrac{1}{s}$ para $s > 0$. Por lo tanto

$$\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{para} \quad s > a \quad \text{(ver ejercicio 7.1.11)}.$$

Pero $\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{1}{s-a}\right) = \dfrac{-1}{(s-a)^2} = \mathcal{L}(-te^{at})(s)$ para $s > a$.

$$\therefore \mathcal{L}(te^{at})(s) = \frac{1}{(s-a)^2} \qquad \forall s > a\,.$$

Ejercicios:

1. $\mathcal{L}(t^{n-1}e^{at}) = \dfrac{(n-1)!}{(s-a)^n}$ para $s > a$ y en particular $\mathcal{L}(t^n)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ para $s > 0$.

2. Si f_1, f_2 son de orden exp b_1, b_2 respectivamente, entonces $f_1 + f_2$ es de orden exp $b = \max\{b_1, b_2\}$.

3. Si f_1, f_2 son de orden exp b_1, b_2 respectivamente, entonces $f_1 \cdot f_2$ es de orden exp $b = b_1 \cdot b_2$.

Lemma 7.1.18 *Sean $q(t), q'(t)$ continuas y de orden exp. b y sea $\phi(t))$ solución de $y' - ry = q(t)$. Entonces $\phi(t)$, $\phi'(t)$, $\phi''(t)$ son continuas y de orden exp. $b' = \max\{b, |r|\}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumimos que $b > |r|$.

a) Si $r \in \mathbb{R}$ la solución es $\phi(t) = e^{rt}(c + \int_0^t e^{-ru} q(u)du)$. Luego basta demostrar que $U(t) = \int_0^t e^{-ru} q(u)du$, y sus derivadas $U'(t)$, $U''(t)$ son continuas y de orden exp. $b - r$.
Pero $q(t)$ de orden exp. b implica $e^{-bt}|q(t)| < M \quad \forall\, t \geq 0$.
Entonces $e^{-(b-r)u}|e^{-ru}q(u)| = e^{-bu}|q(u)| < M \qquad \forall u > 0$ y luego

$$\begin{aligned} e^{-(b-r)t}\left|\int_0^t e^{-ru} q(u)du\right| &\leq e^{-(b-r)t}\left|\int_0^t M e^{(b-r)u} du\right| \\ &= M e^{-(b-r)t} \frac{1}{b-r}(e^{(b-r)t} - 1) \leq \frac{M}{b-r} . \end{aligned}$$

$\therefore \quad U(t)$ es de orden exponencial $\quad b - r$.

Además es claro que $\quad U'(t) = e^{-rt}q(t) \quad$ y $\quad U''(t) = -re^{-rt}q(t) + e^{-rt}q''(t)$ son de orden exp. $b - r$.

b) Si $r \in \mathbb{C}$, digamos $r = \alpha + \imath\beta$, la demostración es un poco más complicada y se omotirá en estas notas.

Teorema 7.1.19 *Si $q(t), q'(t)$ son continuas y de orden exp. b y $\phi(t)$ es solución de*

$$y'' + p_1 y' + p_0 y = q(t)\,, \tag{7.1}$$

donde p_1, p_2 son constantes, entonces: $\phi(t), \phi'(t), \phi''(t)$ son continuas y de algún orden exp.

Demostración. Sean r_1, r_2 raíces de $r^2 + p_1 r + p_0 = 0$. Entonces

$$-(r_1 + r_2) = p_1 \quad \text{y} \quad r_1 \cdot r_2 = p_0\,.$$

Sea $\phi(t)$ solución de (7.1). Definamos $\quad \phi_1(t) = \phi'(t) - r_2\phi(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi_1'(t) - r_1\phi_1(t) &= \phi''(t) - r_2\phi'(t) - r_1(\phi'(t) - r_2\phi(t)) \\ &= \phi''(t) - (r_1 + r_2)\phi'(t) + r_1 r_2 \phi(t) = q(t)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi_1(t)$ es solución de $y' - r_1 y = q(t)$, lo que implica $\phi_1(t), \phi_1'(t), \phi_1''(t)$ son continuas y de algún orden exp.

Pero como $\phi(t)$ es solución de $\; y' - r_2 y = \phi_1(t)\;$, obtenemos también que $\phi(t)$, $\phi'(t)$ y $\phi''(t)$ son continuas y de algún orden exp.

Corolario 7.1.20 *Si $q(t), q'(t)$ son continuas y de orden exp. b y $\phi(t)$ es solución de (7.1), entonces $\mathcal{L}(\phi(t))(s), \mathcal{L}(\phi'(t))(s)$ y $\mathcal{L}(\phi''(t))(s)$ existen para todo s suficientemente grande.*

Teorema 7.1.21 *El operador $\mathcal{L}$ es $1-1$; es decir, si f y g son continuas en $[0,+\infty[$ y $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g(t)(s) \quad \forall s \geq s_0$, entonces $f(t) = g(t) \quad \forall t \geq 0$.*

Demostración. La demostración está en la sección 7.8.

Usando este teorema podemos definir el operador inverso $\mathcal{L}^{-1}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))(t) = f(t) \Longleftrightarrow \mathcal{L}(f(t))(s) = \phi(s)\,.$$

Observaciones 7.1.22 $\mathcal{L}^{-1}$ es un operador lineal; es decir,

$$\mathcal{L}^{-1}(a\phi(s) + b\psi(s))(t) = a\mathcal{L}^{-1}(\phi(s))(t) + b\mathcal{L}^{-1}(\psi(s))(t)\,.$$

Ejemplo 7.1.23 Considere la ecuación

$$y'' + 4y = t + sen(2t)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Aquí $q(t) = t + \operatorname{sen}(2t)$ y $q'(t) = 1 + 2\cos(2t)$ son continuas y de orden exp. b cualquier $b > 0$. Luego, la solución $y(t)$ y sus derivadas $y'(t)$ y $y''(t)$ son de orden exp. α para algún α suficientemente grande.

Luego para $s \geq \alpha$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y''(t) + 4y(t))(s) &= \mathcal{L}(t + \operatorname{sen}(2t))(s)\,, \\
s^2\mathcal{L}(y(t))(s) + 4\mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^2+4}\,, \\
(s^2+4)\mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^2+4}\,, \\
\mathcal{L}(y(t))(s) &= \frac{1}{s^2(s^2+4)} + \frac{2}{(s^2+4)^2}\,.
\end{aligned}$$

De esta forma

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right)(t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)(t)\,.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right)(t) &= \frac{1}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right)(t) \\
&= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t) - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)(t) \\
&= \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t)
\end{aligned}$$

Afirmación $\mathcal{L}(\operatorname{sen}(at) - at\,\cos(at)) = \dfrac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$.

En efecto :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\operatorname{sen}(at))(s) &= \frac{a}{s^2+a^2}\\
\mathcal{L}(\cos(at))(s) &= \frac{s}{s^2+a^2}\\
\mathcal{L}(-at\cos(at))(s) &= a\mathcal{L}(-t\cos(at))(s) = a\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)' = a\cdot\frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)}\,.
\end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}(at) - at\cos(at))(s) = a\left[\frac{1}{s^2+a^2} + \frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{2a^3}{(s^2+a^2)}\cdot$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)(t) = \frac{1}{16}\left(\operatorname{sen}(2t) - 2t\,\cos(2t)\right).$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{8}\left(\operatorname{sen}(2t) - 2t\,\cos(2t)\right)\\
&= \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t\,\cos(2t)\cdot
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.24 Resolvamos la ecuación

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t}\cos(t)\,, \quad y(0) = 2\,,\ y'(0) = -2\,.$$

Pongamos $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y''(t))(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \ = \ s^2Y(s) - 2s + 2\,,\\
2\mathcal{L}(y'(t))(s) &= 2(sY(s) - y(0)) \ = \ 2sY(s) - 4\,,\\
2\mathcal{L}(y(t))(s) &= 2Y(s)\,,\\
2\mathcal{L}(e^{-t}\cos(t))(s) &= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}\cdot
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación y reemplazando se obtiene

$$(s^2+2s+2)Y(s) - 2s - 2 \ = \ \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1}\cdot$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{2(s+1)}{((s+1)^2+1)^2}\,,\\
&= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{d}{ds}\frac{-1}{(s+1)^2+1}\cdot
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right)(t) - t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{(s+1)^2+1}\right)(t)\,, \\ &= 2e^{-t}\cos(t) + te^{-t}\mathrm{sen}(t)\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.1.25 Sea $\Phi(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ con P, Q polinomios. Si $Q(s)$ tiene solo raíces simples (reales), digamos $Q(s) = (s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n)$ con $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$, entonces

$$\Phi(s) = \frac{\frac{P(r_1)}{Q'(r_1)}}{s-r_1} + \cdots + \frac{\frac{P(r_n)}{Q'(r_n)}}{s-r_n}\,.$$

Ejemplo 7.1.26 Descomponga en fracciones parciales $\frac{s^2-2s+2}{s^3-s^2-4s+4}$.

Tenemos

$$P(s) = s^2-2s+2\,, \quad Q(s) = s^3-s^2-4s+4 = (s-1)(s+2)(s-2)$$
$$\text{y} \quad Q'(s) = (s+2)(s-2)+(s-1)(s-2)+(s-1)(s+2).$$

Luego ocupando el ejercicio anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{s^2-2s+2}{s^3-s^2+4s+4} &= \frac{\frac{-1}{3}}{s-1} + \frac{\frac{10}{12}}{s+2} + \frac{\frac{2}{4}}{s-2}\,, \\ &= \frac{-1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{5}{6}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.27 Resolvamos la ecuación

$$y'' - 2y' - 3y = e^t\,, \quad y(0) = y'(0) = 1\,.$$

Poniendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ y aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) = \frac{1}{s-1}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} (s^2-2s-3)Y(s) &= \frac{1}{s-1} + s - 1\,, \quad \text{lo que implica} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s+1)(s-3)} + \frac{s-1}{(s+1)(s-3)} \\ &= \frac{1+(s-1)^2}{(s-1)(s+1)(s-3)} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{5}{8}\frac{1}{s+1} + \frac{5}{8}\frac{1}{s-3}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^t + \frac{5}{8}e^{-t} + \frac{5}{8}e^{3t}\,.$$

7.2 Funciones Discontinuas

Definición 7.2.1 $f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice continua por partes si* f *tiene solo un número finito de puntos de discontinuidad en* $[0, +\infty[$ *y estas discontinuidades son de tipo salto.*

Ejemplo 7.2.2 Considere la función escalón (o salto)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \\ 1 & si \quad t > 0 \end{cases} \qquad (tiene\ salto\ en\ \ t = 0)$$

Luego si para $a > 0$ definimos $f(t) = u(t - a)$, tenemos

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ \\ 1 & \text{si} \quad t > a \end{cases} \qquad (\text{tiene salto en } \ t = a) \quad ,$$

y su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}(u(t-a)) \; = \; \int_0^a e^{-ts} \cdot 0dt \; + \; \int_a^\infty e^{-ts} \cdot 1dt \; = \; \frac{1}{s}\, e^{-as} \, .$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{para} \quad s > 0 \, .$$

Ejemplo 7.2.3 Considere la función

$$f(t) = \begin{cases} 3 & t < 2 \\ -1 & 2 < t < 5 \\ 7 & 5 \leq t \end{cases}$$

En término de la función salto

$$f(t) \; = \; 3 - 4u(t-2) + 8u(t-5) \, ,$$

y su transformada de Laplace es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(s)) \; &= \; 3\mathcal{L}(1) - 4\mathcal{L}(u(t-2)) + 8\mathcal{L}(u(t-5)) = \\ &= \; \frac{3}{s} - \frac{4}{s}e^{-2s} + \frac{8}{s}e^{-5s} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.4 Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces para $a > 0$ se tiene

$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a))(s) \; = \; e^{-as}\mathcal{L}(f(t)(s) \, .$$

En efecto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) &= \int_a^\infty e^{-ts} f\,\underbrace{(t-a)}_{u}\,dt \;=\; \int_0^\infty e^{-(u+a)s} f(u)du \\ &= e^{-as}\int_0^\infty e^{-us} f(u)du \;=\; e^{-as}\mathcal{L}(f(t))(s)\,.\end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.5 Calculemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-25}}{s^2}\right)(t)\,.$$

Sea

$$f(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t) \;=\; t\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2}\right)(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\,\mathcal{L}(f(t))(s)\right)(t) = f(t-2)u(t-2) \\ &= (t-2)u(t-2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<2 \\ \\ t-2 & \text{si} \quad t>2 \end{cases}\end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.6 Calculemos la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 2 & 1 \le t \le 2 \\ t^2 & 2 < t < \infty \end{cases}\,.$$

En términos de la función salto se escribe

$$f(t) \;=\; t + (2-t)u(t-1) + (t^2-2)u(t-2)\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t))(s) &= \mathcal{L}(t)(s) + \mathcal{L}((2-t)u(t-1))(s) + \mathcal{L}((t^2-2)u(t-2))(s) \\ &= \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}((1-(t-1))u(t-1))(s) + \\ &\quad\; \mathcal{L}(2+4(t-2)+(t-2)^2)u(t-2))(s) \\ &= \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-s} + \left(\frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right)e^{-2s}\end{aligned}$$

Ejemplo 7.2.7 La corriente I en un circuito RLC en serie está regida por la ecuación
$$I''(t) + 4I(t) \;=\; g(t)\,, \quad I(0) = I'(0) = 0\,.$$
con
$$g(t) \;=\; \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}\;.$$
Determine la corriente en función del tiempo.

Tenemos $g(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$. Si ponemos $\widehat{I}(s) = \mathcal{L}(I)(s)$ obtenemos
$$\mathcal{L}(I'')(s) = s^2\widehat{I}(s) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(g(t))(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}\cdot$$
Entonces aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación tenemos
$$\begin{aligned} s^2\widehat{I}(s) + 4\widehat{I}(s) &= \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{2^{-2s}}{s}\,, \quad \text{es } decir \\ \widehat{I}(s) &= \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{2e^{-s}}{s(s^2+4)} + \frac{2e^{-2s}}{s(s^2+4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pongamos} \quad \widehat{f}(s) &= \frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) \\ \Longrightarrow \quad f(t) &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2-4}\right)(t) = \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2t)\right) \\ \therefore \quad I(t) &= f(t) - 2f(t-1)u(t-1) + f(t-2)u(t-2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2t)\right) \;-\; \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2(t-1))\right]u(t-1) + \frac{1}{4}\left[1 - \cos(2(t-2))\right]u(t-2)$$

Ejemplo 7.2.8 Determine $\mathcal{L}(f(t))(s)$ si $f(t) = \begin{cases} \dfrac{sen(t)}{t} & t > 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$

Tenemos
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(t) &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^s}{s!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \\ \Longrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} &= 1 - \frac{t^s}{3!} + \frac{t^4}{s!}\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad t \neq 0\,. \end{aligned}$$

Además como $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$, tenemos que

$$f(t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

y $f(t)$ es continua y de orden exp. $b \quad (\forall b > 0)$.

Así $\mathcal{L}(f(t))(s)$ existe para todo s suficientemente grande y como para todo número natural y $s > 0$, $\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(s) \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \mathcal{L}(t^{2k})(s) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \, \frac{(2k)!}{s^{2k+1}} \\ &=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \, \frac{1}{s^{2k+1}} \;=\; \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3} + \frac{1}{5s^5} - \frac{1}{7s^7} + \cdots \end{aligned}$$

Recuerdo: Para $|x| < 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} \;&=\; 1 - x^2 + x^4 - x^6 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, x^{2k} \quad \text{y} \\ \arctan(x) \;&=\; \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \, du = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \, . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}(f(t))(s) \;=\; \arctan\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (s > 1)\, .$$

7.3 Funciones Periódicas

Definición 7.3.1 *Se dice que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es periódica de periodo T, si T es el menor número positivo que verifica*

$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos 7.3.2

$sen(t)$, $\cos(t)$	son periódicas de periodo 2π
$\tan(t)$	es periódica de periodo π .

Observación 7.3.3 Para especificar una función periódica, basta dar sus valores sobre un periodo.

Así la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases} \qquad \text{y} \quad f(t) \text{ tiene periodo } 2$$

tiene gráfico

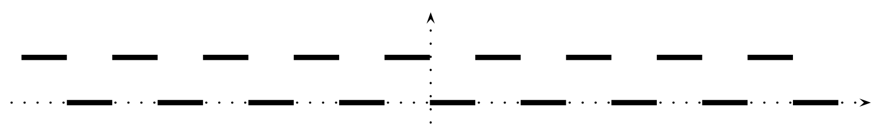


Figura 34

Teorema 7.3.4 *Si $f(t)$ es una función periódica de periodo T que es continua por partes en el intervalo $[0, T]$, entonces para todo $s > 0$*

$$\mathcal{L}(f(t))(s) \;=\; \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt\,.$$

Demostración. Para $s > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-ts} f(t)dt \\
&= \int_0^T e^{-ts} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-ts} f(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-ts} f(t)dt + \cdots \\
&= \int_0^T e^{-ts} f(t)dt + \int_0^T e^{-(t+T)s} f(t+T)dt + \int_0^T e^{-(t+2T)} f(t+2T)dt + \cdots \\
&= \int_0^T e^{-ts} f(t)dt + e^{-Ts} \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-2Ts} \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \cdots \\
&= \left(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots\right) \int_0^T e^{-st} f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt\,.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.3.5 Calculemos la transformada de Laplace de la función periódica $f(t)$ del ejemplo que aparece en la observación 7.3.3.

Para $s > 0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t))(s) &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st} dt \;=\; \frac{1}{1-e^{-2s}} \cdot \frac{-1}{s}(e^{-s}-1) \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} \;=\; \frac{1}{s(1+e^{-s})} \,.
\end{aligned}
$$

7.4 Convolución

Consideremos el problema

$$y'' + y = g(t) \,;\, y(0) = 0 \,,\, y'(0) = 0 \,.$$

Poniendo

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s) \quad \text{y} \quad G(s) = \mathcal{L}(g(t))(s) \,,$$

aplicando transformada de Laplace a la ecuación obtenemos

$$s^2 Y(s) + Y(s) = G(s) \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\, G(s) \,.$$

Por lo tanto

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1} \cdot G(s) \right)(t) \,.$$

Definición 7.4.1 *Sean $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continuas por parte. La* **convolución** *de las funciones $f(t)$ y $g(t)$, es una nueva función, que se denota por $f * g$, y que se define por*

$$(f * g)(t) \;=\; \int_0^t f(t-v) g(v) dv \,.$$

Ejemplo 7.4.2

$$t * t^2 \;=\; \int_0^t (t-v) v^2 du \;=\; t\,\frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} \Big/_0^t \;=\; \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} \;=\; \frac{t^4}{12} \,.$$

Propiedades: Sean $f, g, h : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continuas por parte. Entonces:

1) $f * g = g * f$.

2) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

3) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

4) $f * 0 = 0$.

Demostración. Haremos la demostración de 1). Los item 2), 3) y 4) quedan de ejercicio.

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t f(t-w)g(w)dw = \int_t^0 f(w)g(t-w)(-dw) = \\ &= \int_t^0 g(t-w)f(w)dw = (g * f)(t)\,.\end{aligned}$$

Teorema 7.4.3 *Sean* $f, g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continuas por parte y de orden exp.* α. *Entonces*

$$\mathcal{L}((f * g)(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s)\,.$$

o equivalentemente si $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ *y* $G(s) = \mathcal{L}(g(t)(s)$, *entonces*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s))(t) = (f * g)(t)\,.$$

Demostración. Para $s > \alpha$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((f * g)(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-ts}(f * g)(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-v)g(v)dv\right)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty u(t-v)f(t-v)g(v)dv\right)dt \\ &= \int_0^\infty g(v)\left(\int_0^\infty e^{-st}u(t-v)f(t-v)dt\right)dv \\ &= \int_0^\infty g(v)\mathcal{L}(f(t-v)u(t-v))(s)dv \\ &= \int_0^\infty g(v)e^{-sv}F(s)dv = F(s)\int_0^\infty e^{-sv}g(v)dv \\ &= F(s)G(s)\,.\end{aligned}$$

Entonces volviendo al problema inicial

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}G(s) = \mathcal{L}(\mathrm{sen}(t))(s) \cdot \mathcal{L}(g(t))(s)\,,$$

lo que implica

$$y(t) = (\mathrm{sen} * g)(t) = \int_0^t \mathrm{sen}\,(t-v)g(v)dv\,.$$

Ejemplo 7.4.4 $(1 * f)(t) = \int_0^t f(u)du.$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(1 * f(t))(s) = \mathcal{L}(1)(s) \cdot \mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))\,.$$

Ejemplo 7.4.5 $t * t = \int_0^t (t-v)v dv = t\frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3}\Big/_0^t = \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{6}\cdot$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(t * t)(s) = \mathcal{L}(t)(s) \cdot \mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^4}\cdot$$

Ejemplo 7.4.6 Calculemos $t * \operatorname{sen}(t)$. Tenemos

$$\begin{aligned} t * sen(t) &= \int_0^t (t-v)\, sen(v) dv = t\int_0^t sen(v) dv - \int_0^t v\, sen(v) dv \\ &= -t\, \cos(v)\Big/_0^t - [-v\, \cos(v)\Big/_0^t - \int_0^t \cos(v) dv] = \\ &= -t\, \cos(t) + t + t\, \cos(t) - sen(t) = t - sen(t)\,. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\mathcal{L}(t * sen(t))(s) = \mathcal{L}(t)(s) \cdot \mathcal{L}(sen(t))(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\,.$$

Ejemplo 7.4.7 $t * e^t \; = \; \int_0^t (t-v)\, e^v\, dv \; = \; e^t - t - 1$ y

$$\mathcal{L}(t * e^t)(s) = \mathcal{L}(t)(s) \cdot \mathcal{L}(e^t)(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\,.$$

Ejemplo 7.4.8 $sen(t) * \cos(t) \; = \; \int_0^t sen\,(t-v)\; \cos(v)\, dv \; = \; \int_0^t (sen(t)\; \cos(v) - \cos(t)\, sen(v))\; \cos(v)\, dv \; = \; \cdots \; = \; \frac{1}{2}\, t\, sen(t)\,.$
Por otra parte

$$\mathcal{L}\,(sen\,(t) * \cos(t))(s) \; = \; \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1} \; = \; \frac{s}{(s+1)^2}\,.$$

Ejemplo 7.4.9 Resolvamos la ecuación

$$y'' + y \; = \; \cos\,(t)\,, \quad y(0) \; = \; y'(0) \; = \; 0\,.$$

Poniendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ y aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$s^2 Y(s) \; + \; Y(s) \; = \; \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1} \\
&= \mathcal{L}(\operatorname{sen}(t))(s)\cdot\mathcal{L}(\cos(t))(s) = \mathcal{L}(\operatorname{sen}(t) * \cos(t))(s)\,,
\end{aligned}
$$

y así

$$
y(t) = \operatorname{sen}(t) * \cos(t) = \frac{1}{2}\,t\operatorname{sen}(t)\,.
$$

Ejemplo 7.4.10 Resolvamos

$$
y'' - 5y' + 6y = e^{-2t}\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = -2\,.
$$

Poniendo $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ y aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{1}{s+2}\,.
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
(s^2 - 5s + 6)Y(s) + 2 &= \frac{1}{s+2} \\
\Longrightarrow \quad Y(s) &= \left(\frac{1}{s+2} - 2\right)\frac{1}{s^2 - 5s + 6} \\
&= \frac{1}{(s+2)(s-2)(s-3)} - \frac{2}{(s-2)(s-3)}\,.
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\cdot\frac{1}{s-3}\right)(t) &= e^{2t} * e^{3t} = \int_0^t e^{2(t-v)}\,e^{3v}\,dv \\
&= \int_0^t e^{2t+v}\,dv = e^{2t}\int_0^t e^{v}dv = e^{2t}(e^t - 1) \\
&= e^{3t} - e^{2t}\,.
\end{aligned}
$$

Además

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right) &= e^{-2t} * (e^{3t}-e^{2t}) = \int_0^t e^{-2(t-v)}\left(e^{3v}-e^{2v}\right)dv \\
&= \int_0^t \left(e^{-2t+5v} - e^{-2t+4v}\right)dv \\
&= e^{-2t}\left(\frac{1}{5}e^{5v}\Big/_0^t - \frac{1}{4}e^{4v}\Big/_0^t\right) \\
&= e^{-2t}\left(\frac{1}{5}e^{5t} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}e^{4t} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{20}e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{20}e^{-2t} - 2e^{3t} + 2e^{2t} \\
&= -\frac{9}{5}e^{3t} - \frac{7}{4}e^{2t} + \frac{1}{20}e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.4.11 Usando transformada de Laplace, encuentre la solución de

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 12.$$

7.5 Ecuaciones Integrales

Sean $f(x), k(x)$ funciones dadas. La ecuación

$$f(x) = y(x) + \int_0^x k(x-t)y(t)dt$$

donde $y(x)$ es la función incógnita, se llama **ecuación integral**.

Solución. Aplicando transformada de Laplace a ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(f(x))(s) = \mathcal{L}(y(x))(s) + \mathcal{L}((k*y)(x))(s) \\
\Longrightarrow\ & \mathcal{L}(f(x))(s) = \mathcal{L}(y(x))(s) + \mathcal{L}(k(x))(s)\cdot\mathcal{L}(y(x))(s) \\
\Longrightarrow\ & \mathcal{L}(y(x))(s) = \frac{\mathcal{L}(f(x))(s)}{1+\mathcal{L}(k(x))(s)} \\
\Longrightarrow\ & y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathcal{L}(f(x))(s)}{1+\mathcal{L}(k(x))(s)}\right](x)
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.5.1 Resolvamos

$$y(x) \;=\; x^3 + \int_0^x sen\,(x-t)y(t)dt\,.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y(x))(s) \;&=\; \mathcal{L}(x^3)(s) + \mathcal{L}(\operatorname{sen}(x))(s)\cdot\mathcal{L}(y(x))(s)\\
\Longrightarrow\; \mathcal{L}(y(x))(s) \;&=\; \frac{\mathcal{L}(x^3)(s)}{1-\mathcal{L}(\operatorname{sen}(x))(s)} \;=\; \frac{\dfrac{3!}{s^4}}{1-\dfrac{1}{1+s^2}} \;=\; \frac{3!}{s^4}\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) \;=\; \frac{3!}{s^4}+\frac{3!}{s^6}\,,\\
\Longrightarrow\; y(x) \;&=\; x^3+\frac{1}{20}x^5\,.
\end{aligned}$$

7.6 Función de transferencia

Considere el problema de valores iniciales

$$y'' + ay' + by \;=\; f(t)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

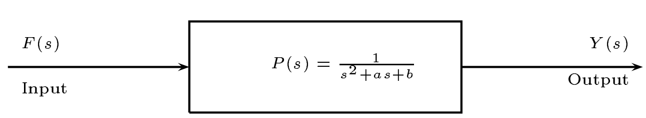
Este puede ser pensado como un sistema mecánico o eléctrico en reposo que es excitado por una **entrada** $f(t)$. Aplicando transformada de Laplace obtenemos

$$s^2\,Y(s) \;+\; a\,s\,Y(s) \;+\; b\,Y(s) \;=\; \mathcal{L}(f(t))(s) = F(s)$$

y despejando

$$Y(s) \;=\; \frac{F(s)}{s^2+a\,s+b} \;=\; P(s)\,F(s)\,.$$

La función $P(s) \;=\; (s^2+a\,s+b)^{-1}$ se llama **función de transferencia** del sistema. En el dominio de las frecuencias el sistema puede ser descrito por el diagrama de la Figura 35, donde el rectángulo representa la acción del sistema en reposo sobre la entrada, lo que en términos de transformada de Laplace consiste en multiplicar por la función de transferencia.



Aplicando transformada de Laplace inversa obtenemos

$$y(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}(P(s)\,F(s))(t)\,,$$

y luego

$$y(t) \;=\; p(t) * f(t)$$

donde $p(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}(P(s))(t)$ se llama la **función peso** del sistema, e $y(t)$ se llama **respuesta de estado-cero**. En el dominio del tiempo el sistema puede entonces ser descrito por el diagrama de la Figura 36, donde el rectángulo representa la acción del sistema en reposo sobre la entrada, lo que consiste en hacer convolución con la función peso.

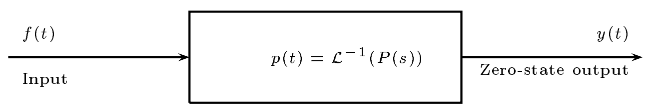


Figura 36

Ejercicio 7.6.1 Demuestre que $p(0) = 0$ y que si los coeficientes a y b son positivos se tiene

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t\to\infty} p'(t) = 0\,.$$

Escribamos $y(t) = p(t) * f(t)$ en su forma integral

$$y(t) \;=\; \int_0^t p(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Como $0 \leq \tau \leq t$, la integral puede ser interpretada diciendo que la entrada evaluada en τ unidades en el pasado, a saber $f(t-\tau)$, es ponderada con el valor de la función peso evaluada en el tiempo τ.

Para sistemas del mundo real los coeficientes a y b son positivos y la entrada $f(t)$ es una función acotada. El hecho que a y b sean positivos implica que la función peso $p(\tau)$ tiende a cero cuando τ se aproxima a infinito. Luego existe $T > 0$ tal que $p(\tau)$ es despreciable para $\tau \geq T$. Entonces, para $t > T$, tenemos

$$y(t) \;=\; \int_0^T p(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau \;+\; \int_\tau^t p(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau\,,$$

y el valor de la segunda integral se puede considerar despreciable. Una manera de decir esto es que los valores de la entrada para más de T unidades en el pasado tienen muy poco efecto sobre la respuesta; es decir, para cualquier t, las contribuciones de $f(t-\tau)$ sobre la respuesta son despreciables para $\tau \geq T$.

Ejercicio 7.6.2 Demuestre que la solución del problema de valores iniciales

$$y'' + ay' + by \ = \ f(t)\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad y'(0) = y_1\,,$$

es

$$y(t) \ = \ p(t) * f(t) \ + \ (a\, y_0 \ + \ y_1)\, p(t) \ + \ y_0\, p'(t)\,.$$

7.7 Impulso unitario

Dado un sistema mecánico o eléctrico, deseamos modelar una entrada de gran magnitud que ocurre sobre un pequeño período de tiempo. Para describir este comportamiento primero consideremos para cualquier número positivo ε la función

$$\delta_\varepsilon(t) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0\,, \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si} \quad 0 \le t < \varepsilon\,, \\ 0 & \text{si} \quad t \ge \varepsilon\,. \end{cases}$$

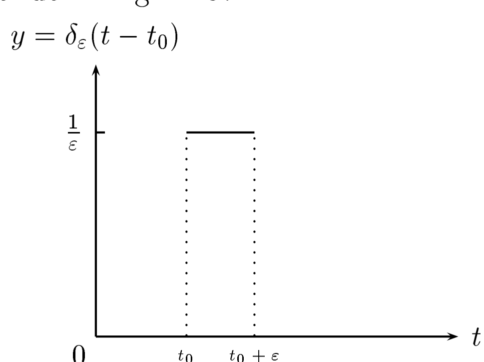
Ahora dado $t_0 > 0$, sea $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ la función $\delta_\varepsilon(t)$ trasladada t_0 unidades a la derecha:

$$\delta_\varepsilon(t-t_0) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < t_0\,, \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si} \quad t_0 \le t < t_0+\varepsilon\,, \\ 0 & \text{si} \quad t \ge t_0+\varepsilon\,, \end{cases}$$

Usando la función escalón unitario se puede escribir de la forma

$$\delta_\varepsilon(t-t_0) \ = \ \frac{1}{\varepsilon}\left[u(t-t_0) \ - \ u(t-t_0-\varepsilon)\right],$$

y su gráfico es como el de la Figura 37.



Claramente, cuando ε se aproxima a cero, el impulso rectangular $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ es cada vez más alto y angosto y el límite no existe.

Aunque el límite $\lim_{\varepsilon\to 0}\, \delta_\varepsilon(t-t_0)$ no existe en el sentido usual, uno puede derivar algunas interesante propiedades de la función. Primero, como $\delta_\varepsilon(t-t_0)=0$ para todo t fuera del intervalo $t_0 \leq t \leq t_0+\varepsilon$, se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-t_0)\, dt \;=\; \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\, dt \;=\; 1\,. \tag{7.2}$$

Si $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ es pensado como una fuerza, entonces 7.2 dice que el **impulso total** es unitario.

Segundo, dada cualquier función continua $f(t)$ definida en el intervalo $-\infty < t < \infty$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-t_0)\, f(t)\, dt \;=\; \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\, f(t)\, dt \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} f(t)\, dt\,.$$

Recordemos que el teorema del valor medio para integrales establece

$$\int_a^b f(t)\, dt \;=\; (b-a)\, f(\tau)\,,$$

para algún τ en el intervalo $a \leq t \leq b$. En consecuencia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-t_0)\, f(t)\, dt \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\,[\varepsilon\, f(\tau_\varepsilon)] \;=\; f(\tau_\varepsilon)\,, \tag{7.3}$$

para algún τ_ε en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0+\varepsilon$.

Tercero, la representación de $\delta_\varepsilon(t-t_0)$ en términos de la función escalón unitario implica que para $t_0 > 0$

$$\mathcal{L}(\delta_\varepsilon(t-t_0))(s) \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{e^{-s\,t_0}}{s} \;-\; \frac{e^{-s(t_0+\varepsilon)}}{s}\right] \;=\; e^{-s\,t_0}\,\frac{1\;-\;e^{-s\,\varepsilon}}{s\,\varepsilon}\cdot \tag{7.4}$$

Supongamos ahora que se permite aproximar ε a cero en cada una de las propiedades 7.2, 7.3 y 7.4. Si $\delta(t-t_0)$ denota el resultado de hacer ε tender a cero, entonces 7.2 implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, dt \;=\; 1\,. \tag{7.5}$$

En la propiedad 7.3, como τ_ε debe permanecer en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0+\varepsilon$, tenemos $\lim_{\varepsilon\to 0}\, \tau_\varepsilon \;=\; t_0$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\, dt \;=\; f(t_0)\,, \tag{7.6}$$

para cualquier función continua definida en el intervalo $-\infty < t < \infty$. Realmente, basta que $f(t)$ sea continua solamente en alguna vecindad de $t=t_0$, y puede estar definida como cero fuera de ese intervalo.

En la propiedad 7.4, que define la transformada de Laplace de $\delta_\varepsilon(t-t_0)$, observe que por la regla de l'Hôpital

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{s\,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{s\,e^{-s\varepsilon}}{s} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-s\varepsilon}}{1} = 1\,.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) = e^{-s\,t_0}\,. \tag{7.7}$$

De esta forma haciendo $t_0 \to 0$ obtenemos

$$\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1\,. \tag{7.8}$$

Este resultado nos previene que $\delta(t)$ no es una función *bien comportada*, ya que si lo fuera, su transformada de Laplace sería una función que va a cero cuando s va para infinito.

La "función" $\delta(t)$ construida anteriormente se llama **función impulso unitario** o **función delta de Dirac**. No es una función en el sentido tradicional pero es un ejemplo de lo que se suele llamar una "función generalizada" o "distribución" .

Ejemplo 7.7.1 Encuentre la respuesta al estado-cero para la ecuación

$$y'' - y = \delta(t-1)\,.$$

El lado derecho puede ser mirado como un impulso unitario aplicado en $t = 1$. Si $Y(s)$ es la transformada de Laplace de $y(t)$, entonces usando la fórmula 7.7 tenemos

$$s^2\,Y(s) - Y(s) = e^{-s}\,.$$

Por lo tanto,

$$Y(s) = e^{-s}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]\,,$$

y luego

$$y(t) = [\operatorname{senh}(t-1)]\,u(t-1)\,,$$

o

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t \le 1\,, \\ \operatorname{senh}(t-1) & \text{si} \quad t \ge 1\,. \end{cases}$$

La función impulso unitario es una herramienta útil en el análisis de sistemas lineales. Recordemos que en nuestra discusión de la subsección 7.6, donde fue estudiado el problema de respuesta de estado-cero

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(t)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0\,,$$

obtuvimos la relación

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + a\,s + b} = P(s)\,F(s)\,.$$

Si $f(t) = \delta(t)$, entonces $F(s) = 1$. Así, si la *solución* de la ecuación diferencial con $f(t) = \delta(t)$ es definida como *respuesta al impulso*, tenemos la siguiente definición.

Definición 7.7.2 *La función transferencia $P(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso.*

Recordemos también que la función peso $p(t)$ fue definida por la relación $p(t) = \mathcal{L}^{-1}(P(s))(t)$ y la respuesta al estado-cero como

$$y(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}(P(s)\,F(s))(t)\,.$$

Pero si $F(s) = 1$, entonces $y(t) = p(t)$ y tenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 7.7.3 *La función peso $p(t)$ es la respuesta de estado-cero correspondiente a la función entrada impulso unitario.*

Usando la terminología desarrollada en este párrafo, podemos decir que la función peso es simplemente la respuesta al impulso. En el dominio del tiempo y en el dominio de las frecuencias los diagramas del sistema son como los de la Figura 38.

Figura 38

7.8 $\mathcal{L}$ es inyectivo

En esta sección presentaremos la demostración del Teorema 7.1.21 que se refiere a la inyectividad de la transformada de Laplace. El siguiente Lema, pieza fundamental de nuestra prueba, que es consecuencia inmediata del Teorema de Aproximación polinomial de Weierstrass, no será demostrado.

Lemma 7.8.1 Si $g(t)$ es continua en el intervalo $[0,\,1]$ y para todo entero no negativo n se tiene $\displaystyle\int_0^1 u^n\, g(u)du = 0$, entonces $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,\,1]$.

Demostración del Teorema 7.1.21. Sean f y g funciones continuas en $[0,\,+\infty[$ tales que $\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(g(t))(s)$ para todo $s \geq s_0$. Debemos demostrar que $f(t) = g(t)$ para todo $t \geq 0$.
Considerando la función $h(t) = f(t) - g(t)$, tenemos que $H(s) = \mathcal{L}(h(t))(s) = 0$ para todo $s > s_0$. Luego, basta probar que $h(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.
En particular, para todo entero no negativo n se tiene

$$0 \;=\; H(s_0+n+1) \;=\; \int_0^\infty e^{-(n+1)t}\, e^{-s_0 t}\, h(t)dt\,. \tag{7.9}$$

Sea $v(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-s_0 u} h(u)du$. Por lo tanto, v es continua en $[0, +\infty[$, $v(0) = 0$ y $\lim_{t\to+\infty} v(t) = H(s_0) = 0$.
Integrando (7.9) por partes obtenemos

$$0 = H(s_0+n+1) = \lim_{R\to+\infty} [e^{-(n+1)R} v(R) + (n+1)\int_0^R e^{-(n+1)t} v(t)dt] ,$$

lo que implica

$$\int_0^\infty e^{-(n+1)t} v(t)dt = 0 , \quad \forall n = 0, 1, \cdots$$

Hagamos el cambio de variables $u = e^{-t}$. Por lo tanto, $e^{-(n+1)t} = u^(n+1)$, $t = -\ln(u)$ y $dt = -\frac{1}{u}du$. Entonces si ponemos $g(u) = v(-\ln(u))$, tenemos

$$0 = \int_0^\infty e^{-(n+1)t} v(t)dt = \int_0^1 u^{n+1} g(u) \cdot \frac{-1}{u} du ,$$

que implica

$$\int_0^1 u^n g(u)du = 0 , \quad \forall\, n = 0, 1, \cdots$$

Lema anterior implica $g(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Pero $g(t) = v(-\ln(t))$, y por lo tanto $v(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Tenemos entonces $0 = v(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-s_0 u} h(u)du$, y derivando $h(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

7.9 Ejercicios resueltos

Ejercicio 7.9.1 Usando transformada de Laplace encuentre la solución de la ecuación

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t} \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 12 .$$

Solución. Llamemos $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'(t))(s) &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 2 , \\ \mathcal{L}(y''(t))(s) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 2s - 12 \qquad \text{y} \\ \mathcal{L}(-8e^{-t})(s) &= -8\mathcal{L}(e^{-t})(s) = \frac{-8}{s+1} \cdot \end{aligned}$$

Luego aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$(s^2 - 2s + 5)Y(s) - 2s - 8 = \frac{-8}{s+1} ,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)} \\ &= \frac{3(s-1)+2\cdot 4}{(s-1)^2+2^2} - \frac{1}{s+1}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s-1)+2\cdot 4}{(s-1)^2+2^2} - \frac{1}{s+1}\right)(t) \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right)(t) + \\ &\quad 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right)(t) - \\ &\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)(t) \\ &= 3e^t\cos(2t) + 4e^t\operatorname{sen}(2t) - e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.9.2 Usando transformada de Laplace encuentre la solución de

$$y'' + 4y' + 13y = 2t + 3e^{-2t}\cos(3t)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = -1\,.$$

Solución. Sea $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$. Al aplicar transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$s^2Y(s) + 1 + 4sY(s) + 13Y(s) \;=\; \frac{2}{s^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9}\,,$$

lo que implica

$$Y(s) \;=\; -\frac{1}{s^2+4s+13} + \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} + \frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}\,.$$

Tenemos

$$\frac{1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{(s+2)^2+9} = \frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+9}$$

y luego

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s^2+4s+13}\right)(t) \;=\; -\frac{1}{3}\,e^{-2t}\operatorname{sen}(3t)\,.$$

Además si ponemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+13} \\ &= \frac{As(s^2+4s+13) + B(s^2+4s+13) + (Cs+D)s^2}{s^2(s^2+4s+13)}\,, \end{aligned}$$

obtenemos

$$A = \frac{-8}{169}, \quad B = \frac{2}{13}, \quad C = \frac{8}{169}, \quad D = \frac{6}{169}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)} &= \frac{-8}{169}\cdot\frac{1}{s} + \frac{2}{13}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{1}{169}\cdot\frac{8s+6}{s^2+4s+13} \\ &= \frac{-8}{169}\cdot\frac{1}{s} + \frac{2}{13}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{8}{169}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{10}{3\cdot 169}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+9},\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}\right)(t) = \frac{-8}{169} + \frac{2}{13}t + \frac{8}{169}\,e^{-2t}\,\cos(3t) - \frac{10}{507}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t).$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned}\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2} &= -\frac{3}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+4s+13}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{(s+2)^2+9}\right)\end{aligned}$$

obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2}\right)(t) = \frac{1}{2}t\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t).$$

Por lo tanto

$$y(t) = -\frac{179}{507}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t) + \frac{8}{169}\,e^{-2t}\,\cos(3t) + \frac{1}{2}t\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t) + \frac{2}{13}t - \frac{8}{169}.$$

Ejercicio 7.9.3 a) Si $y(t)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden p :

$$t^2y''(t) + ty'(t) + (t^2 - p^2)y(t) = 0,$$

muestre que la transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$ satisface

$$(1+s^2)Y''(s) + 3sY'(s) + (1-p^2)Y(s) = 0.$$

b) Resolver esta última ecuación para $p = 0$, expresándola en la forma

$$\frac{d}{ds}[A(s)Y'(s) + B(s)Y(s)] = 0$$

para algún $A(s)$ y $B(s)$.

Solución. a) Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(-p^2y(t))(s) &= -p^2Y(s)\,,\\
\mathcal{L}(t^2y(t))(s) &= Y''(s)\,,\\
\mathcal{L}(ty'(t))(s) &= \tfrac{d}{ds}(-\mathcal{L}(y'(t))(s)) = -\tfrac{d}{ds}(sY(s)-y(0)) = -Y(s)-sY'(s)\,,\\
\mathcal{L}(t^2y''(t))(s) &= \tfrac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}(y''(t))(s)) = \tfrac{d^2}{ds^2}(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0))\\
&= 2Y(s)+4sY'(s)+s^2Y''(s)\,.
\end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$\mathcal{L}(t^2y''(t))(s)+\mathcal{L}(ty'(t))(s)+\mathcal{L}(t^2y(t))(s)+\mathcal{L}(-p^2y(t))(s) \;=\; 0\,,$$

y reemplazando se tiene

$$2Y(s)+4sY'(s)+s^2Y''(s)-Y(s)-sY'(s)+Y''(s)-p^2Y(s) \;=\; 0\,,$$

es decir

$$(1+s^2)Y''(s)+3sY'(s)+(1-p^2)Y(s) \;=\; 0\,.$$

b) Poniendo $p=0$ obtenemos la ecuación

$$(1+s^2)Y''(s)+3sY'(s)+Y(s) \;=\; 0\,,$$

que podemos escribir de la forma

$$\frac{d}{ds}[(1+s^2)Y'(s)+sY(s)] \;=\; 0\,.$$

Integrando esta última ecuación tenemos

$$(1+s^2)Y'(s)+sY(s) \;=\; c_1\,,$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La correspondiente ecuación homogénea es

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} \;=\; -\frac{s}{1+s^2}$$

que tiene solución

$$Y_h(s) \;=\; \frac{c}{\sqrt{1+s^2}}\,.$$

Haciendo variar la constante $c=c(s)$ y reemplazando obtenemos

$$c'(s) \;=\; \frac{c_1}{\sqrt{1+s^2}}\,,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} c(s) &= c_1 \int \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} + c_2 \\ &= c_1 \ln(s + \sqrt{1+s^2}) + c_2 \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Y(s) = c_1 \frac{\ln(s + \sqrt{1+s^2})}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1+s^2}} \,.$$

Ejercicio 7.9.4 Resuelva usando transformada de Laplace la ecuación

$$y'' + 4y = f(t) \,, \quad y(0) = y'(0) = 0 \,,$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 3 \\ t & t \ge 3 \end{cases}$$

Solución. Primero observemos que

$$f(t) = tH(t-3) = (t-3)H(t-3) + 3H(t-3) \,,$$

donde

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \ge 0 \,. \end{cases}$$

Entonces si $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$, aplicando transformada de Laplace a la ecuación diferencial obtenemos

$$(s^2 + 4)\,Y(s) = \frac{3s+1}{s^2}\, e^{-3s} \,.$$

Esto implica

$$Y(s) = \frac{3s+1}{s^2(s^2+4)}\, e^{-3s} \,,$$

y luego

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+1}{s^2(s^2+4)}\, e^{-3s} \right)(t) \,.$$

Escribiendo

$$\frac{3s+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \,,$$

se obtiene

$$A = \frac{3}{4}\,, \quad B = \frac{1}{4}\,, \quad C = -\frac{3}{4}\,, \quad D = -\frac{1}{4} \,.$$

Así

$$\frac{3s+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+4} \,,$$

y

$$g(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+1}{s^2(s^2\;+4)}\right)(t) \;=\; \frac{3}{4} \;+\; \frac{1}{4}\,t \;-\; \frac{3}{4}\,\cos(2t) \;-\; \frac{1}{8}\,\sin(2t)\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t-3)\,H(t-3) \\ &= \left(\frac{3}{4} \;+\; \frac{1}{4}\,(t-3) \;-\; \frac{3}{4}\,\cos(2(t-3)) \;-\; \frac{1}{8}\,\sin(2(t-3))\right)\,H(t-3)\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.9.5 Resuelva usando transformada de Laplace la ecuación

$$y'' \;+\; ty' \;-\; y \;=\; 0\,, \quad y(0) \;=\; 0\,, \quad y'(0) \;=\; 1\,.$$

Solución. Sea $Y(s) \;=\; \mathcal{L}(y(t))(s)$. Entonces

$$\mathcal{L}(ty'(t))(s) \;=\; -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y'(t))(s) \;=\; -\frac{d}{ds}[sY(s)-y(0)] \;=\; -Y(s) \;-\; sY'(s)$$

$$\mathcal{L}(y''(t))(s) \;=\; s^2Y(s) \;-\; sy(0) \;-\; y'(0) \;=\; s^2Y(s) \;-\; 1\,.$$

Luego, aplicando transformada de Laplace a nuestra ecuación obtenemos

$$s^2Y(s) \;-\; 1 \;-\; Y(s) \;-\; sY'(s) \;-\; Y(s) \;=\; 0\,,$$

es decir la ecuación lineal de primer orden

$$Y'(s) \;+\; \left(\frac{2}{s} - s\right)Y(s) \;=\; -\frac{1}{s}\,.$$

Su solución es

$$\begin{aligned} Y(s) &= e^{-\int\left(\frac{2}{s}-s\right)ds}\left(-\int e^{\int\left(\frac{2}{s}-s\right)ds}\,\frac{1}{s}\,ds \;+\; c\right) \\ &= e^{-\left(\ln(s^2)-\frac{s^2}{2}\right)}\left(-\int e^{\ln(s^2)-\frac{s^2}{2}}\,\frac{1}{s}\,ds \;+\; c\right) \\ &= \frac{1}{s^2}e^{\frac{s^2}{2}}\left(-\int s^2e^{-\frac{s^2}{2}}\frac{1}{s}\,ds \;+\; c\right) \\ &= \frac{1}{s^2}e^{\frac{s^2}{2}}\left(\int -se^{-\frac{s^2}{2}}\,ds \;+\; c\right) \\ &= \frac{1}{s^2}e^{\frac{s^2}{2}}\left(e^{-\frac{s^2}{2}} \;+\; c\right) \\ &= \frac{1}{s^2} \;+\; \frac{c}{s^2}\,e^{\frac{s^2}{2}}\,. \end{aligned}$$

Finalmente como

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(y(t))(s) \;=\; 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s^2}\, e^{\frac{s^2}{2}} \;=\; \infty\,,$$

debemos tener $c \;=\; 0$. Así

$$Y(s) \;=\; \frac{1}{s^2}\,,$$

y por lo tanto

$$y(t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)(t) \;=\; t\,.$$

Ejercicio 7.9.6 a) Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\, J_0(x) \;=\; -J_1(x)\,.$$

b) Sabiendo que

$$\mathcal{L}(J_0(x))(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{s^2\;+\;1}}\,,$$

usando transformada de Laplace demuestre que

$$(J_0 * J_1)(x) \;=\; J_0(x) \;-\; \cos(x)\,.$$

Solución. a) Como

$$J_0(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\,,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} J_0(x) \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\, 2k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \frac{1}{2} \\
&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+1)-1} \\
&=\; -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \\
&=\; -J_1(x)\,.
\end{aligned}$$

b) Tenemos

$$\mathcal{L}((J_0 * J_1)(x))(s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{s^2\;+\;1}}\, \mathcal{L}(J_1(x))(s)\,.$$

Pero

$$J_1 \;=\; -{J_0}' \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned}\mathcal{L}(J_1(x))(s) \;&=\; -[s\mathcal{L}(J_0(x))(s) \;-\; J_0(0)] \\ &=\; \tfrac{-s}{\sqrt{s^2+1}} \;+\; 1\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((J_0 * J_1)(x))(s) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{s^2 \,+\, 1}}\left(1 \;-\; \frac{s}{\sqrt{s^2 \,+\, 1}}\right) \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{s^2 \,+\, 1}} \;-\; \frac{s}{s^2 \,+\, 1}\,,\end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}(J_0 * J_1)(x) \;&=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2 \,+\, 1}}\right)(x) \;-\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{s^2 \,+\, 1}}\right)(x) \\ &=\; J_0(x) \;-\; \cos(x)\,.\end{aligned}$$

Capítulo 8

Ecuaciones en Derivadas Parciales y Formas Canónicas

8.1 Introducción

Una ecuación en derivadas parciales (E.D.P.) es cualquier expresión del tipo

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0 \tag{8.1}$$

que contiene las variables independientes $x, y, \ldots$, una función incógnita u y sus derivadas parciales sucesivas $u_x, u_y, u_{xx}, \ldots$.

Si n es el número de variables independientes, la ecuación (8.1) se considerará definida en un cierto dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Queremos encontrar funciones $u(x, y, \ldots)$ que verifiquen (8.1) en D. Estas funciones, si existen, serán llamadas **soluciones** de la E.D.P. (8.1).

Llamaremos orden de (8.1) al mayor orden de las derivadas parciales que aparecen en la ecuación.

Por otra parte (8.1) se dice **lineal**, si la función f es lineal en u y en todas las derivadas parciales de u.

Nos concentraremos en las E.D.P. lineales de segundo orden. A este grupo pertenecen las llamadas ecuaciones de la Física Matemática: ecuación de ondas, ecuación del calor y ecuación de Laplace.

Cuando, además de lineal, la ecuación está definida en $D \subseteq \mathbb{R}^2$, su expresión general es

$$A_1 u_{xx} + A_2 u_{xy} + A_3 u_{yy} + A_4 u_x + A_5 u_y + A_6 u = g(x, y) \tag{8.2}$$

donde $A_i = A_i(x, y), i = 1, \ldots, 6$ son llamados coeficientes de la ecuación y $g = g(x, y)$ término independiente.

Si $g(x, y) \equiv 0$ en D, la ecuación (8.2) se llama **homogénea**. En caso contrario, diremos que la ecuación es **no homogénea** o **completa**.

8.2 Principales diferencias con E.D.O.

1. Para una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) lineal de orden n, la solución general depende de n constantes arbitrarias. En el caso E.D.P., en lugar de constantes, ella depende de funciones arbitrarias. Por ejemplo, para

   $$u_{xy} = 0\,,$$

   la solución general es $u(x, y) = g(x) + h(y)$, con g y h funciones derivables arbitrarias.

   Para obtener de ella una solución particular, hay que agregar condiciones que permitan determinar g y h explícitamente. Esto en general puede ser más difícil que encontrar la solución general. Por ello se consideran procedimientos que permiten encontrar directamente las soluciones particulares que nos interesan.

2. Para el caso E.D.O. lineales homogéneas de orden n, el conjunto solución es un espacio vectorial de dimensión n. Para el caso E.D.P., el conjunto solución es también un espacio vectorial, pero de dimensión infinita.

Ejemplo 8.2.1 Consideremos la ecuación

$$u_x - u_y = 0\,.$$

Para encontrar sus soluciones, hagamos primero el cambio de variables

$$r = x + y\,, \quad s = x - y\,.$$

Usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_s s_x = u_r + u_s\,,\\ u_y &= u_r r_y + u_s s_y = u_r - u_s\,, \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación

$$u_s = 0\,.$$

La solución general de esta última ecuación es

$$u(r, s) = f(r)\,,$$

y por lo tanto, la solución general de nuestra ecuación es

$$u(x, y) = f(x + y)\,,$$

con f una función diferenciable cualquiera.
Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos las soluciones:

$$\begin{array}{rrrcl} 1, & (x+y), & (x+y)^2, & \ldots, & (x+y)^n,\\ & \mathrm{sen}(x+y), & \mathrm{sen}(2(x+y)), & \ldots, & \mathrm{sen}(n(x+y)),\\ & \cos(x+y), & \cos(2(x+y)), & \ldots, & \cos(n(x+y)),\\ & e^{x+y}, & e^{2(x+y)}, & \ldots, & e^{n(x+y)} \end{array}$$

y todas ellas son L.I.

8.3 Clasificación de las E.D.P. de Segundo Orden

Consideremos la ecuación

$$A_1 u_{xx} + A_2 u_{xy} + A_3 u_{yy} + A_4 u_x + A_5 u_y + A_6 u = g(x,y) \tag{8.3}$$

donde cada $A_i = A_i(x,y), i = 1, \ldots, 6$, es una función continua definida sobre un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Haciendo una analogía con la ecuación de una cónica en el plano:

$$A_1 x^2 + A_2 xy + A_3 y^2 + A_4 x + A_5 y + A_6 = 0$$

diremos que (8.3) es, en D:

1. hiperbólica si $(A_2)^2 - 4A_1A_3 > 0$ (en D)
2. parabólica si $(A_2)^2 - 4A_1A_3 = 0$ (en D)
3. elíptica si $(A_2)^2 - 4A_1A_3 < 0$ (en D)

Veremos que, en cada caso, (8.3) se puede reducir a una **forma canónica** por medio de cambio de coordenadas.

8.4 Formas Canónicas

Consideremos la ecuación (8.3)

$$A_1 u_{xx} + A_2 u_{xy} + A_3 u_{yy} + A_4 u_x + A_5 u_y + A_6 u \;=\; g(x,y)\,, \tag{8.4}$$

donde $A_i = A_i(x,y), i = 1, \ldots, 6$ son funciones continuas definidas en una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sean $r = r(x,y)$ y $s = s(x,y)$, funciones de x, y dos veces derivables tales que

$$J = \begin{vmatrix} r_x & s_x \\ r_y & s_y \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{en } D\,.$$

Supongamos también que la aplicación $(r,s) : D \longrightarrow (r,s)(D)$ es invertible, y que su inversa

$$(x,y) : (r,s)(D) \longrightarrow D$$

tiene funciones componentes $x = x(r,s)\,, y = y(r,s)$ dos veces derivables.

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_x & = & u_r r_x + u_s s_x \\ u_y & = & u_r r_y + u_s s_y \\ u_{xx} & = & u_{rr}(r_x)^2 + 2u_{rs} r_x s_x + u_{ss}(s_x)^2 + u_r r_{xx} + u_s s_{xx} \\ u_{xy} & = & u_{rr} r_x r_y + u_{rs}(r_x s_y + r_y s_x) + u_{ss} s_x s_y + u_r r_{xy} + u_s sxy \\ u_{yy} & = & u_{rr}(r_y)^2 + 2u_{rs} r_y s_y + u_{ss}(s_y)^2 + u_r r_{yy} + u_s s_{yy}\ . \end{array} \right. \tag{8.5}$$

Reemplazando en (8.3) se obtiene

$$B_1 u_{rr} + B_2 u_{rs} + B_3 u_{ss} + B_4 u_r + B_5 u_s + B_6 u \;=\; g(r,s)\;, \tag{8.6}$$

donde $g(r,s) = g(x(r,s), y(r,s))$ y

$$\begin{cases} B_1(r,s) &=& A_1 (r_x)^2 + A_2 r_x r_y + A_3 (r_y)^2 \\ B_2(r,s) &=& 2A_1 r_x s_x + A_2 (r_x s_y + r_y s_x) + 2A_3 r_y s_y \\ B_3(r,s) &=& A_1 (s_x)^2 + A_2 s_x s_y + A_3 (s_y)^2 \\ B_4(r,s) &=& A_1 r_{xx} + A_2 r_{xy} + A_3 r_{yy} + A_4 r_x + A_5 r_y \\ B_5(r,s) &=& A_1 s_{xx} + A_2 s_{xy} + A_3 s_{yy} + A_4 s_x + A_5 s_y \\ B_6(r,s) &=& A_6\;, \end{cases}$$

donde las funciones A_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, están evaluadas en $(x(r,s), y(r,s))$, y las derivadas parciales de r y s en (r,s).

Observe que la ecuación (8.6) es del mismo tipo que la ecuación (8.3), ya que

$$(B_2)^2 \;-\; 4B_1 B_3 \;=\; J^2((A_2)^2 \;-\; 4A_1 A_3)\;.$$

Supongamos $A_1 \neq 0$ en D y tratemos de determinar r, s como funciones de x e y de modo de obtener, en lo posible, $B_1 \equiv 0$ y $B_3 \equiv 0$ en $(r,s)(D)$.

Tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 (r_x)^2 + A_2 r_x r_y + A_3 (r_y)^2 = 0 \\ B_3 &= A_1 (s_x)^2 + A_2 s_x s_y + A_3 (s_y)^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Ambas son de la forma:

$$A_1 (f_x)^2 + A_2 f_x f_y + A_3 (f_y)^2 = 0,$$

o bién

$$A_1 \left(\frac{f_x}{f_y}\right)^2 + A_2 \left(\frac{f_x}{f_y}\right) + A_3 = 0\,.$$

Sobre las curvas $f =$ cte. se tiene

$$df = f_x dx + f_y dy = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{f_x}{f_y}$$

y obtenemos

$$A_1 (y'(x))^2 - A_2\, y'(x) + A_3 \;=\; 0\,, \tag{8.7}$$

cuyas raíces son

$$y'(x) \;=\; \frac{A_2 + \sqrt{(A_2)^2 \;-\; 4A_1 A_3}}{2A_1} \tag{8.8}$$

$$y'(x) \;=\; \frac{A_2 - \sqrt{(A_2)^2 \;-\; 4A_1 A_3}}{2A_1}\,. \tag{8.9}$$

Definición 8.4.1 Las E.D.O. de primer orden (8.8 - 8.9) se denominan *ecuaciones características* de la E.D.P. (8.3). Sus soluciones

$$y(x) = \lambda_1(x) + c_1$$

$$y(x) = \lambda_2(x) + c_2$$

son llamadas *curvas características.*

Observación 8.4.2 Si la ecuación (8.3) es hiperbólica ($(A_2)^2 - 4A_1A_3 > 0$), el cambio de coordenadas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r(x,y) &=& y - \lambda_1(x) \\ s(x,y) &=& y - \lambda_2(x) \end{array} \right. \tag{8.10}$$

verifica $J \neq 0$ y $B_1 = B_3 \equiv 0$.

8.4.1 Ecuaciones hiperbólicas

En este caso las ecuaciones características son reales y distintas, y el cambio de coordenadas (8.10) nos da

$$u_{rs} = -\tilde{B}_4 u_r - \tilde{B}_5 u_s + \tilde{B}_6 u + \tilde{g}(r,s)\,.$$

Esta expresión es llamada **primera forma canónica de las E.D.P. hiperbólicas**.

Si además hacemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha &=& r+s \\ \beta &=& r-s \end{array} \right.$$

obtenemos

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = c_4 u_\alpha + c_5 u_\beta + c_6 u + \tilde{g}(\alpha,\beta)\,,$$

que es llamada **segunda forma canónica de E.D.P. hiperbólicas**.

Observación 8.4.3 Si $A_1 \equiv 0$ en D, obtenemos en (8.7)

$$-A_2 \left(\frac{dx}{dy}\right) + A_3 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0\,,$$

y las ecuaciones características son

$$\frac{dx}{dy} = 0 \quad \text{y} \quad -A_2 + A_3 \left(\frac{dx}{dy}\right) = 0\,,$$

cuyas soluciones son

$$x = c_1\,, \quad x = \lambda_2(y) + c_2\,.$$

Ponemos entonces

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r &=& x \\ s &=& x - \lambda_2(y)\,, \end{array} \right.$$

y la ecuación transformada tiene la estructura de la primera forma canónica. Para pasar a la segunda, usamos el mismo cambio de coordenadas del caso $A_1 \neq 0$.

Ejemplo 8.4.4 Consideremos la ecuación de ondas

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + A(x,t)\,, \quad \text{con} \quad c > 0\,.$$

Tenemos

$$A_1 = -c^2\,, \quad A_2 = 0\,, \quad A_3 = 1\,, \quad \text{y} \quad (A_2)^2 \;-\; 4A_1A_3 = 4c^2\,.$$

Las ecuaciones características son

$$\frac{dx}{dt} \;=\; \pm\frac{2c}{-2c^2} \;=\; \mp\frac{1}{c}\,,$$

y las curvas características:

$$x \;=\; \mp\frac{1}{c}t + c_1\,.$$

Hacemos entonces el cambio de coordenadas:

$$r \;=\; x + \frac{1}{c}t\,, \qquad s \;=\; x - \frac{1}{c}t\,.$$

Como

$$\begin{array}{lll} r_t & = & \frac{1}{c} \qquad r_x \;=\; 1 \\ \\ s_t & = & -\frac{1}{c} \qquad s_x \;=\; 1\,, \end{array}$$

obtenemos

$$B_2 \;=\; +2c^2\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c} \;+\; 2 \;=\; 4\,,$$

y luego

$$u_{rs} \;=\; \frac{1}{4}\;A(\frac{1}{2}(r+s),(\frac{c}{2}(r-s))\,.$$

8.4.2 Ecuaciones parabólicas

En este caso hay sólo una ecuación característica

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{A_2}{2A_1}(x,y)\,,$$

y una sola curva característica

$$y \;=\; \lambda_1(x) + c\,.$$

Ponemos entonces

$$\left\{\begin{array}{lll} r & = & y - \lambda_1(x) \\ s & = & k_1x + k_2y \end{array}\right.$$

con k_1 , k_2 constantes tales que el determinante

$$\begin{vmatrix} -\lambda_1(x) & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{en} \quad D$$

(por ejemplo, $k_1 = 1$, $k_2 = 0$).

Así obtenemos $B_1 = 0$ y por lo tanto $B_2 = 0$, y la ecuación

$$u_{ss} \ = \ -\tilde{B}_4 u_r - \tilde{B}_5 u_s - \tilde{B}_6 u + \tilde{g}(r,s)\,,$$

llamada **forma canónica para la ecuación parabólica**.

Observación 8.4.5 Si $A_1 \equiv 0$ en D, entonces $A_2 \equiv 0$ y la ecuación ya está en su forma canónica.

Un ejemplo de este tipo de ecuaciones es la ecuación de difusión o del calor

$$u_t \ = \ k u_{xx} \ + \ A(x,t)\,.$$

8.4.3 Ecuaciones elípticas

Las correspondientes ecuaciones características son

$$\frac{dy}{dx} \ = \ \frac{A_2}{2A_1} \pm \sqrt{\frac{(A_2)^2 \ - \ 4A_1A_3}{4A_1^2}} \ i$$

y las curvas características:

$$\begin{cases} y \ = \ a(x) + b(x)i + c_1 \\ \\ y \ = \ a(x) - b(x)i + c_2 \end{cases}$$

Ponemos entonces

$$r \ = \ y - (a(x) + b(x)i)$$

$$s \ = \ y - (a(x) - b(x)i)\,.$$

Luego

$$\alpha \ = \ \frac{1}{2}(r+s) \ = \ y - a(x)$$

$$\beta \ = \ \frac{1}{2i}(r-s) \ = \ -b(x)$$

y la ecuación nos queda

$$u_{\alpha\alpha} \ + \ u_{\beta\beta} \ = \ -\tilde{B}_4 u_\alpha \ - \ \tilde{B}_5 u_\beta \ - \ \tilde{B}_6 u \ + \ \tilde{g}(\alpha,\beta)\,.$$

Esta expresión es llamada **forma canónica para las E.D.P. elípticas.**

Un ejemplo de estas ecuaciones es la ecuación de Laplace

$$u_{xx} \ + \ u_{yy} \ = \ 0\,.$$

Ejemplo 8.4.6 Obtener la forma canónica de la ecuación

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2\,.$$

Como $(A_2)^2 - 4A_1A_3 = 25-16 = 9>0$, la ecuación es hiperbólica en todo $\mathbb{R}^2$.

Las ecuaciones características son

$$\frac{dy}{dy} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\,,$$

y luego, la curvas características son

$$y = x + c_1 \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{4}x + c_2\,.$$

Entonces el cambio de coordenadas:

$$r = y - x\,, \qquad s = y - \frac{1}{4}x\,,$$

produce

$$u_{rs} = \frac{1}{3}\,u_s - \frac{8}{9}\,.$$

Ejemplo 8.4.7 Reducir a su forma canónica

$$u_{xx} - 4x^2u_{yy} = \frac{1}{x}u_x\,, \quad \text{con} \quad x>0\,.$$

Como $(A_2)^2 - 4A_1A_3 = 16x^2 > 0$, la ecuación es hiperbólica. Sus ecuaciones características son

$$y'(x) = \frac{A_2 \pm \sqrt{(A_2)^2 - 4A_1A_3}}{2A_1} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = \pm 2x\,.$$

En consecuencia las curvas características son:

$$y(x) = x^2 \quad \text{y} \quad y(x) = -x^2\,.$$

Hacemos entonces el cambio de coordenadas

$$r(x,y) = y - x^2\,, \quad s(x,y) = y + x^2\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} r_x &= -2x & r_y &= 1 \\ s_x &= 2x & s_y &= 1\,, \end{aligned}$$

y

$$
\begin{array}{lllllllll}
r_{xx} & = & -2 & r_{xy} & = & 0 & r_{yy} & = & 0 \\
\\
s_{xx} & = & 2 & s_{xy} & = & 0 & s_{yy} & = & 0\,.
\end{array}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{array}{lllll}
u_x & = & u_r r_x + u_s s_x & = & 2x(u_s - u_r) \\
\\
u_y & = & u_r r_y + u_s s_y & = & u_r + u_s\,,
\end{array}
$$

y

$$
\begin{array}{lll}
u_{xx} & = & 2(u_s - u_r) + 2x(u_{sr} r_x + u_{ss} s_x - u_{rr} r_x - u_{rs} s_x) \\
 & = & 2(u_s - u_r) + 2x(-2x u_{sr} + 2x u_{ss} + 2x u_{rr} - 2x u_{rs}) \\
 & = & 2(u_s - u_r) + 4x^2(u_{rr} - 2u_{sr} + u_{ss}) \\
\\
u_{yy} & = & u_{rr} r_y + u_{sr} s_y + u_{sr} r_y + u_{ss} s_y \\
 & = & u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}\,.
\end{array}
$$

Reemplazando obtenemos

$$
2(u_s - u_r) + 4x^2(u_{rr} - 2u_{sr} + u_{ss}) - 4x^2(u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}) = \frac{1}{x} \cdot 2x(u_s - u_r)\,,
$$

es decir

$$
-16x^2 u_{sr} = 0\,.
$$

Pero como $2x^2 = s - r$, se tiene

$$
16(r - s)u_{sr} = 0\,.
$$

8.5 Ejercicios resueltos

Ejercicio 8.5.1 Reduzca a su forma canónica la ecuación

$$u_{xx} \;-\; 2\cos(x)u_{xy} \;-\; (3 + sen^2(x))u_{yy} \;-\; y\, u_y \;=\; 0\,.$$

Solución. Tenemos

$$A_1 = 1\,, \quad A_2 = -2\cos(x)\,, \quad A_3 = -(3 + \operatorname{sen}^2(x))\,,$$

y como

$$A^2 - 4A_1A_3 \;=\; 4\cos^2(x) + 4(3 + \operatorname{sen}^2(x)) \;=\; 16$$

la ecuación es hiperbólica.
Las correspondientes ecuaciones características son

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\cos(x) + 2\,, \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} \;=\; -\cos(x) - 2\,,$$

y las curvas características son

$$y = -\operatorname{sen}(x) + 2x + c_1\,, \quad \text{y} \quad y = -\operatorname{sen}(x) - 2x + c_2\,.$$

Por lo tanto debemos hacer el cambio de coordenadas

$$r \;=\; y + \operatorname{sen}(x) - 2x\,, \quad s \;=\; y + \operatorname{sen}(x) + 2x\,.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} r_x &= \cos(x) - 2 \quad r_y \;=\; 1 \\ s_x &= \cos(x) + 2 \quad s_y \;=\; 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_s s_x \;=\; (\cos(x) - 2)u_r + (\cos(x) + 2)u_s \\ u_y &= u_r r_y + u_s s_y \;=\; u_r + u_s \\ u_{xx} &= -\operatorname{sen}(x)(u_r + u_s) + (\cos(x) - 2)^2 u_{rr} + 2(\cos^2(x) - 4)u_{rs} + (\cos(x) + 2)^2 u_{ss} \\ u_{xy} &= (\cos(x) - 2)u_{rr} + 2\cos(x)u_{rs} + (\cos(x) + 2)u_{ss} \\ u_{yy} &= u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& -(y + \operatorname{sen}(x))(u_r + u_s) + \\ & [(\cos(x) - 2)^2 - 2\cos(x)(\cos(x) - 2) - (3 + \operatorname{sen}^2(x))]u_{rr} + \\ & [2(\cos^2(x) - 4) - 4\cos^2(x) - 2(3 + \operatorname{sen}^2(x))]u_{rs} + \\ & [(\cos(x) + 2)^2 - 2\cos(x)(\cos(x) + 2) - (3 + \operatorname{sen}^2(x))]u_{ss}\,. \end{aligned}$$

Esta ecuación se reduce a

$$-\frac{1}{2}(r+s)(u_r+u_s)-16u_{rs}=0\,.$$

Luego su primera forma canónica es

$$(r+s)(u_r+u_s)+32u_{rs} \;=\; 0\,.$$

Ejercicio 8.5.2 Reducir a su forma canónica y obtener la solución general de la ecuación

$$x^2 z_{xx}-2xz_{xy}+z_{yy}+z_y=0\,.$$

Solución. Tenemos

$$A \;=\; x^2\,, \quad B \;=\; -2x\,, \quad C \;=\; 1 \quad \text{y} \quad B^2-4AC \;=\; 0\,.$$

Luego la ecuación es parabólica y su ecuación característica es

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{-2x}{2x^2} \;=\; \frac{-1}{x}\,.$$

La correspondiente curva característica es

$$y \;=\; -\ln(x) \;+\; c\,.$$

Consideramos entonces el cambio de coordenadas

$$r \;=\; y \;+\; \ln(x)\,, \quad s \;=\; x\,.$$

Por lo tanto

$$r_x \;=\; \tfrac{1}{x}\,; \quad r_y \;=\; 1\,;$$

$$s_x \;=\; 1\,; \quad s_y \;=\; 0\,;$$

y

$$z_x \;=\; z_r\cdot r_x \;+\; z_s\cdot s_x \;=\; \frac{1}{x}z_r \;+\; u_s\,,$$

$$z_{xx} \;=\; -\frac{1}{x^2}z_r \;+\; \frac{1}{x^2}z_{rr} \;+\; \frac{2}{x}z_{rs} \;+\; z_{ss}\,,$$

$$z_y \;=\; z_r\cdot r_y \;+\; z_s\cdot s_y \;=\; z_r\,,$$

$$z_{xy} \;=\; \frac{1}{x}z_{rr} \;+\; z_{rs}\,,$$

$$z_{yy} \;=\; z_{rr}\,.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$x^2(-\frac{1}{x^2}z_r \ + \ \frac{1}{x^2}z_{rr} \ + \ \frac{2}{x}z_{rs} \ + \ z_{ss}) \ - \ 2x(\frac{1}{x}z_{rr} \ + \ z_{rs}) \ + \ z_{rr} \ + \ z_r \ = \ 0 \, ,$$

que se reduce a

$$x^2 z_{ss} \ = \ 0 \, .$$

Luego la forma canónica es

$$z_{ss} \ = \ 0 \, ,$$

y la solución general en las coordenadas r, s es

$$z(r,s) \ = \ sf(r) \ + \ g(r) \, ,$$

con f, g funciones dos veces derivables cualquieras.

De esta forma nuestra solución general es

$$z(x,y) \ = \ xf(y \ + \ \ln(x)) \ + \ g(y \ + \ \ln(x)) \, ,$$

con f, g funciones dos veces derivables arbitrarias.

Ejercicio 8.5.3 Determine el dominio en $\mathbb{R}^2$ en el cual la ecuación diferencial

$$yu_{xx} - u_{yy} + \frac{1}{2y}u_y = 0$$

es elíptica. En ese dominio obtener su forma canónica.

Solución. El discriminante de esta ecuación es

$$B^2 \ - \ 4AC \ = \ 4y \, ,$$

y luego es elíptica para $y < 0$.

Consideremos entonces $y < 0$. Las ecuaciones características son

$$\frac{dy}{dx} \ = \ \pm \, \imath \, \frac{\sqrt{-4y}}{2y} \ = \ \pm \, \imath \, \frac{-1}{\sqrt{-y}} \, ,$$

y las curvas características son

$$(-y)^{\frac{3}{2}} \ = \ \pm \, \frac{3}{2} \, x \, \imath \ + \ c \, .$$

Ponemos entonces

$$r \ = \ (-y)^{\frac{3}{2}} \ - \ \frac{3}{2} \, x \, \imath \, , \quad s \ = \ (-y)^{\frac{3}{2}} \ + \ \frac{3}{2} \, x \, \imath \, ,$$

y luego nuestro cambio de coordenadas es

$$\alpha \;=\; \frac{1}{2}\,(r+s) \;=\; (-y)^{\frac{3}{2}}\,, \quad \beta \;=\; \frac{1}{2\imath}\,(r-s) \;=\; -\frac{3}{2}\,x\,,$$

y

$$\alpha_x \;=\; 0\,; \qquad \alpha_y \;=\; -\tfrac{3}{2}\,(-y)^{\frac{1}{2}}\,;$$

$$\beta_x \;=\; -\tfrac{3}{2}\,; \quad \beta_y \;=\; 0\,;$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
u_x \;&=\; u_\alpha \alpha_x \;+\; u_\beta \beta_x \;=\; -\frac{3}{2}\,u_\beta\,,\\
u_{xx} \;&=\; \frac{9}{4}\,u_{\beta\beta}\,,\\
u_y \;&=\; u_\alpha\,\alpha_y \;+\; u_\beta\,\beta_y \;=\; -\frac{3}{2}\,(-y)^{\frac{1}{2}}\,u_\alpha\,,\\
u_{yy} \;&=\; \frac{3}{4}\,(-y)^{-\frac{1}{2}}\,u_\alpha \;+\; \frac{9}{4}\,(-y)\,u_{\alpha\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Finalmente reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\frac{9}{4}\,y\,u_{\beta\beta} \;-\; \frac{3}{4}\,(-y)^{-\frac{1}{2}}\,u_\alpha \;+\; \frac{9}{4}\,y\,u_{\alpha\alpha} \;+\; \frac{1}{2y}\,\frac{3}{2}\,(-y)^{\frac{1}{2}}\,u_\alpha \;=\; 0\,,$$

que se reduce a

$$\frac{9}{4}\,y\,(u_{\alpha\alpha} \;+\; u_{\beta\beta}) \;=\; 0\,.$$

Luego la forma canónica es

$$u_{\alpha\alpha} \;+\; u_{\beta\beta} \;=\; 0\,.$$

Ejercicio 8.5.4 Considere la ecuación hiperbólica:

$$t^4 u_{xx} \;+\; \frac{2}{t} u_t \;=\; u_{tt}\,, \quad t>0\,.$$

a) Redúzcala a su primera forma canónica.

b) Encuentre su solución general.

c) Encuentre la solución particular que verifica

$$u(0,t) \;=\; \frac{t^6}{9}\,, \quad u_x(0,t) \;=\; 1\,.$$

Solución. **a)** Tenemos

$$A = 1\,, \quad B = 0\,, \quad C = -t^4 \quad \text{y} \quad B^2 - 4AC = 4t^4\,.$$

Luego sus ecuaciones características son

$$\frac{dx}{dt} = \pm t^2$$

y sus curvas características son

$$x = \pm \frac{t^3}{3}\cdot$$

Así el cambio de coordenadas es

$$r = x + \frac{t^3}{3} \quad s = x - \frac{t^3}{3}\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{lllll} r_x = 1\,; & r_t = t^2\,; & r_{xx} = 0\,; & r_{xt} = 0\,; & r_{tt} = 2t \\ s_x = 1\,; & s_t = -t^2\,; & s_{xx} = 0\,; & s_{xt} = 0\,; & s_{tt} = -2t \end{array}$$

y

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \cdot r_x + u_s \cdot s_x = u_r \cdot 1 + u_s \cdot 1 = u_r + u_s\,, \\ u_{xx} &= (u_{rr} + u_{rs}) \cdot r_x + (u_{rs} + u_{ss}) \cdot s_x = u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}\,, \\ u_t &= u_r \cdot r_t + u_s \cdot s_t = u_r \cdot t^2 + u_s \cdot (-t^2) = t^2(u_r - u_s)\,, \\ u_{tt} &= 2t(u_r - u_s) + t^4(u_{rr} - u_{rs}) - t^4(u_{rs} - u_{ss})\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$-4t^4 u_{rs} = 0\,,$$

y como $t > 0$, la forma canónica es

$$u_{rs} = 0\,.$$

b) En las coordenadas r, s, la solución general es

$$u(r, s) = p(r) + q(s)\,,$$

con p, q funciones dos veces derivables cualquieras.

Por lo tanto, en las coordenadas x, t la solución general es

$$u(x, t) = p(x + \frac{t^3}{3}) + q(x - \frac{t^3}{3})\,,$$

con p, q funciones dos veces derivables cualquieras.

c) La condición $u(0,t) = \frac{t^6}{9}$, implica

$$p(\frac{t^3}{3}) + q(-\frac{t^3}{3}) = \frac{t^6}{9},$$

y la condición $u_x(0,t) = 1$, implica

$$p'(\frac{t^3}{3}) + q'(-\frac{t^3}{3}) = 1,$$

o bién, multiplicando por t^2

$$t^2 p'(\frac{t^3}{3}) + t^2 q'(-\frac{t^3}{3}) = t^2.$$

Integrando esta última ecuación con respecto a t obtenemos

$$p(\frac{t^3}{3}) - q(-\frac{t^3}{3}) = \frac{t^3}{3} + c.$$

Entonces poniendo $v = \frac{t^3}{3}$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} p(v) + q(-v) = v^2 \\ p(v) - q(-v) = v + c \end{cases}$$

cuya solución es

$$p(v) = \frac{1}{2}\left[v^2 + v + c\right], \quad q(-v) = \frac{1}{2}\left[v^2 - v - c\right].$$

Por lo tanto, tenemos

$$p(v) = \frac{1}{2}\left[v^2 + v + c\right], \quad \text{y} \quad q(v) = \frac{1}{2}\left[v^2 + v - c\right],$$

lo que implica que nuestra solución es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= p(x + \frac{t^3}{3}) + q(x - \frac{t^3}{3}) \\ &= \frac{1}{2}\left[(x + \frac{t^3}{3})^2 + x + \frac{t^3}{3} + c\right] + \\ &\quad \frac{1}{2}\left[(x - \frac{t^3}{3})^2 + x - \frac{t^3}{3} - c\right] \\ &= x + \frac{1}{2}\left[(x + \frac{t^3}{3})^2 + (x - \frac{t^3}{3})^2\right]. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.5.5 Reduzca a su forma canónica la ecuación

$$xu_{xx} - 2x^3 u_{yy} - u_x \;=\; 0 \quad x > 0,$$

y encuentre la solución que satisface las condiciones iniciales

$$u(x,0) \;=\; (x^2+1)^2\,, \quad u_y(x,0) \;=\; \frac{4}{\sqrt{2}}x^2\,.$$

Solución. Tenemos

$$A = x\,, \quad B = 0\,, \quad C = -2x^3 \quad \Longrightarrow \quad B^2 - 4AC = 8x^4\,,$$

y la ecuación es hiperbólica.
Ecuaciones características :

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \pm\frac{2\sqrt{2}x^2}{2x} \;=\; \pm\sqrt{2}x\,.$$

Curvas características :

$$y(x) = c + \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x^2\,.$$

Cambio de coordenadas :

$$r \;=\; y + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2\,, \quad s \;=\; y - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2\,.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} u_x &= \sqrt{2}x(u_r - u_s) \\ u_y &= u_r + u_s \\ u_{xx} &= \sqrt{2}(u_r - u_s) + 2x^2(u_{rr} - 2u_{rs} + u_{yy}) \\ u_{yy} &= u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}\,, \end{aligned}$$

y reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\sqrt{2}x(u_r - u_s) + 2x^3(u_{rr} - 2u_{rs} + u_{yy}) - 2x^3(u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}) - \sqrt{2}x(u_r - u_s) \;=\; 0\,.$$

Esta se reduce a

$$-8x^3 u_{rs} \;=\; 0\,,$$

y luego su forma canónica es

$$u_{rs} \;=\; 0\,.$$

La solución general en la coordenadas r, s es entonces

$$u(r,s) \;=\; p(r) \;+\; q(s)\,,$$

con p, q funciones 2 veces derivables cualquiera.

Así nuestra solución general es

$$u(x,y) \;=\; p(y+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)+q(y-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)\,,$$

con p, q funciones 2 veces derivables cualquiera.

Debemos tener

$$u(x,0) \;=\; p(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)+q(-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2) \;=\; (x^2+1)^2\,,$$

y

$$u_y(x,0) \;=\; p'(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)+q'(-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2) \;=\; \frac{4}{\sqrt{2}}\,x^2\,.$$

Multiplicando esta última ecuación por $\sqrt{2}\,x$ obtenemos

$$\sqrt{2}\,xp'(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)+\sqrt{2}\,xq'(-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2) \;=\; 4x^3$$

e integrando

$$p(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)-q(-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2) \;=\; x^4\,.$$

Tenemos entonces el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} p(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)+q(-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2) & = & (x^2+1)^2 \\ \\ p(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)-q(-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2) & = & x^4 \end{array}\right. ,$$

cuya solución es

$$p(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2) \;=\; \frac{1}{2}[(x^2+1)^2+x^4]\,,\quad q(\frac{-\sqrt{2}}{2}x^2) \;=\; \frac{1}{2}[(x^2+1)^2-x^4]\,.$$

Por lo tanto si hacemos $u \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$, tenemos

$$p(u) \;=\; \frac{1}{2}[(\sqrt{2}\,u+1)^2+2u^2]\,,\quad q(u)=\frac{1}{2}[(\sqrt{2}\,u-1)^2-2u^2]\,.$$

Luego nuestra solución es

$$\begin{aligned} u(x,y) \;=\; & \Bigg[[\sqrt{2}(y+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)+1]^2+2(y+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)^2+ \\ & [\sqrt{2}(y-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)-1]^2-2(y-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2)^2\Bigg]\,, \end{aligned}$$

que se reduce a

$$u(x,y) \;=\; 1 + 2x^2 + 2(y + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2)^2 \,.$$

Ejercicio 8.5.6 Reduzca a su forma canónica la ecuación

$$u_{xx} \;-\; 6\, u_{xy} \;+\; \frac{11}{4}\, u_{yy} \;+\; x \;=\; 0\,.$$

Encuentre además su solución general y la solución particular que verifica

$$u(0,y) \;=\; \sin(y)\,, \quad u(x,0) \;=\; \frac{11}{200}\, x^3 \;+\; \sin\left(\frac{11}{2}x\right)\,.$$

Solución. Tenemos

$$A \;=\; 1\,, \quad B \;=\; -6\,, \quad C \;=\; \frac{11}{4} \quad \Longrightarrow \quad B^2 \;-\; 4AC \;=\; 36 \;-\; 11 \;=\; 25\,,$$

y por lo tanto la ecuación es hiperbólica.

Las ecuaciones características son

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{11}{2}\,,$$

y las curvas características son

$$y \;=\; -\frac{1}{2}\, x \;+\; c_1 \qquad \text{y} \qquad y \;=\; -\frac{11}{2}\, x \;+\; c_2\,.$$

Luego nuestro cambio de coordenadas es

$$r \;=\; y \;+\; \frac{1}{2}\, x\,, \quad s \;=\; y \;+\; \frac{11}{2}\, x\,.$$

Como

$$\begin{aligned} r_x \;&=\; \tfrac{1}{2}\,, \qquad r_y \;=\; 1 \\ s_x \;&=\; \tfrac{11}{2}\,, \qquad s_y \;=\; 1 \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} u_x \;&=\; u_r\, r_x \;+\; u_s\, s_x \;=\; \frac{1}{2}(u_r \;+\; 11u_s) \\ u_y \;&=\; u_r\, r_y \;+\; u_s\, s_y \;=\; u_r \;+\; u_s \\ u_{xx} \;&=\; \frac{1}{4}(u_{rr} \;+\; 22u_{rs} \;+\; 121u_{ss}) \\ u_{xy} \;&=\; \frac{1}{2}(u_{rr} \;+\; 12u_{rs} \;+\; 11u_{ss}) \\ u_{yy} \;&=\; u_{rr} \;+\; 2u_{rs} \;+\; u_{ss}\,. \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos

$$-25u_{rs} \; + \; \frac{1}{5}\,(s \; - \; r) \; = \; 0\,.$$

Luego nuestra forma canónica es

$$u_{rs} \; = \; \frac{1}{125}\,(s \; - \; r)\,.$$

Integrando con respecto a s obtenemos

$$u_r \; = \; \frac{1}{125}\left(\frac{s^2}{2} \; - \; rs\right) \; + \; h(r)\,,$$

e integrando a continuación con respecto a r

$$u(r,s) \; = \; \frac{1}{125}\left(\frac{s^2 r}{2} \; - \; \frac{r^2 s}{2}\right) \; + \; \int h(r)dr \; + \; G(s)\,.$$

Luego nuestra solución general en las coordenadas r, s es

$$u(r,s) \; = \; \frac{1}{250}\,rs(s \; - \; r) \; + \; H(r) \; + \; G(s)\,,$$

y en las coordenadas x, y

$$u(x,y) \; = \; \frac{1}{50}x\left(y \; + \; \frac{1}{2}\,x\right)\left(y \; + \; \frac{11}{2}\,x\right) \; + \; H\left(y \; + \; \frac{1}{2}\,x\right) \; + \; G\left(y \; + \; \frac{11}{2}\,x\right)\,,$$

donde H, G son funciones derivables arbitrarias. La condición

$$u(0,y) \; = \; \sin(y) \quad \Longrightarrow \quad H(y) \; + \; G(y) \; = \; \sin(y)\,,$$

y

$$u(x,0) \; = \; \frac{11}{200}\,x^3 \; + \; \sin\left(\frac{11}{2}x\right) \quad \Longrightarrow \quad H\left(\frac{1}{2}x\right) \; + \; G\left(\frac{11}{2}x\right) \; = \; \sin\left(\frac{11}{2}x\right)\,.$$

Por lo tanto

$$G(x) \; = \; \sin(x)\,, \quad \text{y} \quad H(x) \; = \; 0\,,$$

y la solución particular es

$$u(x,y) \; = \; \frac{1}{50}\,x\left(y \; + \; \frac{1}{2}\,x\right)\left(y \; + \; \frac{11}{2}\,x\right) \; + \; \sin\left(y \; + \; \frac{11}{2}\,x\right)\,.$$

Ejercicio 8.5.7 Reduzca a su forma canónica la ecuación

$$u_{xx} \; + \; 2xe^{-x}u_{xy} \; + \; x^2e^{-2x}u_{yy} \; = \; (x-1)e^{-x}u_y\,.$$

Encuentre además su solución general y la solución particular que verifica

$$u(0,y) \; = \; 2y \; + \; 2\,, \quad u_x(0,y) \; = \; y \; + \; 1\,.$$

Solución. Tenemos

$$A = 1\,, \quad B = 2xe^{-x}\,, \quad C = x^2e^{-2x} \quad \Longrightarrow \quad B^2 - 4AC = 0\,,$$

y luego la ecuación es parabólica.

La ecuación característica es

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-x}\,,$$

y la curva característica es

$$y = -(1 + x)e^{-x} + c\,.$$

Consideramos el cambio de coordenadas

$$r = y + (1 + x)e^{-x}\,, \quad s = x\,.$$

Entonces

$$\begin{array}{ll} r_x = -xe^{-x} & r_y = 1 \\ s_x = 1 & s_y = 0\,. \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} u_x &= -xe^{-x}u_r + u_s \\ u_y &= u_r \\ u_{xx} &= (x-1)e^{-x}u_r + x^2e^{-2x}u_{rr} - 2xe^{-x}u_{rs} + u_{ss} \\ u_{xy} &= -xe^{-x}u_{rr} + u_{rs} \\ u_{yy} &= u_{rr}\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos la forma canónica

$$u_{ss} = 0\,.$$

De esta forma la solución general en las coordenadas r, s es

$$u(r,s) = sf(r) + g(r)\,,$$

y en las coordenadas x, y es

$$u(x,y) = xf\left(y + (1 + x)e^{-x}\right) + g\left(y + (1 + x)e^{-x}\right)\,,$$

donde f, g son funciones dos veces derivables arbitrarias. Finalmente imponiendo las condiciones obtenemos

$$\begin{aligned} 2y + 2 &= u(0,y) = g(y + 1) \\ y + 1 &= u_x(0,y) = f(y + 1)\,. \end{aligned}$$

Esto implica

$$g(y) = 2y\,, \quad f(y) = y\,,$$

Luego nuestra solución particular es

$$u(x,y) = (x + 2)\left(y + (1 + x)e^{-x}\right)\,.$$

Capítulo 9

Ecuación de ondas unidimensional

9.1 Deducción de la ecuación de ondas

Suponemos que una cuerda flexible se tensa entre dos puntos del eje x, digamos $x = 0$ y $x = l$. La cuerda se deforma a una cierta curva $u = f(x)$ en el plano xu y luego se suelta.

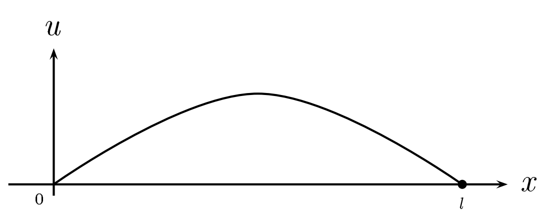


Figura 39

Problema: Determinar la curva $u(x,t)$ en que se deforma la cuerda en un instante t posterior.

Hipótesis Adicionales:

- La vibración subsiguiente es transversal; es decir cada punto de la cuerda tiene coordenada x constante; de modo que su coordenada u depende solo de x y del tiempo. De esta forma el desplazamiento de la cuerda a partir de su posición de equilibrio viene dado por cierta función $u = u(x,t)$ y sus derivadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad : \quad \text{velocidad de la cuerda}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad : \quad \text{aceleración de la cuerda}$$

Consideremos el movimiento de un pequeño fragmento de cuerda de longitud $\triangle x$. Si la densidad de masa lineal es $m = m(x)$, la masa de este fragmento es $m \triangle x$, y la segunda Ley de Newton dice que la fuerza transversal F que actúa sobre él es

$$F \;=\; m \triangle x\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\cdot \tag{9.1}$$

Como la cuerda es flexible, la tensión $T = T(x)$ en cualquier punto está dirigida a lo largo de la tangente y tiene componente igual a $T \operatorname{sen}(\theta)$.

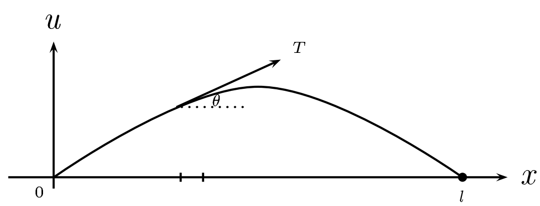


Figura 40

- Suponemos que el movimiento de la cuerda se debe solo a la tensión. Luego F es la diferencia entre los valores de $T \operatorname{sen}(\theta)$ en los extremos del fragmento, es decir, $F = \triangle(T \operatorname{sen}(\theta))$. As (9.1) queda de la forma:

$$\triangle(T \operatorname{sen}(\theta)) \;=\; m\,\triangle x\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\cdot \tag{9.2}$$

Si las vibraciones son relativamente pequeñas, de modo que θ es pequeño, $\operatorname{sen}(\theta)$ es aproximadamente igual a $\tan(\theta) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Reemplazando esto en (9.2) obtenemos:

$$\frac{\triangle(T\dfrac{\partial u}{\partial x})}{\triangle x} \;=\; m\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9.3}$$

y haciendo $\triangle x \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \;=\; m\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\cdot \tag{9.4}$$

- Asumimos que m y T son constantes, obteniéndose

$$c^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad c \;=\; \sqrt{\frac{T}{m}}$$

que es la ecuación de ondas unidimensional.

Buscamos una solución $u(x,t)$ que satisfaga las condiciones de frontera

$$u(0,t) \;=\; 0\,, \quad u(l,t) \;=\; 0 \qquad \text{(extremos fijos)}$$

y las condiciones iniciales

$$u(x,0) \;=\; f(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \;=\; g(x)\,.$$

Observe que si $g(x) \equiv 0$, entonces la cuerda está en reposo al momento de soltarla y su forma viene dada por el gráfico de la función $y \;=\; f(x)$.

De esta forma nuestro problema es:

$$\begin{cases} u_{tt} \;=\; c^2\, u_{xx} & 0 \leq x \leq l & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) \;=\; f(x) & u_t(x,0) \;=\; g(x) & 0 \leq x \leq l \\ u(0,t) \;=\; u(l,t) \;=\; 0 & & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{9.5}$$

9.2 Fórmula de d'Alembert

Proposición 9.2.1 Sean $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas por partes y dos veces derivables. Entonces cualquier función de la forma

$$u(x,t) \;=\; \alpha[F(x+ct) \;+\; F(x-ct)] \;+\; \frac{\beta}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau$$

verifica la ecuación

$$u_{tt} \;=\; c^2\, u_{xx}\,.$$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha[F'(x+ct)\cdot c - F'(x-ct)\cdot c] + \frac{\beta}{c}[G(x+ct)\cdot c + G(x-ct)\cdot c] \\ u_{tt} &= \alpha c^2[F''(x+ct) + F''(x-ct)] + \beta c^2\frac{1}{c}[G'(x+ct) - G'(x-ct)] \\ u_x &= \alpha[F'(x+ct) + F'(x-ct)] + \frac{\beta}{c}[G(x+ct) - G(x-ct)] \\ u_{xx} &= \alpha[F''(x+ct) + F''(x-ct)] + \frac{\beta}{c}[G'(x+ct) - G'(x-ct)] \\ \therefore & \quad u_{tt} = c^2 u_{xx} \end{aligned}$$

Proposición 9.2.2 Sean $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas por partes y dos veces derivables. Entonces cualquier función de la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F(x+ct) + F(x-ct] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau$$

con $F(x) = f(x)$ *y* $G(x) = g(x)$, *para* $0 \le x \le l$ verifica

$$\begin{cases} u_{tt} & = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) & = f(x)\,,\ u_t(x,0) = g(x) \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Demostración. En efecto, para $0 \le x \le l$, se tiene

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{2}[F(x) + F(x)] + 0 = F(x) = f(x)\,. \\ u_t(x,0) &= \frac{1}{2}[F'(x+ct)\cdot c - F'(x-ct)\cdot c]/_{t=0} + \\ & \frac{1}{2c}[G(x+ct)\cdot c + G(x-ct)\cdot c]/_{t=0} \\ &= 0 + \frac{1}{2}[G(x) + G(x)] = G(x) = g(x)\,. \end{aligned}$$

9.2.1 Funciones pares, impares y periódicas

Recordemos que una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **impar** (resp. **par**) si $F(-x) = -F(x)$ (resp. $F(-x) = F(x)$) para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por otra parte $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **periódica** de periodo T, si T es el menor número positivo que verifica $F(x+T) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observaciones 9.2.3 Los siguientes resultados son inmediatos.

1. Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable, entonces que F sea impar (resp. par) implica que F' es par (resp. impar).

2. Para definir una función periódica de periodo $2T$, digamos F, basta definirla en el intervalo $[-T, T]$ y especificar que verifica $F(x+2T) = F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Suponga que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de periodo $2T$. Entonces

$$\begin{aligned} F(-x) &= -F(x) \quad \forall\, x \in [-T, T] \implies F \quad \text{es impar}\,, \\ F(-x) &= F(x) \quad \forall\, x \in [-T, T] \implies F \quad \text{es par}\,. \end{aligned}$$

Definición 9.2.4 *Una función* $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *se dice impar (resp. par) en* k *si la función trasladada en* k

$$\widetilde{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad \widetilde{F}(x)=F(x+k)\,,$$

es impar (resp. par)

Luego $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es impar (resp. par) en k si

$$F(-x+k)=-F(x+k) \quad (\text{resp. } F(-x+k)=F(x+k)) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Observación 9.2.5 Si F es impar (resp. par) y periódica de periodo $2l$, entonces F también es impar (resp. par) en l.

En efecto, en el caso impar

$$F(-x+l) \;=\; F(-x+l-2l) \;=\; F(-x-l) \;=\; -F(x+l)\,,$$

y en el caso par

$$F(-x+l) \;=\; F(-x+l-2l) \;=\; F(-x-l) \;=\; F(x+l)\,.$$

9.2.2 Problema de ondas homogéneo con extremos fijos

Consideremos el problema (9.5). Teniendo en cuenta las proposiciones (9.2.1) y (9.2.2), debemos considerar funciones $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuas por partes y dos veces diferenciables, que verifiquen $F(x)=f(x)$ y $G(x)=g(x)$ para todo $0\le x\le l$. El siguiente paso es imponer condiciones adicionales a estas funciones de modo que si

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}[F(x+ct) \;+\; F(x-ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau\,,$$

también se verifiquen las condiciones de frontera $u(0,t)=u(l,t)=0$ para todo $t>0$.

Afirmación. Esta condiciones se verifican si F y G son funciones impares y periódicas de periodo $2l$.

En efecto, en este caso

$$u(0,t) \;=\; \frac{1}{2}[F(ct) \;+\; F(-ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} G(\tau)d\tau \;=\; 0\,,$$

y

$$\begin{aligned} u(l,t) \;&=\; \frac{1}{2}[F(l+ct) \;+\; F(l-ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{l-ct}^{l+ct} G(\tau)d\tau \\ &=\; \frac{1}{2}[F(l+ct) \;+\; F(-l-ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} G(s+l)ds \;=\; 0\,, \end{aligned}$$

ya que la función $h(s)=G(s+l)$ también es impar $(h(-s)=G(-s+l)=G(-s-l)=-G(s+l)=-h(s))$.

Definición 9.2.6 *Dada* $h : [0, l] \to \mathbb{R}$ *continua por partes, se llama* **extensión impar de periodo** $2l$, *de* h, *a la función periódica de periodo* $2l$ $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$h_i(x) = \begin{cases} h(x) & si \quad 0 < x < l \\ \\ 0 & si \quad x = 0 \\ \\ -h(-x) & si \quad -l < x < 0 \end{cases}$$

y

$$h_i(x + 2l) \;=\; h_i(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

De esta forma la función

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f_i(x+ct) \;+\; f_i(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_i(\tau)d\tau$$

es solución del problema de ondas homogéneo con fronteras fijas

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 \le x \le lt \in \mathbb{R}^+ & \\ \\ u(x,0) = f(x) & u_t(x,0) = g(x) & 0 \le x \le l \\ \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & & t > 0\,. \end{cases}$$

donde f_i y g_i son las extensiones impares de periodo $2l$ de f y g respectivamente.

Ejemplo 9.2.7 Considere una cuerda de longitud π, fija por sus extremos, que parte del resposo con un perfil inicial dado por la función $f(x) = x^2$. Obtener la forma de la cuerda en el instante t.

Nuestra ecuación es

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}\,, & 0 \le x \le \pi\,, & t \in \mathbb{R}^+\,, \\ u(x,0) = x\,(x-\pi)\,, & u_t(x,0) = 0\,, & 0 \le x \le \pi\,, \\ u(0,t) = 0\,, & u(\pi,t) = 0\,, & t \in \mathbb{R}^+\,, \end{cases}$$

Entonces

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f_i(x+ct) \;+\; f_i(x-ct)\right]$$

donde $f_i(x)$ es la extensión impar de período 2π de $f(x) = x^2$. Es decir

$$f_i(x) \;=\; \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \\ x^2 & \text{si} \quad 0 < x \le \pi\,, \end{cases}$$

y

$$f_i(x+2\pi) \;=\; f_i(x)\,.$$

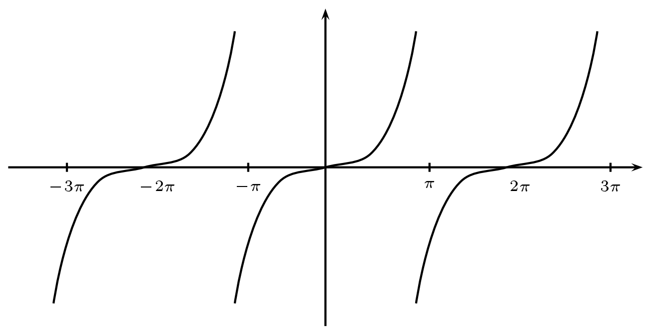


Figura 41

Por ejemplo si $c=1$

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{3\pi}{2},\frac{17\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2}\left[f_i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{17\pi}{3}\right)+f_i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{17\pi}{3}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[f_i\left(\frac{43\pi}{6}\right)+f_i\left(\frac{-25\pi}{6}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[f_i\left(-\pi+\frac{1}{6}\pi\right)+f_i\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[-\left(-\frac{5\pi}{6}\right)^2-\left(\frac{\pi}{36}\right)^2\right] \;=\; -\frac{13\pi^2}{36}\,.
\end{aligned}$$

9.2.3 Problema de ondas homogéneo con extremos libres

Corresponde a la ecuación

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2u_{xx}\,, \quad 0<x<l\,, \quad t\in\mathbb{R}^+ && (9.6)\\
u(x,0) &= f(x)\,, \quad u_t(x,0)=g(x)\,, \quad 0<x<l && (9.7)\\
u_x(0,t) &= u_x(l,t)=0 \qquad t\in\mathbb{R}^+ && (9.8)
\end{aligned}$$

Como sabemos cualquier función de la forma

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[F(x+ct) \;+\; F(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau$$

con

$$F(x) \;=\; f(x)\,, \qquad G(x) \;=\; g(x)\,, \quad \forall\; 0<x<l$$

es solución de la ecuación (9.6) y verifica las condiciones iniciales (9.7).

Observe que como

$$u_x(0,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[F'(ct) \;+\; F'(-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\left[G(ct) \;-\; G(-ct)\right]\;,$$

si F' es impar y G es par, obtenemos $u_x(0,t)=0$.

Por otra parte como

$$u_x(l,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[F'(l+ct) \;+\; F'(l-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\left[G(l+ct) \;-\; G(l-ct)\right]\,,$$

obtenemos $u_x(l,t)=0$, si además F' y G son periódicas de periodo $2l$.

Luego necesitamos $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$F/[0,l]=f\;,\quad G/[0,l]=g\;,$$

que las funciones $F/[-l,l]$ y $G/[-l,l]$ sean pares, y que

$$F(x+2l) \;=\; F(x)\,, \quad G(x+2l) \;=\; G(x)\,, \quad \forall\; x\in\mathbb{R}.$$

Definición 9.2.8 *Dada* $h:[0,l]\to\mathbb{R}$ *continua por partes, se llama* **extensión par de periodo** $2l$, *de* h, *a la función periódica de periodo* $2l$ $h_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por:*

$$h_i(x) = \begin{cases} h(x) & si \quad 0<x<l \\ \\ h(-x) & si \quad -l<x<0 \end{cases}$$

y

$$h_i(x+2l) \;=\; h_i(x) \quad \forall\; x\in\mathbb{R}\,.$$

De esta forma F y G deben ser las extensiones pares de periodo $2l$ de f y g respectivamente.

Así la solución de (9.6) que verifica las condiciones iniciales (9.7) y las condiciones de frontera (9.8) es

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f_p(x+ct) \;+\; f_p(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_p(t)dt\,,$$

donde f_p y g_p son las extensiones pares de periodo $2l$ de f y g respectivamente.

9.2.4 Problema de ondas homogéneo con extremos semi-libres

Corresponde a la ecuación

$$\begin{array}{lll} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x) & u_t(x,0) = g(x) & 0 < x < l \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ & \end{array}$$

Consideramos como antes una función del tipo

$$u(x,t) \ = \ \frac{1}{2}\left[F(x+ct) \ + \ (x-ct)\right] \ + \ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(t)dt \ ,$$

con $F(x) = f(x)$ y $G(x) = g(x)$, para todo $0 \le x \le l$.

Examinemos primero las condiciones iniciales. Debemos tener

$$u(0,t) \ = \ \frac{1}{2}\left[F(ct) \ + \ F(-ct)\right] \ + \ \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} G(t)dt \ = \ 0\,.$$

Para que esto se cumpla es suficiente que las funciones F y G sean impares. También

$$u_x(l,t) \ = \ \frac{1}{2}\left[F'(l+ct) \ + \ F'(l-ct)\right] \ + \ \frac{1}{2}\left[G(l+ct) \ - \ G(l-ct)\right] \ = \ 0\,.$$

Observe que esto se verifica si $F'(l-ct) = -F'(l+ct)$ y $G(l-ct) = G(l+ct)$. Esto se logra si F' es impar en l y G es par en l.

Luego debemos pedir que F y G sean impares (en cero) y que sean pares en l.

Definición 9.2.9 *Dada* $h : [0,l] \to \mathbb{R}$ *continua por partes, se llama* **extensión impar en** 0 **y par en** l **de periodo** $4l$ *de* h, *a la función periódica de periodo* $4l$ $h_{ip} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$h_{ip}(x) = \begin{cases} h(2l-x) & \quad l \le x \le 2l \\ h(x) & si \quad 0 < x \le l \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -h(-x) & si \quad -l < x < 0 \\ -h(2l+x) & \quad -2l \le x \le -l \end{cases}$$

y

$$h_{ip}(x+4l) \ = \ h_{ip}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Afirmación 1. h_{ip} es impar.
Demostración. Claramente la función h_{ip} es impar en $[-l, l]$.
Sea $x \in$ [l, 2l]. Entonces $-x \in$ [-2l, -l] y

$$h_{ip}(-x) \;=\; -h(2l - x) \;=\; -h_{ip}(x)\,.$$

Similarmente si $x \in$ [-2l, -l], tenemos $-x \in$ [l, 2l], y

$$h_{ip}(-x) \;=\; h(2l + x) \;=\; -h_{ip}(x)\,.$$

Afirmación 2. h_{ip} es par en l.
Demostración. Tenemos que demostrar que $h_{ip}(-x + l) \;=\; h_{ip}(x + l)$.
Si $x \in$ [0, l], entonces $-x + l \in$ [0, l] y $x + l \in$ [l, 2 l]. Luego

$$h_{ip}(-x + l) \;=\; h(-x + l)\,, \quad \text{y} \qquad h_{ip}(x + l) \;=\; h(2l - x - l) \;=\; h(l - x)\;.$$

Por lo tanto $h_{ip}(-x + l) \;=\; h_{ip}(x + l)$ para $0 \leq x \leq l$.
Si $x \in$ [-l, 0], entonces $-x + l \in$ [l, 2l] y $x + l \in$ [0, l]. Luego

$$h_{ip}(-x + l) \;=\; h(2l - (-x + l)) \;=\; h(l + x)\,, \quad \text{y} \qquad h_{ip}(x + l) \;=\; h(x + l)\,.$$

Así $h_{ip}(-x + l) \;=\; h_{ip}(x + l)$ para $-l \leq x \leq 0$.
Para $x \in$ [l, 2l], tenemos $-x + l \in$ [-l, 0] y $x - 3l \in$ [-2 l, -l]. Entonces

$$h_{ip}(-x + l) \;=\; -h(x - l)\,, \quad \text{y}$$

$$h_{ip}(x + l) \;=\; h_{ip}(x + l - 4l) \;=\; h_{ip}(x - 3l) \;=\; -h(2l + x - 3l) \;=\; h(x - l)\;.$$

Luego $h_{ip}(-x + l) \;=\; h_{ip}(x + l)$ para $l \leq x \leq 2l$.
Finalmente si $x \in$ [-2 l, -l], entonces $-x - 3l \in$ [-2 l, -l] y $x + l \in$ [-l, 0]. Por lo tanto

$$h_{ip}(-x+l) \;=\; h_{ip}(-x+l-4l) \;=\; h_{ip}(-x-3l) \;=\; -h(2l+(-x-3l)) \;=\; -h(-x-l)$$

$$\text{y} \qquad h_{ip}(x + l) \;=\; -h(-x - l)\;.$$

De esta forma también $h_{ip}(-x + l) \;=\; h_{ip}(x + l)$ para $-2l \leq x \leq -l$.
Luego F y G deben ser las extensiones impares en 0 y pares en l de periodo $4l$ de f y g respectivamente.
Así la solución del problema de ondas homogéneo con frontera semi-libre es

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\,[f_{ip}(x + ct) \;+\; f_{ip}(x - ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_{ip}(\tau)d\tau\,,$$

donde f_{ip} y g_{ip} son las extensiones impares en 0 y pares en l de periodo $4l$ de f y g respectivamente.

Ejemplo 9.2.10 Encuentre la solución del problema de ondas

$$
\begin{array}{ll}
u_{tt} \;=\; c^2 u_{xx}\,, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\,, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\
u(x,0) \;=\; sen(x)\,, \quad u_t(x,0) = 1\,, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\
u_x(0,t) = u(\dfrac{\pi}{2},t) = 0\,, & t > 0\,.
\end{array}
$$

Tenemos

$$f(x) \;=\; \operatorname{sen}(x)\,, \qquad g(x) \;=\; 1\,,$$

y por lo tanto, la solución es

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f_{pi}(x+ct) \;+\; f_{pi}(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_{pi}(\tau)d\tau\,,$$

donde f_{pi} y g_{pi}, son las extensiones pares en 0 e impares en $\dfrac{\pi}{2}$ de período 2π de las funciones $\operatorname{sen}(x)/[0, \dfrac{\pi}{2}]$ y $1/[0, \dfrac{\pi}{2}]$, respectivamente.

Observación 9.2.11 En el caso de fronteras fijas:

$$
\begin{array}{ll}
u_{tt} \;=\; c^2 u_{xx}\,, & 0 \le x \le l\,, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\
u(x,0) \;=\; f(x)\,, \quad u_t(x,0) = g(x)\,, & 0 < x < l \\
u(0,t) = u(l,t) = 0\,, & t > 0\,,
\end{array}
$$

encontramos la solución

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f_i(x+ct) \;+\; f_i(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_i(\tau)d\tau\,,$$

donde f_i, g_i son las extensiones impares de periodo $2l$ de f y g, respectivamente.

Los desarrollos en serie de Fourier de f_i y g_i son:

$$
\begin{array}{llll}
f_i(x) \sim & \displaystyle\sum_{u=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) & \text{con} & b_n = \displaystyle\frac{2}{l}\int_0^l f(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right)ds \\
g_i(x) \sim & \displaystyle\sum_{u=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) & \text{con} & B_n = \displaystyle\frac{2}{l}\int_0^l g(s)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right)ds\,.
\end{array}
$$

Reemplazando las funciones f_i y g_i, por sus respectivas series de Fourier tenemos

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) + \text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\right] + \\
&\quad +\frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{x-ct}^{x+ct} \text{sen}\left(\frac{n\pi\tau}{l}\right) d\tau \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \\
&\quad \frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{l}^{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \\
&\quad \frac{l}{cn\pi}\sum_{n=1}^{\infty} B_n\, \text{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + \tilde{B}_n\, sen\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{l}x\right).
$$

Cada término de esta serie puede considerarse como una onda estacionaria. Por ejemplo:

Para $n=1$, $\left[b_1 \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + \tilde{B}_1\text{sen}\left(\frac{\pi c}{l}t\right)\right]\text{sen}\left(\frac{\pi}{l}x\right)$

es una onda senoidal (sen $\left(\frac{\pi}{l}x\right)$) multiplicada por una amplitud que varia con el tiempo.

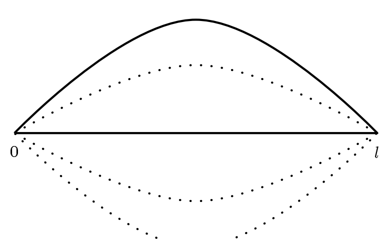


Figura 42

Para $n=2$, tenemos una onda senoidal sen $\left(\frac{2\pi}{l}x\right)$ por una amplitud que varia con el tiempo. Aquí existe un nodo en $x = \dfrac{l}{2}$ que nunca se mueve.

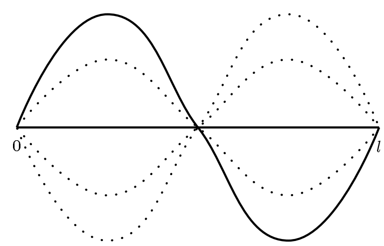


Figura 43

Para $n = 3$, tenemos dos nodos y la figura

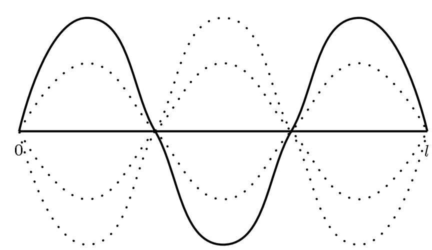


Figura 44

En general el n-ésimo término es una onda senoidal sen $\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)$ por una amplitud que varia con el tiempo, con $n-1$ nodos.

Así la solución $u(x,t)$ puede interpretarse como la superposición de infinidad de ondas estacionarias.

También existen ondas viajeras asociadas con la ecuación de ondas. Estas surgen en forma natural de la solución de d'Almbert de la ecuación de onda para una *cuerda infinita*.

Problema: Resolver:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x) & u_t(x,0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Claramente la solución de d'Ambert es

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}\left[f(x+ct) \;-\; f(x-ct)\right] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \quad g(\tau)d\tau \,.$$

Por ejemplo, supongamos que

$$g(x) \equiv 0\,, \quad \text{y que} \quad f(x) \;=\; \begin{cases} x+1 & -1 \le x \le 0 \\ -x+1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & |x| \ge 1\,. \end{cases}$$

Entonces $u(x,t)$ es la suma de las ondas viajeras

$$\frac{1}{2}f(x+ct) \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \frac{1}{2}f(x-ct)$$

Para $t=0$ están superpuestas

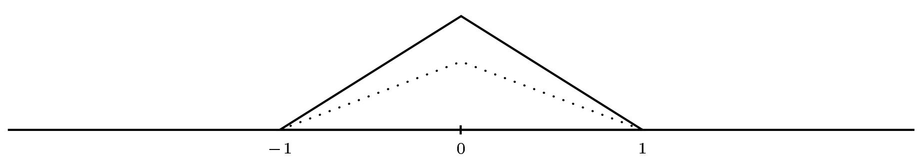


Figura 45

Cuando t aumenta, las dos ondas se separan entre si con velocidad $2c$. Las Figuras 46 y 47 corresponden a los casos $t = \frac{1}{c}$ y $t = \frac{2}{c}$, respectivamente.

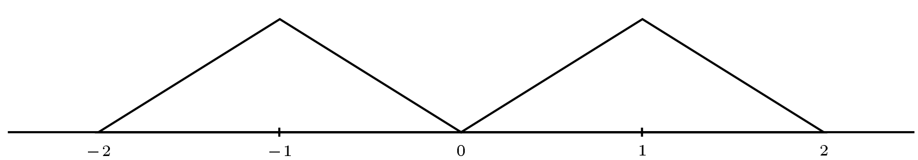


Figura 46

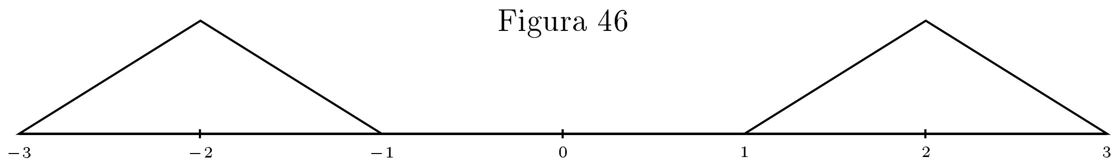


Figura 47

9.3 Ejercicios resueltos

Ejercicio 9.3.1 Una cuerda tensa de guitarra de longitud 4 está fija en sus extremos. Con los dedos la desplazamos una pequeña distancia 0.3 en el punto $x = 3$, la soltamos con velocidad $g(x) = 2x$ y la cuerda comienza a vibrar. Encuentre el desplazamiento vertical $u(x,t)$ de cualquier punto x para cualquier instante t. También calcule $u(5, \frac{1}{4})$ para $c = 2$.

Solución. La correspondiente ecuación de ondas es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 4\,, \quad t > 0 \\
u(0,t) &= u(4,t) \;=\; 0\,, \quad t > 0 \\
u(x,0) &= f(x) \;=\; \begin{cases} 0.1x & 0 \le x \le 3 \\ -0.3x + 1.2 & 3 \le x \le 4 \end{cases} \\
u_t(x,0) &= g(x) \;=\; 2x\,, \quad 0 < x < 4
\end{aligned}$$

La solución es

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}[F(x+ct) + F(x-ct)] \;+\; \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau\,,$$

donde F, G son las extenciones impares de periodo 8 de las funciones f, g respectivamente.

Luego

$$F(x) \;=\; \begin{cases} -0.3x - 1.2 & -4 \le x \le -3 \\ 0.1x & -3 \le x \le 3 \\ -0.3x + 1.2 & 3 \le x \le 4 \end{cases} \qquad F(x+8) \;=\; F(x)\,,$$

y

$$G(x) \;=\; 2x\,, \quad -4 \le x \le 4\,, \qquad G(x+8) \;=\; G(x)\,.$$

Ahora si $c = 2$

$$\begin{aligned}
u(5, \frac{1}{4}) &= \frac{1}{2}[F(5+\frac{1}{2}) + F(5-\frac{1}{2})] \;+\; \frac{1}{4}\int_{5-\frac{1}{2}}^{5+\frac{1}{2}} G(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2}[F(-3+\frac{1}{2}) + F(-3-\frac{1}{2})] \;+\; \frac{1}{4}\int_{-3-\frac{1}{2}}^{3+\frac{1}{2}} 2\tau d\tau \\
&= \frac{1}{2}[0.1\cdot(-3+\frac{1}{2}) - 0.3\cdot(-3-\frac{1}{2}) - 1.2] \;+\; \frac{1}{4}[(3-\frac{1}{2})^2 - (3+\frac{1}{2})^2] \\
&= -\frac{8}{40} - \frac{3}{2} \;=\; -\frac{17}{10}
\end{aligned}$$

Ejercicio 9.3.2 Encuentre la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

con las condiciones iniciales

$$u(x,0) = 0\,, \quad u_t(x,0) = x^3\,, \quad 0 \le x \le 1\,,$$

y las condiciones de frontera

$$u_x(0,t) = 0 = u_x(1,t) \quad t \ge 0\,,$$

y calcule $u(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$.

Solución. Sabemos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f_p(x+t) + f_p(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g_p(\tau)d\tau\,,$$

donde f_p, g_p son las extensiones pares de periodo 2 de las funciones $f(x) = 0$ y $g(x) = x^3$, respectivamente.

Luego

$$f_p \equiv 0\,, \quad g_p(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ x^3 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g_p(x+2) = g_p(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} u(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}) &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{5}{6}}^{\frac{13}{6}} g_p(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{5}{6}} \tau^3 d\tau + 2\int_0^1 \tau^3 d\tau + \int_0^{\frac{1}{6}} \tau^3 d\tau\right] \\ &= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^4 + 2 + \left(\frac{1}{6}\right)^4\right]. \end{aligned}$$

Ejercicio 9.3.3 Encuentre la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

con las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= x^3 \\ u_t(x,0) &= 2x \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad 0 \le x \le 2$$

y las condiciones de frontera

$$u_x(0,t) \;=\; 0 \;=\; u(2,t) \quad \text{para} t \geq 0\,,$$

y calcule

$$u\left(\frac{3}{2}, 3\right)\,.$$

Solución. Tenemos

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}[F\left(x+\frac{1}{3}t\right) \;+\; F\left(x-\frac{1}{3}t\right)\,] \;+\; \frac{3}{2}\int_{x-\frac{1}{3}t}^{x+\frac{1}{3}t} G(\tau)d\tau$$

con F, G las extenciones par en $x = 0$ e impar en $x = 2$ de periodo 8 de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x$, respectivamente.
Por lo tanto

$$F(x) \;=\; \begin{cases} -f(4+x) \;=\; -(4+x)^3 & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -2 \\ f(-x) \;=\; -x^3 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ f(x) \;=\; x^3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -f(4-x) \;=\; -(4-x)^3 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

y

$$G(x) \;=\; \begin{cases} -g(4+x) \;=\; -2(4+x) & \text{si} \quad -4 \leq x \leq -2 \\ g(-x) \;=\; -2x & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ g(x) \;=\; 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -g(4-x) \;=\; -2(4-x) & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} u\left(\frac{3}{2}, 3\right) &= \frac{1}{2}\left(F\left(\frac{5}{2}\right) \;+\; F\left(\frac{1}{2}\right)\right) \;+\; \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} G(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left(-\left(4-\frac{5}{2}\right)^3 \;+\; \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \;+\; \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2\tau d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{27}{8}+\frac{1}{8}\right) \;+\; \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4} \;-\; \frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{26}{16} \;+\; \frac{24}{8} \;=\; \frac{11}{8}\;\cdot \end{aligned}$$

Ejercicio 9.3.4 Considere la ecuación de ondas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;&=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) \;&=\; x + Ax\,, \quad u_t(x,0) = e^x \\ u_x(0,t) \;&=\; u(1,t) \;=\; A\,. \end{aligned}$$

Calcule el valor de la solución cuando $x = \frac{4}{3}$ y $t = \frac{1}{2}$.

Solución. Haciendo un cambio de función de la forma

$$u(x,t) \;=\; \alpha x \;+\; \beta \;+\; v(x,t)\,,$$

obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;=\; \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,.$$

Además

$$u_x(0,t) \;=\; \alpha \;+\; v_x(0,t) \;=\; A \quad \Longrightarrow \quad \alpha \;=\; A\,,$$

$$u(1,t) \;=\; A \;+\; \beta \;+\; v(1,t) \;=\; A \quad \Longrightarrow \quad \beta \;=\; 0\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,t) \;=\; Ax \;+\; v(x,t)\,,$$

donde $v(x,t)$ satisface

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \;=\; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &v(x,0) \;=\; x\,, \quad v_t(x,0) = e^x \\ &u_x(0,t) \;=\; u(1,t) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

De esta forma

$$v(x,t) \;=\; \frac{1}{2}[F(x+t)+F(x-t)] \;+\; \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G(\tau)d\tau$$

con F, G las extenciones par en $x = 0$ e impar en $x = 1$ de periodo 4 de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$, respectivamente.
Por lo tanto

$$\begin{aligned} v\left(\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right) \;&=\; \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{11}{6}\right) \;+\; F\left(\frac{5}{6}\right)\right] \;+\; \frac{1}{2}\int_{\frac{5}{6}}^{\frac{11}{6}} G(\tau)d\tau \\ &=\; \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{11}{6}\right) + F\left(\frac{5}{6}\right)\right] \;+\; \frac{1}{2}\int_{\frac{5}{6}}^{1} G(\tau)d\tau \;+\; \frac{1}{2}\int_{1}^{\frac{11}{6}} G(\tau)d\tau\,. \end{aligned}$$

Pero

$$F(x) \;=\; \begin{cases} -x & -1 \le x \le 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ x-2 & 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad G(x) \;=\; \begin{cases} e^{-x} & -1 \le x \le 0 \\ e^{x} & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ -e^{x-2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Luego

$$F\left(\frac{11}{6}\right) \;=\; -\frac{1}{6}\,, \quad F\left(\frac{5}{6}\right) \;=\; \frac{5}{6}\,,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} v\left(\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\int_{\frac{5}{6}}^{1} e^{\tau}d\tau + \frac{1}{2}\int_{1}^{\frac{11}{6}} -e^{2-\tau}d\tau \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(e^{1} - e^{\frac{5}{6}}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{6}} - e^{1}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\,e^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{6}}\,. \end{aligned}$$

Finalmente

$$u\left(\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}A + v\left(\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}A + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\,e^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{6}}\,.$$

Ejercicio 9.3.5 Encuentre la solución $u(x,t)$ del problema

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx} + \operatorname{sen}(x)\,, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,\, t > 0 \\ &u(x,0) = 1 + \frac{3}{2\pi}x + \frac{5}{4}\operatorname{sen}(x)\,, \quad u_t(x,0) = x^2 \\ &u(0,t) = 1\,, \qquad u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 2\,, \end{aligned}$$

y calcule $u\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right)$.

Solución. Hagamos un cambio de función de la forma

$$u(x,t) = v(x,t) + H(x)\,.$$

Entonces $H(x)$ debe verificar

$$\left.\begin{aligned} 4H''(x) + \operatorname{sen}(x) &= 0 \\ H(0) &= 1 \\ H(\tfrac{\pi}{2}) &= 2 \end{aligned}\right\} \implies H(x) = 1 + \frac{3}{2\pi}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x)\,.$$

Entonces $v(x,t)$ debe ser solución de

$$\begin{aligned} &v_{tt} = 4v_{xx} \\ &v(x,0) = \operatorname{sen}(x)\,, \quad v_t(x,0) = x^2 \\ &v(0,t) = v\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[F(x+2t) + F(x-2t)] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} G(\tau)d\tau\,,$$

con F, G las extenciones impar de periodo π de las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = x^2$, respectivamente.

De esta forma

$$F(x) \;=\; \operatorname{sen}(x)\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \qquad G(x) \;=\; \begin{cases} x^2 & \text{para} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -x^2 & \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \end{cases}$$

y

$$F(x \;+\; \pi) \;=\; F(x)\,, \qquad G(x \;+\; \pi) \;=\; G(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} v\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \;&=\; \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{\pi}{2} \;+\; 2\,\frac{\pi}{3}\right) \;+\; F\left(\frac{\pi}{2} \;-\; 2\,\frac{\pi}{3}\right)\right] \;+\; \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}\,-\,2\,\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}\,-\,2\,\frac{\pi}{3}} G(\tau)\,d\tau \\ &=\; \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{7\,\pi}{6}\right) \;+\; F\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \;+\; \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\,\pi}{6}} G(\tau)\,d\tau \\ &=\; \frac{1}{2}[F\left(\frac{\pi}{6}\right) \;+\; F\left(-\frac{\pi}{6}\right)] \;+\; \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} G(\tau)\,d\tau \\ &=\; 0\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \;=\; H\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; 1 \;+\; \frac{3}{2\,\pi}\,\frac{\pi}{2} \;+\; \frac{1}{4} \;=\; 2\,.$$

Ejercicio 9.3.6 Demuestre que cualquier problema no homogéneo de la forma

$$\begin{array}{rcl} u_{tt} - c^2 u_{xx} & = & A(x) \qquad 0 < x < l\,, t \in \mathbb{R}^+ \\ u_x(0,t) = 0 & ; & u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) & ; & u_t(x,0) = g(x)\,. \end{array}$$

se transforma en un problema homogéneo con un cambio de función de la forma $u(x,t) \;=\; v(x,t) + B(x)\,.$

Solución. Considerando este cambio de función obtenemos

$$\begin{array}{rcl} u_{tt} & = & v_{tt} \\ u_{xx} & = & v_{xx} + B(x)\,. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} \;=\; v_{tt} - c^2 v_{xx} - c^2 B''(x) \;=\; A(x)\,,$$

Luego debemos tener

$$A(x) \;+\; c^2 B''(x) \;=\; 0\,.$$

Además como

$$u_x(0,t) \;=\; v_x(0,t) \;+\; B'(0)\,, \quad u(l,t) \;=\; v(l,t) \;+\; B(l)\,,$$

para mantener las condiciones de frontera homogénea denemos tener

$$B'(0) \;=\; B(l) \;=\; 0\,.$$

Luego debemos encontrar B que verifique:

$$\begin{array}{rcl} B''(x) + \frac{1}{c^2}A(x) & = & 0 \\ B'(0) = 0 \quad ; \quad B(l) & = & 0\,. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$B(x) \;=\; \frac{1}{c^2}\left[\int_0^l \left(\int_0^u A(s)ds\right)du \;-\; \int_0^x \left(\int_0^u A(s)ds\right)du\right].$$

Ejercicio 9.3.7 Resuelva el problema

$$\begin{array}{l} u_{tt} \;=\; u_{xx} \;+\; 1 \;-\; x\,, \quad 0 \le x \le 1\,, \quad t \ge 0 \\ u_x(0,t) \;=\; 0\,, \quad u(1,t) \;=\; 0 \\ u(x,0) \;=\; \frac{1}{6}x^3 \;-\; \frac{1}{2}x^2 \;-\; x \;+\; \frac{4}{3}\,, \quad u_t(x,0) \;=\; 0\,. \end{array}$$

y calcule $u\left(\frac{7}{2}, 7\right)$.

Solución Ponemos $u(x,t) = v(x,t) + B(x)$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} u_{tt} & = & v_{tt}\,, \\ u_{xx} & = & v_{xx} + B''(x)\,. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$B''(x) = x - 1 \Longrightarrow B(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2\,.$$

Ahora,

$$0 = u_x(0,t) = v_x(0,t) + B'(0) = v_x(0,t) + c_1$$

Por lo tanto, tomamos $c_1 = 0$ y tenemos

$$0 = u(1,t) = v(1,t) + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + c_2\,.$$

Ahora tomamos

$$c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

y obtenemos

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}$$

Entonces

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{4}{3} = u(x,0) = v(x,0) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}$$

Luego $v(x,0) = 1 - x$.

$$0 = u_t(x,0) = v_t(x,0) \Longrightarrow v_t(x,0) = 0\,.$$

Así nuestra ecuación es:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx} \\ v_x(0,t) &= v(1,t) = 0 \\ v(x,0) &= 1-x\,, \quad v_t(x,0) = 0\,. \end{aligned}$$

Luego

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+t) + F(x-t)\right],$$

donde F es la extensión par de f en 0 e impar en 1 de periodo 4. Es decir

$$F(x) = \begin{cases} 1+x & -2 \le x \le -1 \\ 1+x & -1 < x \le 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 1-x & 1 \le x \le 2\,. \end{cases}$$

$$F(x+4) = F(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} v\left(\frac{7}{2},7\right) &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{7}{2}+7\right) + F\left(\frac{7}{2}-8\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{1}{2}+10\right) + F(\frac{1}{2}-5)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{1}{2}-2\right) + F\left(\frac{1}{2}-1\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{-3}{2}\right) + F\left(\frac{-1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{3}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}[2-2] \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Luego

$$u\left(\frac{7}{2},7\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{7}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\,.$$

Ejercicio 9.3.8 Resuelva

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + tx \\ u(0,t) = u(\pi,0) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x \quad ; \quad u_t(x,0) = 5\operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x)\,. \end{cases}$$

usando un cambio del tipo: $u(x,t) = v(x,t) + P_3(x)t$, donde $P_3(x)$ es un polinomio cúbico.

Solución. Poniendo $P_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ y $u(x,t) = v(x,t) + P_3(x)t$, obtenemos

$$\begin{aligned} u_{tt} &= v_{tt} \\ u_{xx} &= v_{xx} + t(6Ax + 2B) \\ &= u_{tt} - tx = v_{tt} - tx \end{aligned}$$

Para que la ecuación sea homogénea ponemos $B = 0$ y $A = -\frac{1}{6}$. Entonces

$$P_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + Cx + D\,,$$

y como

$$u(0,t) = v(0,t) + P_3(0)t = v(0,t) + Dt$$

y

$$u(\pi,t) = v(\pi,t) + P_3(\pi)t = v(\pi,t) + (\frac{-1}{6}\pi^3 + C\pi)t$$

para mantener las condiciones de frontera ponemos $D = 0$ y $C = \frac{1}{6}\pi^2$.

De esta forma tenemos

$$P_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}\pi^2 x\,.$$

Examinamos ahora las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= u(x,0) = v(x,0) \\ 5\operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x) &= u_t(x,0) = v_t(x,0) + P_3(x) = v_t(x,0) - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{6}\pi^2 x\,. \end{aligned}$$

Luego

$$v(x,0) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad v_t(x,0) = 5\operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{6}x(x^2 - \pi^2)\,.$$

Por lo tanto nuestro problema se reduce a:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) = \operatorname{sen} x \quad ; \quad v_t(x,0) = 5\operatorname{sen}(2x) - 3\operatorname{sen}(5x) + \frac{1}{6}x(x^2 - \pi^2)\,. \end{cases}$$

Como $\operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x), \operatorname{sen}(5x)$ son impares y de periodo 2π y la función $g(x) = \frac{1}{6}x(x^2 - \pi^2)$ es impar, si consideramos la función G definida por

$$G(x) = g(x)\,, -\pi \le x \le \pi\,, \quad G(x + 2\pi) = G(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+t) + \operatorname{sen}(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (5\operatorname{sen}(2\tau) - 3\operatorname{sen}(5\tau) + G(\tau))d\tau \\ &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+t) + \operatorname{sen}(x-t)] - \frac{10}{4}[\cos(2(x+t)) - \cos(2(x-t))] + \\ &\quad \frac{3}{10}[\cos(5(x+t)) - \cos(5(x-t))] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G(\tau)d\tau\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= v(x,t) - tg(x) \\
&= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+t) + \operatorname{sen}(x-t)] - \frac{10}{4}[\cos(2(x+t)) - \cos(2(x-t))] + \\
&\quad \frac{3}{10}[\cos(5(x+t)) - \cos(5(x-t))] - \frac{t}{6}x(x^2-\pi^2) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G(\tau)d\tau\,.
\end{aligned}$$

Ejercicio 9.3.9 Resuelva la ecuación de ondas

$$\begin{array}{l}
u_{tt} \;-\; 4u_{xx} \;=\; 0\,, \quad 0 \le x \le 2\,, \quad t \ge 0 \\
u_x(0,t) \;=\; u(2,t) \;=\; 0\,, \quad t > 0 \\
u(x,0) \;=\; x \;-\; 2 \quad u_t(x,0) \;=\; x^2 \;+\; 1\,, \quad 0 < x < 2
\end{array}$$

y calcule $u\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Solución. Tenemos $c = 2$ y $l = 2$. Consideremos las funciones

$$f(x) \;=\; (x \;-\; 2)\Big/_{[0,2]}\,, \quad g(x) \;=\; (x^2 \;+\; 1)\Big/_{[0,2]}\,.$$

Entonces la solución general es

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2}[F(x \;+\; 2t) \;+\; F(x \;-\; ct)] \;+\; \frac{1}{4}\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)\,d\tau\,,$$

donde F, G son las extenciones pares en 0 e impares en 2 de las funciones f, g respectivamente.

Por lo tanto

$$F(x) \;=\; \left\{\begin{array}{ccccc}
-f(4+x) & = & -x-2 & \text{si} & -4 \le x \le -2 \\
f(-x) & = & -x-2 & \text{si} & -2 \le x \le 0 \\
f(x) & = & x-2 & \text{si} & 0 \le x \le 2 \\
-f(4-x) & = & x-2 & \text{si} & 2 \le x \le 4
\end{array}\right.$$

y

$$G(x) \;=\; \left\{\begin{array}{ccccc}
-g(4+x) & = & -(4+x)^2-1 & \text{si} & -4 \le x \le -2 \\
g(-x) & = & x^2+1 & \text{si} & -2 \le x \le 0 \\
g(x) & = & x^2+1 & \text{si} & 0 \le x \le 2 \\
-g(4-x) & = & -(4-x)^2-1 & \text{si} & 2 \le x \le 4
\end{array}\right.$$

y

$$F(x \;+\; 8) \;=\; F(x)\,, \quad G(x \;+\; 8) \;=\; G(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Por otra parte

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left[F\left(\frac{1}{2}+11\right) \;+\; F\left(\frac{1}{2}-11\right)\right] \;+\; \frac{1}{4}\int_{-\frac{21}{2}}^{\frac{23}{2}} G(\tau)d\tau\,.$$

Pero

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}+11\right) &= F\left(\frac{1}{2}+3\right) = \frac{1}{2}+3-2 = \frac{3}{2} \\ F\left(\frac{1}{2}-11\right) &= F\left(\frac{1}{2}-3\right) = -\frac{1}{2}+3-2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{21}{2}}^{\frac{23}{2}} G(\tau)d\tau &= \int_{-\frac{21}{2}}^{-10} G(\tau)d\tau + \int_{6}^{\frac{23}{2}} G(\tau)d\tau \\ &= \int_{6+\frac{1}{2}}^{8+\frac{1}{2}} G(\tau)d\tau = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} G(\tau)\, d\tau \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} (\tau^2+1)\, d\tau = \frac{\tau^3}{3}+\tau \Big/_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{19}{6} \end{aligned}$$

Luego

$$u\left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{4}\,\frac{19}{6} = \frac{43}{24}\,.$$

Ejercicio 9.3.10 Usando el método de D'Alembert resuelva

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} + 2tx^2\,, \quad 0 \le x \le 3\,, \quad t \ge 0 \\ u(0,t) &= u_x(3,t) = 0\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \quad u_t(x,0) = \frac{11}{2}\,x - \frac{1}{24}\,x^4\,, \quad 0 < x < 3 \end{aligned}$$

y calcule $u\left(\frac{1}{2},3\right)$.

Indicación. Haga un cambio de función del tipo $u(x,t) = v(x,t) + tA(x)$.

Solución. Con el cambio sugerido tenemos

$$u_{tt} = v_{tt} \qquad \text{y} \qquad 4u_{xx} + 2tx^2 = 4v_{xx} + 4tA''(x) + 2tx^2\,.$$

Luego debemos tener

$$A''(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 \quad \Longrightarrow \quad A(x) = -\frac{1}{24}\,x^4 + B\,x + C\,.$$

Además

$$0 = u(0,t) = v(0,t) + t\,C \quad \Longrightarrow \quad C = 0\,, \qquad \text{y}$$

$$0 = u_x(3,t) = v_x(3,t) + t\left(-\frac{1}{6}\,3^3 + B\right) \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{9}{2}\cdot$$

De esta forma el cambio de función es

$$u(x,t) \;=\; v(x,t) \;+\; t\,\left(-\frac{1}{24}\,x^4 \;+\; \frac{9}{2}\,x\right).$$

Por otra parte

$$v(x,0) \;=\; u(x,0) \;=\; 0\,, \qquad \text{y}$$

$$v_t(x,0) \;=\; u(x,0) \;+\; \frac{1}{24}\,x^4 \;-\; \frac{9}{2}\,x \;=\; x\,.$$

De esta forma nuestro problema es ahora

$$\begin{aligned} v_{tt} \;&=\; 4v_{xx}\,, \quad 0 \le x \le 3\,, \quad t \ge 0 \\ v(0,t) \;&=\; v_x(3,t) \;=\; 0\,, \quad t > 0 \\ v(x,0) \;&=\; 0 \quad\; v_t(x,0) \;=\; x\,, \quad 0 < x < 3\,. \end{aligned}$$

Así

$$v(x,t) \;=\; \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} G(s)ds\,,$$

donde G es la extensión impar en 0 y par en 3 de periodo 12 de la función $x\Big/_{[0,3]}$. Por lo tanto

$$G(x) \;=\; \begin{cases} -(6+x) & -6 < x < -3 \\ x & -3 < x < 3 \\ 6-x & 3 < x < 6 \end{cases} \qquad G(x+12) \;=\; G(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Finalmente

$$v\left(\frac{1}{2},3\right) \;=\; \frac{1}{4}\int_{-\frac{11}{2}}^{\frac{13}{2}} G(s)ds \;=\; \frac{1}{4}\int_{-\frac{11}{2}}^{\frac{11}{2}} sds \;==\; 0\,,$$

lo que implica

$$u\left(\frac{1}{2},3\right) \;=\; 3\,\left(-\frac{1}{24}\,\frac{1}{16} \;+\; \frac{9}{4}\right) \;=\; \frac{95}{128}\,.$$

Ejercicio 9.3.11 Resuelva el problema de ondas

$$\begin{aligned} u_t t \;&=\; 9u_{xx}\,, \quad 0 \le x \le 2\,, \quad t \ge 0 \\ u(0,t) \;&=\; u_x(2,t) \;=\; 0 \\ u(x,0) \;&=\; x^2\,, \quad u_t(x,0) \;=\; x+2 \end{aligned}$$

y calcule $u\left(\frac{13}{4},\frac{31}{12}\right)$.

Solución. Como $c = 3$ y $l = 2$, la solución es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+3t) + F(x-3t)\right] + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} G(\tau)\, d\tau\,,$$

donde F, G son las extensiones impares en 0 y pares en 2 de periodo 8 de las funciones

$$f(x) = x^2\Big/_{0\leq x\leq 2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x+2\Big/_{0\leq x\leq 2}$$

respectivamente.

Por lo tanto

$$F(x) = \begin{cases} -(4+x)^2 & -4\leq x\leq -2 \\ -x^2 & -2\leq x\leq 0 \\ x^2 & 0\leq x\leq 2 \\ (4-x)^2 & 2\leq x\leq 4 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} -6-x & -4\leq x\leq -2 \\ x-2 & -2\leq x\leq 0 \\ x+2 & 0\leq x\leq 2 \\ 6-x & 2\leq x\leq 4 \end{cases}$$

y

$$F(x+8) = F(x)\,, \quad G(x+8) = G(x) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}\,.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} F\left(\frac{13}{4}+3\,\frac{31}{12}\right) &= F(11) = F(3) = (4-3)^2 = 1 \\ F\left(\frac{13}{4}-3\,\frac{31}{12}\right) &= F\left(-4-\frac{1}{2}\right) = F\left(4-\frac{1}{2}\right) = \left(4-4+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,, \end{aligned}$$

y

$$\int_{-\frac{9}{2}}^{11} G(\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{0} (\tau-2)d\tau + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (\tau+2)d\tau = -\frac{1}{2}-2+\frac{1}{8}+1 = -\frac{11}{8}\,.$$

Luego

$$u\left(\frac{13}{4},\frac{31}{12}\right) = \frac{5}{8} - \frac{11}{48} = \frac{19}{48}\,.$$

Capítulo 10

Método de Separación de Variables

10.1 Método

Consideremos los siguientes problemas:

i) Para $0 < x < l$, $t \in \mathbb{R}^+$, la ecuación hiperbólica

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}\,, \text{ donde } c > 0 \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} u(0,t) + h_1\, u_x(0,t) = 0 \\ u(l,t) + h_2\, u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f_1(x)\ ; \quad u_t(x,0) = f_2(x)\,. \end{cases}$$

ii) Para $0 < x < l$, $t \in \mathbb{R}^+$, la ecuación parabólica

$$u_t = k u_{xx} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} u(0,t) + h_1\, u_x(0,t) = 0 \\ u(l,t) + h_2\, u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x)\,. \end{cases}$$

iii) Para $0 < x < a$, $0 < y < b$, la ecuación elíptica

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} u(0,y) + h_1\, u_x(0,y) = 0 \\ u(a,y) + h_2\, u_x(a,y) = 0 \\ u(x,0) = f_1(x)\,; \quad u(x,b) = f_2(x)\,. \end{cases}$$

Ponemos $u(x,t) = M(x) \cdot N(t)$ en el caso hiperbólico y parabólico, y $u(x,y) = M(x) \cdot M(y)$ en el caso elíptico.

Reemplazando en la ecuación obtenemos, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\,\frac{N''(t)}{N(t)} &= \frac{M''(x)}{M(x)} && \text{en el caso hiperbólico} \\
\frac{1}{k}\,\frac{N'(t)}{N(t)} &= \frac{M''(x)}{M(x)} && \text{en el caso parabólico} \\
\frac{-N''(y)}{N(y)} &= \frac{M''(x)}{M(x)} && \text{en el caso elíptico .}
\end{aligned}$$

Como los dos miembros de estas expresiones dependen de variables diferentes, ambas deben ser iguales a una constante: $-\lambda$ (constante de separación), obteniéndose las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$M''(x) \;+\; \lambda\, M(x) \;=\; 0 \quad \text{(en los tres casos)}$$

y

$$\begin{aligned}
N''(t) \;+\; c^2\,\lambda\, N(t) &= 0 && \text{en el caso hiperbólico} \\
N'(t) \;+\; k\,\lambda\, N(t) &= 0 && \text{en el caso parabólico} \\
N''(y) \;-\; \lambda N(y) &= 0 && \text{en el caso elíptico.}
\end{aligned}$$

Observación 10.1.1 En principio, toda E.D.P. tal que el procedimiento anterior dé lugar a E.D.O. en cada una de las variables, puede resolverse mediante separación de variables. En particular, todas las E.D.P. de segundo orden con coeficientes constantes que no contienen derivadas cruzadas. Por ello, en el caso hiperbólico se utiliza la segunda forma canónica.

Veamos ahora las condiciones de frontera en x. Tenemos

$$\begin{aligned}
u(0,t) \;+\; h_1\, u_x(0,t) = 0 \;&\Longrightarrow\; N(t)\,(M(0) \;+\; h_1\, M'(0)) = 0\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\
&\Longrightarrow\; M(0) \;+\; h_1\, M'(0) = 0\,.
\end{aligned}$$

Luego $M(x)$ debe ser solución de la E.D.O.

$$M''(x) \;+\; \lambda\, M(x) = 0 \quad \text{y} \qquad \begin{cases} M(0) \;+\; h_1\, M'(0) = 0 \\ M(\alpha) + h_2 M'(\alpha) = 0\,, \end{cases}$$

(llamado **problema regular de Sturm-Liouville**) donde $\alpha = l$ en el caso hiperbólico y parabólico, y $\alpha = a$ en el caso elíptico.

Observe que la correspondiente ecuación característica es: $k^2 + \lambda = 0$.

Observación 10.1.2 Para poder aplicar separación de variables, existen requisitos que deben cumplir las condiciones de frontera y la región donde está definida la E.D.P.

i) Las condiciones de frontera deben poder definirse sobre variables independientes en forma separada. Por ejemplo, si la región es el disco de radio a centrado en el origen, su frontera en coordenadas cartesianas es $x^2 + y^2 = a$. Entonces las condiciones de frontera

$$u(x,y)\Big/_{x^2+y^2=a^2} \;=\; f(x,y)\Big/_{x^2+y^2=a^2}$$

no definen condiciones separadas.

Sin embargo, en coordenadas polares (r,θ), la región es $r \leq a$ y las condiciones de frontera

$$\begin{array}{l} u(a,\theta) = f(\theta) \\ u(r,0) = u(r,2\pi)\,; \quad u_\theta(r,\theta) = u_\theta(r,2\pi) \end{array}$$

son como queremos.

ii) Las condiciones de frontera deben ser homogéneas. Esto se puede obviar con un adecuado cambio de función.

Para la variable x tenemos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{array}{rcl} M''(x) \;+\; \lambda\, M(x) & = & 0 \\ M(0) \;+\; h_1\, M'(0)) & = & 0 \\ M(\alpha) \;+\; h_1\, M'(\alpha) & = & 0\,. \end{array}$$

En general, existe un conjunto a lo más numerable de valores de λ (autovalores), que denotaremos por λ_n $, n \in \mathbb{N}$, asociado a cada uno de los cuales existe una única solución no idénticamente nula, $M_n(x)$ (autofunción), salvo multiplicación por constante.

Tenemos así para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda \;=\; \lambda_n\,, \qquad M(x) \;=\; M_n(x)\,.$$

Para cada autovalor λ_n, $n \in \mathbb{N}$, resulta una ecuación para N_n. Suponiendo $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, las soluciones de estas ecuaciones son:

$$\begin{array}{rcll} N_n(t) & = & a_n\,\cos(c\,\sqrt{\lambda_n}\,t) \;+\; b_n\,\mathrm{sen}(c\,\sqrt{\lambda_n}\,t) & \text{(caso hiperbólico)} \\ N_n(t) & = & a_n\, e^{-k\,\lambda_n t} & \text{(caso parabólico)} \\ N_n(y) & = & a_n\, e^{\sqrt{\lambda_n}\,y} + b_n\, e^{-\sqrt{\lambda_n}\,y} & \text{(caso elíptico)}\,. \end{array}$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n = M_n \cdot N_n$ verifica la E.D.P. junto a las condiciones de frontera homogéneas. Para encontrar la solución que verifica, además, las condiciones que faltan, consideramos formalmente la serie

$$u \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cdot N_n\,,$$

en las que determinamos las constantes a_n, b_n que aparecen en N_n de modo que u cumpla las condiciones requeridas.

10.2 Problemas de Sturm-Liouville más frecuentes

Proposición 10.2.1 *Para $l > 0$ considere el problema*

$$\begin{cases} M''(x) \ + \ \lambda M(x) \ = \ 0 \\ \quad M(0) \ = \ M(l) \ = \ 0 \, . \end{cases}$$

Entonces los correspondientes autovalores son $\lambda_n \ = \ \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ y las autofunciones $M_n(x) \ = \ sen\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)$, y están definidas para todo número natural $n \geq 1$.

Demostración. Si $\lambda < 0$, la solución general de

$$M''(x) \ + \ \lambda M(x) \ = \ 0$$

es

$$M(x) \ = \ c_1\, e^{\sqrt{-\lambda}\, x} \ + \ c_2\, e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \, .$$

La condición $M(0) \ = \ 0$ implica $c_2 \ = \ -c_1$, y

$$M(l) \ = \ 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 \left[e^{\sqrt{-\lambda}\, l} \ + \ e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} \right] \ = \ 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 \ = \ 0 \, ,$$

por lo que no hay autofunciones asociadas a $\lambda < 0$.

Tampoco tenemos autofunciones para $\lambda \ = \ 0$, ya que en ese caso la solución general es $M(x) \ = \ c_1 + c_2\, x$, y las condiciones de frontera implican $c_1 \ = \ c_2 \ = \ 0$.

Sea entonces $\lambda > 0$. Ahora la solución general es

$$M(x) \ = \ c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) \ + \ c_2 \,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) \, ,$$

y la condición $M(0) \ = \ 0$ implica $c_1 \ = \ 0$. Luego $M(x) \ = \ c_2 \,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$, y la condición $M(l) \ = \ 0$ implica

$$\begin{aligned} c_2 \,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, l\right) \ = \ 0 \ &\Longrightarrow \ \sqrt{\lambda}\, l \ = \ n\,\pi \, , \quad n \ = \ 1, 2, \ldots \\ &\Longrightarrow \ \lambda \ = \ \frac{n^2\, \pi^2}{l^2} \, , \quad n \ = \ 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

De esta manera los autovalores son $\lambda_n \ = \ \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ y las autofunciones $M_n(x) \ = \ \mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)$, y están definidas para todo número natural $n \geq 1$.

Proposición 10.2.2 *Para $l > 0$ considere el problema*

$$\begin{cases} M''(x) \ + \ \lambda M(x) \ = \ 0 \\ \quad M'(0) \ = \ M'(l) \ = \ 0 \, . \end{cases}$$

Entonces los correspondientes autovalores son $\lambda_n \ = \ \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ y las autofunciones $M_n(x) \ = \ \cos\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)$, y están definidas para todo número natural $n \geq 0$.

Demostración. Veamos que no hay autofunciones asociadas a $\lambda < 0$. En efecto, en este caso la solución general es

$$M(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x},$$

y la condición $M'(0) = 0$ implica $c_2 = c_1$. Por otra parte

$$M'(l) = 0 \implies c_1 \sqrt{-\lambda} \left[e^{\sqrt{-\lambda}\, l} - e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} \right] = 0 \implies c_1 = 0,$$

lo que implica $M(x) \equiv 0$.

Sea entonces $\lambda \geq 0$. Ahora la solución general es

$$M(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, x\right),$$

y la condición $M'(0) = 0$ implica $c_2 = 0$. Luego $M(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$, y la condición $M'(l) = 0$ implica

$$\begin{aligned} -c_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, l\right) = 0 &\implies \sqrt{\lambda}\, l = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots \\ &\implies \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

De esta manera los autovalores son $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ y las autofunciones $M_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$, y están definidas para todo número natural $n \geq 0$.

Proposición 10.2.3 *Para $l > 0$ considere el problema*

$$\begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) = 0 \\ M(0) = M'(l) = 0. \end{cases}$$

Entonces los correspondientes autovalores son $\lambda_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4 l^2}$ y las autofunciones $M_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right)$, y están definidas para todo número natural $n \geq 0$.

Demostración. Como en la demostración de la Proposición 10.2.1, es sencillo verificar que no hay autofunciones asociadas a $\lambda \leq 0$.

Sea entonces $\lambda \geq 0$. Como la solución general es

$$M(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, x\right),$$

la condición $M(0) = 0$ implica $c_1 = 0$. Luego $M(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$, y la condición $M'(l) = 0$ implica

$$\begin{aligned} c_2 \sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda}\, l\right) = 0 &\implies \sqrt{\lambda}\, l = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ &\implies \lambda = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4 l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

De esta manera los autovalores son $\lambda_n = \frac{(2n+1)^2\,\pi^2}{4\,l^2}$ y las autofunciones $M_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\,\pi}{2\,l}\,x\right)$, y están definidas para todo número natural $n \geq 0$.

Proposición 10.2.4 *Para $l > 0$ considere el problema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} M''(x) \;+\; \lambda M(x) & = & 0 \\ M'(0) \;=\; M(l) & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Entonces los correspondientes autovalores son $\lambda_n = \frac{(2n+1)^2\,\pi^2}{4\,l^2}$ y las autofunciones $M_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\,\pi}{2\,l}\,x\right)$, y están definidas para todo número natural $n \geq 0$.

Ejemplo 10.2.5 Usando separación de variables resolvamos la ecuación de ondas

$$\begin{array}{lcl} u_{tt} & = & c^2 u_{xx}\,, \quad 0 < x < l\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) & = & f(x)\,, \quad u_t(x,0) = g(x)\,, \quad 0 < x < l \\ u_x(0,t) & = & u_x(l,t) \;=\; 0\,, \quad t > 0\,. \end{array}$$

Ponemos $u(x,t) = M(x) \cdot N(t)$ y obtenemos las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} M''(x) \;+\; \lambda\, M(x) & = & 0 \\ N''(t) \;+\; c^2\,\lambda\, N(t) & = & 0\,, \end{array}$$

con $-\lambda$ constante de separación.

Para que se cumplan las condiciones de frontera, $M(x)$ debe ser solución de

$$\left\{\begin{array}{rcl} M''(x) \;+\; \lambda M(x) & = & 0 \\ M'(0) \;=\; M'(l) & = & 0\,. \end{array}\right.$$

De esta forma los autovalores son

$$\lambda_n \;=\; \frac{n^2\pi^2}{l^2}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

y las autofunciones son

$$M_n(x) \;=\; \cos(\frac{n\pi}{l}\,x)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Sustituyendo λ por λ_n, en la ecuación en t se obtiene para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$N_n''(t) \;+\; \frac{n^2\pi^2}{l^2}\,c^2\,N_n(t) \;=\; 0\,,$$

cuya solución general es

$$N_0(t) \;=\; \frac{1}{2}\,(c_0 \;+\; d_0\,t)\,, \quad \text{y}$$

$$N_n(t) \;=\; c_n\,\cos(\frac{n\,\pi\,c}{l}\,t) \;+\; d_n\,\mathrm{sen}(\frac{n\,\pi\,c}{l}\,t)\,, \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots\,.$$

Entonces para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, los productos

$$u_n(x,t) = M_n(x)\cdot N_n(t)$$

son soluciones de

$$\begin{cases} u_{tt} & = \; c^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) & = \; u_x(l,t) \; = \; 0\,. \end{cases}$$

Consideremos la solución formal

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \\ &=\; \frac{1}{2}\,(c_0 \;+\; d_0\,t) \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}\Big(c_n\,\cos(\frac{n\,\pi\,c}{l}\,t) \;+\; d_n\,\mathrm{sen}(\frac{n\,\pi\,c}{l}\,t)\Big)\,\cos(\frac{n\,\pi}{l}\,x)\,. \end{aligned}$$

Debemos tener entonces

$$f(x) \;=\; u(x,0) \;=\; \frac{c_0}{2} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\frac{n\,\pi}{l}\,x)\,,$$

$$g(x) \;=\; u_t(x,0) \;=\; \frac{d_0}{2} \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n\,\pi\,c}{l}\cos(\frac{n\,\pi}{l}\,x)\,,$$

para todo $0 < x < l$.

Sean f_p y g_p las extensiones pares de periodo $2l$ de f y g respectivamente. Entonces c_n es el n-ésimo coeficiente de Fourier de $f_p(x)$ y $\frac{n\,\pi\,c}{l}\,d_n$ es el n-ésimo coeficiente de Fourier de $g_p(x)$.

De esta forma para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} c_n \;&=\; \frac{2}{l}\int_0^l f(s)\,\cos(\frac{n\,\pi}{l}\,s)\,ds\,, \\ d_n \;&=\; \frac{2}{n\,\pi\,c}\int_0^l g(s)\,\cos(\frac{n\,\pi}{l}\,s)\,ds\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 10.2.6 Probar que reemplazando estos valores en $u(x,t)$ se obtiene la correspondiente solución de d'Alambert.

10.3 Ejercicios resueltos

Ejercicio 10.3.1 Usando el método de separación de variables encuentre la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;-\; u$$

con la condición inicial

$$u(x,0) \;=\; 1 \quad \text{para} \quad 0 \le x \le \pi$$

y las condiciones de frontera

$$u_x(0,t) \;=\; 0 \;=\; u(\pi,t) \quad \textit{para} \quad t \ge 0\,.$$

Solución. Pongamos $u(x,t) = M(x)N(t)$. Reemplazando en la ecuación, separando variables e imponiendo las condiciones de frontera se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) \;=\; 0 \\ M'(0) \;=\; M(\pi) \;=\; 0 \end{cases} \qquad N'(t) + (1+\lambda)N(t) = 0\,.$$

Entonces los correspondientes autovalores y autofunciones son

$$\lambda_n \;=\; \left(\frac{1}{2}+n\right)^2, \quad M_n(x) \;=\; \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\,,$$

para todo $n \ge 0$.
Reemplazando en la ecuación para la variable t obtenemos

$$N_n'(t) \;+\; \left[1 \;+\; \left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right] N(t) \;=\; 0\,,$$

cuya solución es

$$N_n(t) \;=\; a_n e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right)t}\,.$$

Tenemos entonces la solución formal

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right)t} \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\,.$$

Imponiendo la condición inicial tenemos

$$1 \;=\; u(x,0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} a_n \;&=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)dx \;=\; \frac{2}{\pi}\frac{2}{1+2n}\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\Big/_0^{\pi} \\ &=\; \frac{4}{\pi}\frac{1}{1+2n}\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\right) \;=\; \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n}{1+2n} \end{aligned}$$

y la solución buscada es

$$u(x,t) \;=\; \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+2n}e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right)t}\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\,.$$

Ejercicio 10.3.2 Para $\alpha \geq l > 0$, utilice el método de separación de variables para obtener una solución de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;+\; 2\frac{\partial u}{\partial t} \;+\; u \;=\; \alpha^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l\,,\quad t > 0\,,$$

$$\begin{aligned} u(0,t) \;&=\; u(l,t) \;=\; 0\,,\; t > 0 \\ u(x,0) \;&=\; 1\,,\quad u_t(x,0) \;=\; 0\,,\quad 0 < x < l\,. \end{aligned}$$

Ponemos $u(x,t) = M(x)\,N(t)$. Reemplazando:

$$M(x)\,N''(t) \;+\; 2M(x)\,N'(t) \;+\; M(x)\,N(t) \;=\; \alpha^2\,M''(x)\,N(t)\,,$$

y separando variables

$$\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{N''(t)}{N(t)} \;+\; 2\frac{N'(t)}{N(t)} \;+\; 1\right] \;=\; \frac{M''(x)}{M(x)} \;=\; -\lambda\,.$$

Luego tenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} M''(x) \;+\; \lambda\,M(x) \;&=\; 0 \\ N''(t) \;+\; 2N'(t) \;+\; (1+\lambda\alpha^2)\,N(t) \;&=\; 0\,. \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera implican $M(0) = M(l) = 0$. Luego nuestro problema de Sturm-Liouville es:

$$\begin{cases} M''(x) \;+\; \lambda M(x) \;=\; 0 \\ M(0) \;=\; M(l) \;=\; 0\,, \end{cases}$$

y los autovalores son $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ y las autofunciones son $M_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{l}\,x)$, y estan definidas para $n \geq 1$.
Reemplazando en la otra ecuación , obtenemos para cada $n \geq 1$,

$$N_n''(t) + 2N_n'(t) + \left(1 + \frac{n^2\pi^2\alpha^2}{l^2}\right)N_n(0) = 0\,,$$

cuya ecuación característica es

$$k^2 + 2k + \left(1 + \frac{n^2\pi^2\alpha^2}{l^2}\right) = 0\,.$$

Como el discriminante de esta ecuación es

$$1 - \left(1 + \frac{n^2\pi^2\alpha^2}{l^2}\right) = -\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{l^2} < 0\,,$$

tenemos

$$N_n(t) \;=\; e^{-t}\left[c_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{l}\,t\right) \;+\; d_n\,\cos\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{l}\,t\right)\right]\;.$$

Luego

$$u_n(x,t) \;=\; e^{-t}\left[c_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{l}\,t\right) \;+\; d_n\,\cos\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{l}\,t\right)\right]\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)\;.$$

Consideremos ahora la solución formal

$$u(x,t) \;=\; e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{l}\,t\right) \;+\; d_n\,\cos\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{l}\,t\right)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)\;.$$

Imponiendo las condiciones iniciales se obtiene

$$1 \;=\; u(x,0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} d_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)\,,$$

y

$$0 \;=\; u_t(x,0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\,\pi\,\alpha}{l}\,c_n \;-\; d_n\right]\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right)\;.$$

Luego,

$$c_n \;=\; \frac{l}{n\,\pi\,\alpha}\,d_n\,,$$

y d_n es el enésimo coeficiente de Fourier de la extensión impar de $f(x) = 1$ al intervalo [-l, l]. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{l}\,s\right)\,ds \\ &= \frac{2}{n\,\pi}\,[1 \;-\; \cos(n\,\pi)] \\ &= \frac{2}{n\,\pi}\,[1 \;-\; (-1)^n]\,, \end{aligned}$$

y

$$c_n \;=\; \frac{2\,l}{n^2\,\pi^2\,\alpha}\,[1 \;-\; (-1)^n]\;.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(x,t) \;=\; & \frac{2}{\pi}\,e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,(1 \;-\; (-1)^n)\,\left[\frac{l}{n\,\pi\,\alpha}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{l}\,t\right)\right. \\ & \left. +\;\cos\left(\frac{n\,\pi\,\alpha}{l}\,t\right)\right]\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}\,x\right)\;. \end{aligned}$$

Ejercicio 10.3.3 Usando el método de separación de variables resuelva el problema

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u\,, \quad 0 \leq x \leq \pi\,, \quad t \geq 0 \\ u_x(0,t) &= u(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \sin(x)\,, \quad 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Solución. Pongamos $u(x,t) = M(x)N(t)$. Reemplazando en la ecuación, separando variables e imponiendo las condiciones de frontera se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) = 0 \\ M'(0) = M(\pi) = 0 \end{cases} \qquad N'(t) + (1+\lambda)N(t) = 0\,.$$

Entonces los correspondientes autovalores y autofunciones son

$$\lambda_n = \left(\frac{1}{2}+n\right)^2\,, \quad M_n(x) = \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\,,$$

para todo $n \geq 0$. Reemplazando en la ecuación para la variable t obtenemos

$$N_n'(t) + \left[1 + \left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right] N(t) = 0\,,$$

cuya solución es

$$N_n(t) = a_n e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right)t}\,.$$

enemos entonces la solución formal

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right)t} \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\,.$$

Imponiendo la condición inicial tenemos

$$\sin(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\,\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin\left(\left(\frac{3}{2}+n\right)x\right)dx + \int_0^{\pi} \sin\left(\left(\frac{1}{2}-n\right)x\right)dx\right] \\ &= \frac{8}{\pi}\,\frac{1}{(3+2n)\,(1-2n)}\,. \end{aligned}$$

y la solución buscada es

$$u(x,t) \;=\; \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+2n)\,(1-2n)}\, e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right)t} \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) .$$

Ejercicio 10.3.4 Usando el método de separación de variables resuelva el problema

$$\begin{aligned} u_t \;-\; u_{xx} \;+\; u \;&=\; 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad t > 0 \\ u(0,t) \;=\; u_x(\pi,t) \;&=\; 0\,, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) \;&=\; x(\pi - x)\,, \quad 0 \leq x \leq \pi\,. \end{aligned}$$

Solución. Pongamos $u(x,t) = M(x)N(t)$. Reemplazando en la ecuación, separando variables e imponiendo las condiciones de frontera se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) \;=\; 0 \\ M(0) \;=\; M'(\pi) \;=\; 0 \end{cases} \qquad N'(t) + (1+\lambda)N(t) = 0\,.$$

Entonces los correspondientes autovalores y autofunciones son

$$\lambda_n \;=\; \left(\frac{1}{2}+n\right)^2, \quad M_n(x) \;=\; \sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) ,$$

para todo $n \geq 0$.

Reemplazando en la ecuación para la variable t obtenemos

$$N_n'(t) \;+\; \left[1 \;+\; \left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right] N(t) \;=\; 0\,,$$

cuya solución es

$$N_n(t) \;=\; a_n e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right)t}.$$

Tenemos entonces la solución formal

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right)t} \sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) .$$

Imponiendo la condición inicial tenemos

$$x(\pi - x) \;=\; u(x,0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) .$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\,\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2x(\pi - x)}{1+2n}\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\Big/_0^{\pi} \;+\; \frac{2}{1+2n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\,\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)dx\right] \\
&= \frac{4}{(1+2n)\pi}\left[\frac{2(\pi-2x)}{1+2n}\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\Big/_0^{\pi} \;+\; \frac{4}{1+2n}\int_0^{\pi}\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)dx\right] \\
&= \frac{4}{(1+2n)\pi}\left[-\frac{2\pi(-1)^n}{1+2n} \;-\; \frac{8}{(1+2n)^2}\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)\Big/_0^{\pi}\right] \\
&= \frac{4}{(1+2n)\pi}\left[-\frac{2\pi(-1)^n}{1+2n} \;-\; \frac{8}{(1+2n)^2}\right] \\
&= \frac{8}{(1+2n)^2\pi}\left[\frac{4}{(1+2n)} \;-\; \pi(-1)^n\right].
\end{aligned}
$$

Luego la solución buscada es

$$
u(x,t) \;=\; \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2n)^2}\left[\frac{4}{(1+2n)} \;-\; \pi(-1)^n\right] e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\right)t}\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right).
$$

Capítulo 11

Ecuación del Calor

11.1 Deducción de la ecuación del calor

Para establecer la ecuación del calor unidimensional necesitaremos los siguientes principios físicos:

a) El calor se desplaza de las zona calientes a las frías.

b) El ritmo a que fluye el calor a través de un área es proporcional al área y al ritmo de cambio de temperatura respecto de la distancia en una dirección perpendicular al área. El correspondiente factor de proporcionalidad k es llamado **conductividad térmica de la sustancia**.

c) La cantidad de calor ganado o perdido por una cuerpo cuando su temperatura cambia, es decir la variación de energia térmica, es proporcional a la masa del cuerpo y al cambio de temperatura. El factor de proporcionalidad c se llama **calor específico de la sustancia**.

Consideremos una varilla cilíndrica *delgada* de área transversal A, cuya superficie lateral está aislada térmicamente.

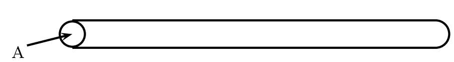


Figura 48

Delgada significa que tenemos temperatura uniforme en cualquier sección transversal del cilindro. Luego la temperatura w depende solo del tiempo y de la posición de dicha sección; es decir

$$w = w(x,t)\,.$$

Examinemos el ritmo de cambio del calor en una fina rodaja del cilindro entre las posiciones x y $x + \Delta x$.

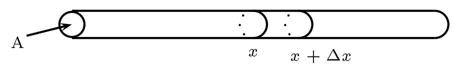


Figura 49

Si ρ es la densidad de la varilla, es decir su masa por unidad de volumen, la masa de la rodaja es

$$\Delta m \;=\; \rho A \Delta x\,.$$

Si Δw es el cambio de temperatura en el punto x en un pequeño intervalo de tiempo Δt, entonces por el principio c): la cantidad de calor almacenada en la rodaja durante ese intervalo de tiempo es

$$\Delta H \;=\; c\Delta m \Delta w \;=\; c\rho A \Delta x \Delta w\,,$$

lo que implica que el ritmo de almacenamiento de calor es

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} \;=\; c\rho A \Delta x \frac{\Delta w}{\Delta t}\,.$$

Si suponemos que no se genera calor dentro de la rodaja por procesos químicos o eléctricos, por ejemplo, la rodaja gana calor solamente por medio del flujo que penetra por sus caras. Esto implica, usando b), que el ritmo a que el calor fluye en la rodaja por la cara izquierda es

$$-kA\frac{\partial w}{\partial x}\Big/_{x}\quad .$$

El signo se debe al principio a). En efecto, para que penetre calor por la cara izquierda debemos tener que este decrezca con x (afuera debe estar más caliente que adentro) y por lo tanto $\frac{\partial w}{\partial x}$ es negativo en x. De esta forma para tener un flujo positivo por la cara izquierda debemos poner signo negativo. Por las misma razones, el ritmo a que el calor fluye por la cara derecha es

$$kA\frac{\partial w}{\partial x}\Big/_{x+\Delta x}\quad ,$$

y el ritmo total del flujo es

$$kA\frac{\partial w}{\partial x}\Big/_{x+\Delta x} \;-\; -kA\frac{\partial w}{\partial x}\Big/_{x}\quad .$$

Por lo tanto

$$kA\frac{\partial w}{\partial x}\Big/_{x+\Delta x} \;-\; -kA\frac{\partial w}{\partial x}\Big/_{x} \;=\; c\rho A\Delta x\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{k}{c\rho}\cdot\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\Big/_{x+\Delta x} \;-\; \frac{\partial w}{\partial x}\Big/_{x}}{\Delta x} \;=\; \frac{\partial w}{\partial t}\,,$$

y haciendo $\Delta x \longrightarrow 0$ obtenemos la ecuación parabólica

$$\frac{\partial w}{\partial t} \;=\; a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,, \quad \text{con} \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}\,.$$

11.1.1 Difusión en una barra finita aislada

Consideremos una barra de longitud l y suponemos

- El calor se distribuye uniformemente sobre cada sección transversal a lo largo del tiempo.
- No hay intercambio de calor con el exterior (aislada).
- Temperatura nula en los extremos.
- Distribución inicial de temperatura dada por una función $f(x)$ para $0 \leq x \leq l$.

En términos matemáticos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t(x,t) & = & k u_{xx}(x,t)\,, \quad 0 < x < l\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) & = & f(x)\,, \quad 0 < x < l \\ u(0,t) & = & u(l,t) \;=\; 0\,, \quad t > 0\,. \end{array} \right. \tag{11.1}$$

Usando el métdo de separación de variables, buscamos primero una solución de la forma

$$u(x,t) = M(x) \cdot N(t)$$

Reeemplazando se obtiene:

$$M(x)N'(t) \;=\; kM''(x)N(t)$$

Lo que implica,

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{N'(t)}{N(t)} \;=\; \frac{M''(x)}{M(x)} \;=\; -\lambda \text{ : constante de separación}\,.$$

Luego,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M''(x) + \lambda M(x) & = & 0 \\ N'(t) + \lambda k N(t) & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Condiciones de frontera $\Longrightarrow \quad M(0) = M(l) = 0\,.$
Entonces para cada variable x tenemos la ecuación :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M''(x) + \lambda M(x) & = & 0 \\ M(0) \;=\; M(l) & = & 0 \end{array} \right.$$

cuyo autovalores son: $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, con $n \geq 1$ y cuyas autofunciones son $M_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{l}x)$, para $n \geq 1$.
Luego, para la variable t, nos quedan las ecuaciones :

$$N_n'(t) + k\frac{n^2\pi^2}{l^2} \cdot N(t) = 0 \quad \text{para} n \geq 1\,,$$

cuya solución general es:

$$N_n(t) = a_n e^{\frac{-kn^2\pi^2}{l^2}t} \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{l}) \quad \forall n \geq 1\,.$$

Construimos la solución formal:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{-kn^2\pi^2}{l^2}t} \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{l})$$

y calcularemos las constantes a_n de modo que

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < l\,. \tag{11.2}$$

Por lo tanto, debemos tener

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{l})\,,$$

lo que implica

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(s)\operatorname{sen}(\frac{n\pi s}{l})ds \qquad \forall n \geq 1\,.$$

Obtenemos entonces la solución formal:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\left(\int_0^l f(s)\operatorname{sen}(\frac{n\pi s}{l})ds)\right) e^{\frac{-kn^2\pi^2}{l^2}t} \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{l}x)\,. \tag{11.3}$$

Proposición 11.1.1 *Si f es continua en $[0,l]$ y f' es continua por partes en $[0,l]$, entonces (11.3) es solución de (11.1) y ésta es única.*

Ejemplo 11.1.2 Obtener la distribución de temperatura en una barra aislada de longitud π, aislada del exterior, cuyos extremos se mantienen constantemente con temperatura cero, sabiendo que la distribución inicial ($t = 0$) de temperatura está descrita por $sen^2(x)$.

Formulación matemática:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t(x,t) &=& ku_{xx}, \qquad 0 < x < \pi\,,\ t > 0 \\ u(x,0) &=& \operatorname{sen}^2(x) \qquad 0 < x < \pi \\ u(0,t) &=& u(\pi,t) = 0\,. \end{array}\right.$$

Para $n \geq 1$ tenemos los autovalores: $\lambda_n = n^2$ y las autofunciones: $M_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$. También para $n \geq 1$, tenemos $N_n(t) = a_n e^{-kn^2 t}$ y la solución formal

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-kn^2 t} \operatorname{sen}(nx)\,.$$

Para calcular los a_n imponemos la condición inicial

$$\operatorname{sen}^2(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)\,.$$

Luego se tiene:

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{2}{\pi}\textstyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^2(s)\operatorname{sen}(ns)ds \\ &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^\pi (1-\cos(2s))\operatorname{sen}(ns)ds \\ &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_0^\pi \operatorname{sen}(ns)ds - \tfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\operatorname{sen}((2+n)s) + \operatorname{sen}((2-n)s))ds \end{aligned}$$

y para $n \neq 2$

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi}\tfrac{1}{n}(1-(-1)^n) - \tfrac{1}{2\pi}\left[\tfrac{1-\cos((2+n)\pi}{2+n} + \tfrac{1-\cos((2-n)\pi)}{2-n}\right] \\ &= \tfrac{1}{\pi}\left[\tfrac{1-(-1)^n}{n} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1-(-1)^n}{2+n} + \tfrac{1-(-1)^n}{2-n}\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{\pi}\tfrac{2(4-n^2)-n(2-n)-n(2+n)}{2n(4-n^2)}\cdot(1-(-1)^n) \\ &= \tfrac{(n^2+2n-4)(1-(-1)^n)}{\pi n(n^2-4)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si}\, n \,\text{es par} \\ \tfrac{2(n^2+2n-4)}{n\pi(n^2-4)} & \text{si}\, n\,\text{es impar}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, como también $a_2 = 0$,

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+8n-1}{(2n+1)(4n^2+4n-3)} e^{-k(2n+1)^2 t}\operatorname{sen}((2n+1)x)$$

es la solución formal que es en realidad la solución, ya que $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ cumple las condiciones de la proposición.

Ejemplo 11.1.3 Resolvamos

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2\,, & 0 < x < 1\,, t > 0 \\ u(x,0) = x - x^2\,, & 0 < x < 1\,, \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

Como la ecuación no es homogénea hacemos el cambio de función

$$u(x,t) \;=\; v(x,t) + h(x)$$

con $h(x)$ a determinar de modo que la ecuación en v sea del tipo que sabemos resolver.
Tenemos

$$\begin{array}{rcl} v_t \;=\; u_t & = & u_{xx} + 2 \;=\; v_{xx} + h''(x) + 2\,, \\ 0 & = & u_x(0,t) \;=\; v_x(0,t) + h'(0)\,, \\ 0 & = & u(1,t) \;=\; v(1,t) + h(1)\,. \end{array}$$

Luego necesitamos $h''(x) \;=\; -2\,,\; h'(0) \;=\; 0$ y $h(1) \;=\; 0\,.$
Por lo tanto $h(x) \;=\; -x^2+1$ y poniemdo $u(x,t) \;=\; v(x,t)+1-x^2$, nuestro problema se reduce a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_t & = & v_{xx}\,, \qquad 0 < x < 1\,, t > 0\,, \\ v(x,0) & = & u(x,0) - 1 + x^2 \;=\; x - x^2 - 1 + x^2 \;=\; x - 1 \\ v_x(0,t) & = & v(1,t) \;=\; 0\,. \end{array} \right.$$

Poniendo $v(x,t) \;=\; M(x)N(t)$ y separando variables obtenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M''(x) + \lambda M(x) & = & 0 \\ M'(0) = M(1) & = & 0 \end{array} \right. \qquad N'(t) + \lambda N(t) \;=\; 0$$

Luego para $n \geq 0$ tenemos los autovalores $\lambda_n \;=\; \frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2$ y las autofunciones $M_n(x) \;=\; \cos(\frac{\pi}{2}(1+2n)\,x)$. También para $n \geq 0$ tenemos

$$N_n(t) \;=\; a_n e^{-\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2\,t}\,.$$

Por lo tanto,

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2\,t} \cos(\frac{\pi}{2}(1+2n)\,x)\,,$$

y como

$$x-1 \;=\; v(x,0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\frac{\pi}{2}(1+2n)\,x)\,,$$

tenemos

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & 2\int_0^1 (s-1)\cos(\frac{\pi}{2}(1+2n)\,s)ds \\ & = & -\frac{8}{\pi^2}\frac{1}{(1+2n)^2}\,. \end{array}$$

Así

$$v(x,t) \;=\; -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2} e^{-\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2\,t} \cos(\frac{\pi}{2}(1+2n)\,x)\,,$$

y

$$u(x,t) \;=\; 1 - x^2 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2} e^{-\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2\,t} \cos(\frac{\pi}{2}(1+2n)\,x)\,.$$

Ejemplo 11.1.4 Resolvamos

$$\begin{cases} u_t(x,t) &=& ku_{xx} + \cos^2(x)\,, \qquad 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &=& \frac{-1}{4k}x^2 + \frac{\pi}{2k}x - \frac{1}{8k} \\ u(0,t) &=& u_x(\pi,t) \;=\; 0\,. \end{cases}$$

Hagamos el cambio de función $u(x,t) \;=\; v(x,t) + h(x)$.
Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$v_t(x,t) \;=\; u_t(x,t) \;=\; ku_{xx}(x,t) + \cos^2(x) \;=\; k(v_{xx}(x,t) + h''(x)) + \cos^2(x)\,.$$

Luego debemos tener

$$kh''(x) = -\cos^2(x) \quad \Longrightarrow \quad h''(x) \;=\; \frac{-1}{k}\cos^2(x)\,.$$

De las condiciones de frontera obtenemos

$$\begin{array}{rcrcl} 0 &=& u(0,t) &=& v(0,t) + h(0) \;\Longrightarrow\; h(0) \;=\; 0 \\ 0 &=& u_x(\pi,t) &=& v_x(\pi,t) + h'(\pi) \;\Longrightarrow\; h'(\pi) \;=\; 0\,. \end{array}$$

Luego nuestra función es

$$h(x) \;=\; \frac{-1}{2k}[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\cos(2x)] + \frac{\pi}{2k}x - \frac{1}{8k}\,.$$

Además

$$\frac{-1}{4k}x^2 + \frac{\pi}{2k}x - \frac{1}{8k} \;=\; u(x,0) \;=\; v(x,0) - \frac{1}{2k}[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\cos(2x)] + \frac{\pi}{2k}x - \frac{1}{8k}$$

lo que implica

$$v(x,0) \;=\; \frac{-1}{8k}\cos(2x)\,.$$

Luego nuestra ecuación para v es

$$\begin{cases} v_t(x,t) &=& kv_{xx}\,, \qquad 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ v(x,0) &=& -\frac{1}{8k}\cos(2x) \\ v(0,t) &=& v_x(\pi,t) \;=\; 0\,. \end{cases}$$

Pongamos $v(x,t) \;=\; M(x)\cdot N(t)$. Reemplazando en la ecuación y separando variables obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) &=& 0 \\ M(0) = M'(\pi) &=& 0\,. \end{cases} \qquad N'(t) + \lambda k N(t) = 0\,.$$

Por lo tanto, para $n \geq 0$ tenemos loa autovalores $\lambda_n \;=\; (\frac{1}{2} + n)^2$ y las autofunciones $M_n(x) \;=\; \mathrm{sen}((\frac{1}{2} + n)\,x)$. También para $n \geq 0$

$$N_n(t) \;=\; a_n e^{-(\frac{1}{2}+n)^2 kt}\,.$$

De esta forma

$$v(x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-(\frac{1}{2}+n)^2kt}\mathrm{sen}((\frac{1}{2}+n)\,x)\,.$$

con

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{1}{8k}\cos(2s)\mathrm{sen}((\frac{1}{2}+n)\,s)ds \\
&= -\frac{1}{4k\pi}\int_0^{\pi}\cos(2s)\mathrm{sen}((\frac{1}{2}+n)\,s)ds \\
&= -\frac{1}{8k\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}((\frac{5}{2}+n)\,s)+\mathrm{sen}((-\frac{3}{2}+n)\,s)ds \\
&= -\frac{1}{8k\pi}\left[\frac{1}{\frac{5}{2}+n}[1-\cos((\frac{5}{2}+n)\,\pi)]+\frac{1}{n-\frac{3}{2}}[1-\cos((-\frac{3}{2}+n)\,\pi)]\right] \\
&= -\frac{1}{8k\pi}[\frac{2}{(5+2n)}+\frac{2}{(2n-3)}] \\
&= -\frac{1}{4k\pi}[\frac{1}{(5+2n)}+\frac{1}{(2n-3)}]\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$v(x,t) \;=\; -\frac{1}{4k\pi}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{(5+2n)}+\frac{1}{(2n-3)}]e^{-(\frac{1}{2}+n)^2kt}\mathrm{sen}((\frac{1}{2}+n)\,x)$$

y

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{-1}{2k}[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\cos(2x)]+\frac{\pi}{2k}x-\frac{1}{8k} \\
&\quad -\frac{1}{4k\pi}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{(5+2n)}+\frac{1}{(2n-3)}]e^{-(\frac{1}{2}+n)^2kt}\mathrm{sen}((\frac{1}{2}+n)\,x)\,.
\end{aligned}$$

11.2 Ejercicios resueltos

Ejercicio 11.2.1 Resuelva

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;=\; 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con la condición inicial

$$u(x,0) \;=\; 3\mathrm{sen}(x)\cos^2(x)-\mathrm{sen}^3(x)+2\mathrm{sen}(x) \quad \text{para} \quad 0\le x\le \pi$$

y las condiciones de frontera

$$u(0,t) \;=\; 5 \quad u(\pi,t) \;=\; 10 \quad \textit{para} \quad t\ge 0\,.$$

Solución. Como las condiciones de frontera son no homogeneas, hacemos un cambio de función del tipo

$$u(x,t) \;=\; v(x,t) + Ax + B\,.$$

Entonces nos resulta

$$u_t \;=\; v_t\,, \quad u_{xx} \;=\; v_{xx}$$

$$5 \;=\; u(0,t) \;=\; v(0,t) + B \quad \Longrightarrow \quad B \;=\; 5 \quad \text{y}$$

$$10 \;=\; u(\pi,t) \;=\; v(\pi,t) + A\pi + 5 \quad \Longrightarrow \quad A \;=\; \frac{5}{\pi}\,.$$

Además

$$3\text{sen}(x)\cos^2(x) - \text{sen}^3(x) + 2\text{sen}(x) \;=\; u(x,0) \;=\; v(x,0) + \frac{5}{\pi} + 5$$

lo que implica

$$v(x,0) \;=\; 3\text{sen}(x)\cos^2(x) - \text{sen}^3(x) + 2\text{sen}(x) - \frac{5}{\pi} - 5\,.$$

Entonces nuestra ecuación es

$$\begin{aligned} v_t &= 2v_{xx} \\ v(x,0) &= 3\text{sen}(x)\cos^2(x) - \text{sen}^3(x) + 2\text{sen}(x) - \frac{5}{\pi} - 5 \\ v(0,t) &= v(\pi,t) \;=\; 0 \end{aligned}$$

Pongamos $v(x,t) = M(x)N(t)$. Reemplazando en la ecuación, separando variables e imponiendo las condiciones de frontera se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) \;=\; 0 \\ M(0) \;=\; M(\pi) \;=\; 0 \end{cases} \qquad N'(t) + 2\lambda N(t) = 0\,.$$

Entonces los correspondientes autovalores y autofunciones son

$$\lambda_n \;=\; n^2\,, \quad M_n(x) \;=\; \text{sen}(nx))\,,$$

para todo $n \geq 1$.
Reemplazando en la ecuación para la variable t obtenemos

$$N_n'(t) \;+\; 2n^2N(t) \;=\; 0\,,$$

cuya solución es

$$N_n(t) \;=\; a_n e^{-2n^2t}\,.$$

Tenemos entonces la solución formal

$$v(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2n^2t}\text{sen}(nx)\,.$$

Imponiendo la condición inicial tenemos

$$3\text{sen}(x)\cos^2(x) - \text{sen}^3(x) + 2\text{sen}(x) - \frac{5}{\pi} - 5 \;=\; v(x,0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx)\,.$$

Pero

$$\begin{aligned} 3\text{sen}(x)\cos^2(x) - \text{sen}^3(x) &= \frac{3}{2}\text{sen}(2x)\cos(x) - \frac{1}{2}\text{sen}(x)(1-\cos(2x)) \\ &= \frac{3}{4}(\text{sen}(3x) + \text{sen}(x)) - \frac{1}{2}\text{sen}(x) + \frac{1}{2}\text{sen}(x)\cos(2x) \\ &= \text{sen}(3x) \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\text{sen}(3x) + 2\text{sen}(x) - \frac{5}{\pi}x - 5 \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx)\,,$$

lo que implica

$$-\frac{5}{\pi}x - 5 \;=\; (a_1 - 2)\text{sen}(x) + a_2\text{sen}(2x) + (a_3 - 1)\text{sen}(3x) + \sum_{n=4}^{\infty} a_n \text{sen}(nx)\,.$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-\frac{5}{\pi}x - 5)\text{sen}(nx)dx &= \frac{-10}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x}{\pi} + 1)\text{sen}(nx)dx \\ &= \frac{-10}{\pi^2}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\Big/_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right] + \\ &\quad \frac{10}{\pi n}\cos(nx)\Big/_0^{\pi} \\ &= \frac{10}{\pi n}(-1)^n \;+\; 0 \;+\; \frac{10}{\pi n}((-1)^n \;-\; 1) \\ &= \frac{20}{\pi n}(-1)^n - \frac{10}{\pi n} \\ &= \frac{10}{\pi n}(2(-1)^n - 1)\cdot \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} a_1 - 2 &= -\frac{30}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad a_1 = 2 - \frac{30}{\pi} \\ a_2 &= \frac{5}{\pi} \\ a_3 - 1 &= -\frac{10}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad a_3 = 1 - \frac{10}{\pi} \\ a_n &= \frac{10}{\pi n}(2(-1)^n - 1) \quad \text{para} \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} v(x,t) &= (2-\frac{30}{\pi})e^{-2t}\text{sen}(x)+\frac{5}{\pi}e^{-8t}\text{sen}(2x)+(1-\frac{10}{\pi})e^{-18t}\text{sen}(3x)+ \\ & \sum_{n=4}^{\infty}\frac{10}{\pi n}(2(-1)^n-1)e^{-2n^2t}\text{sen}(nx)\,, \end{aligned}$$

y la solución buscada es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{5}{\pi}x+5+ \\ & (2-\frac{30}{\pi})e^{-2t}\text{sen}(x)+\frac{5}{\pi}e^{-8t}\text{sen}(2x)+(1-\frac{10}{\pi})e^{-18t}\text{sen}(3x)+ \\ & \sum_{n=4}^{\infty}\frac{10}{\pi n}(2(-1)^n-1)e^{-2n^2t}\text{sen}(nx)\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 11.2.2 Determinar la temperatura $u(x,t)$ de un conductor con constante $k=1$ que verifica

$$\begin{gathered} u(x,0) \;=\; \tfrac{a}{2}\,x^2\;+\;1\,, \\ u_x(0,t)\;=\;0\,,\quad u_x(1,t)\;=\;a\,. \end{gathered}$$

Solución. La ecuación diferencial es

$$u_t \;=\; u_{xx}\,.$$

Consideremos un cambio de función de la forma

$$u(x,t)\;=\;Ax^2\;+\;Bt\;+\;v(x,t)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= B\;+\;v_t(x,t)\,, \\ u_x(x,t) &= 2Ax\;+\;v_x(x,t)\,, \\ u_{xx}(x,t) &= 2A\;+\;v_{xx}(x,t)\,. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos

$$B\;+\;v_t(x,t)\;=\;2A\;+\;v_{xx}(x,t)\quad\Longrightarrow\quad B\;=\;2A\,.$$

Por otra parte

$$u_x(0,t)\;=\;0\quad\Longrightarrow\quad v_x(0,t)\;=\;0\,,$$

y como

$$a\;=\;u_x(1,t)\;=\;2A\;+\;v_x(1,t)$$

$$A \;=\; \frac{a}{2} \quad \Longrightarrow \quad v_x(1,t) \;=\; 0\,.$$

Además

$$v(x,0) \;=\; u(x,0) \;-\; \frac{a}{2}x^2 \;=\; \frac{a}{2}\,x^2 \;+\; 1 \;-\; \frac{a}{2}\,x^2 \;=\; 1\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,t) \;=\; \frac{a}{2}\,x^2 \;+\; a\,t \;+\; v(x,t)\,,$$

con $v(x,t)$ que verifica

$$\begin{aligned} v_t &\;=\; v_{xx} \\ v(x,0) &\;=\; 1 \\ v_x(0,t) &\;=\; v_x(1,t) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Por separación de variables, tomamos $v(x,t) \;=\; F(x)\,G(t)$ y se obtiene

$$\frac{G'(t)}{G(t)} \;=\; \frac{F''(x)}{F(x)} \;=\; -\lambda\,.$$

Luego debemos resolver

$$\begin{cases} F''(x) \;+\; \lambda\,F(x) \;=\; 0 \\ F'(0) \;=\; F(1) \;=\; 0 \end{cases}$$

que tiene autovalores $\lambda_n \;=\; n^2\,\pi^2$ y autofunciones $F_n(x) \;=\; \cos(n\pi x)$, para $n = 0, 1, \ldots$

La otra ecuación es

$$G_n'(t) \;+\; n^2\,\pi^2\,G(t) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad G_n(t) \;=\; A_n\,e^{-n^2\,\pi^2\,t}\,.$$

Sea

$$v(x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,e^{-n^2\,\pi^2\,t}\,\cos(n\pi x)\,.$$

La condición

$$1 \;=\; v(x,0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,\cos(n\pi x)$$

implica

$$\begin{aligned} A_n &\;=\; 2\int_0^1 \cos(n\pi s)\,ds \;=\; \begin{cases} 2 & \text{si} \quad n=0 \\ \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}(n\pi s)\Big/_0^1 & \text{si} \quad n\neq 0 \end{cases} \\ &\;=\; \begin{cases} 2 & \text{si} \quad n=0 \\ 0 & \text{si} \quad n\neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$v(x,t) \;=\; 2\,,$$

y luego

$$u(x,t) \;=\; 2 \;+\; \frac{a}{2}\,x^2 \;+\; a\,t\,.$$

Ejercicio 11.2.3 Resolver

$$\begin{aligned} u_t \ - \ u_{xx} \ &= \ x \,, \quad 0 \leq x \leq \pi \,, \quad t \geq 0 \\ u_x(0,t) \ &= \ u(\pi,t) \ = \ 0 \,, \quad t > 0 \\ u(x,0) \ &= \ x \ + \ \frac{\pi^3 - x^3}{6} \,, \quad 0 < x < \pi \end{aligned}$$

Solución. Si

$$u(x,t) \ = \ v(x,t) \ + \ A(x) \,,$$

tenemos

$$u_t \ = \ v_t \,, \quad \text{y} \quad u_{xx} \ = \ v_{xx} \ + \ A''(x) \,.$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$v_t \ - \ v_{xx} \ - \ A''(x) \ = \ x \,,$$

y por lo tanto debemos tener

$$A''(x) \ = \ -x \quad \Longrightarrow \quad A(x) \ = \ -\frac{x^3}{6} \ + \ c_1 x \ + \ c_2 \,.$$

Pero

$$0 \ = \ u_x(0,t) \ = \ v_x(0,t) \ + \ A'(0) \quad \Longrightarrow \quad A'(0) \ = \ 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 \ = \ 0 \,,$$

y

$$0 \ = \ u(\pi,t) \ = \ v(\pi,t) \ + \ A(\pi) \quad \Longrightarrow \quad A(\pi) \ = \ 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 \ = \ \frac{\pi^3}{6} \,.$$

Luego

$$u(x,t) \ = \ v(x,t) \ - \ \frac{x^3}{6} \ + \ \frac{\pi^3}{6} \,,$$

lo que implica

$$v(x,0) \ = \ u(x,0) \ + \ \frac{x^3}{6} \ - \ \frac{\pi^3}{6} \ = \ x \ + \ \frac{\pi^3 - x^3}{6} \ + \ \frac{x^3}{6} \ - \ \frac{\pi^3}{6} \ = \ x \,.$$

Luego $v(x,t)$, debe ser solución de

$$\begin{aligned} v_t \ &= \ v_{xx} \,, \quad 0 \leq x \leq \pi \,, \quad t \geq 0 \\ v_x(0,t) \ &= \ v(\pi,t) \ = \ 0 \,, \quad t > 0 \\ v(x,0) \ &= \ x \,, \quad 0 < x < \pi \end{aligned}$$

Sea $v(x,t) \ = \ M(x)\, N(t)$. Entonces tenemos

$$\frac{N'(t)}{N(t)} \ = \ \frac{M''(x)}{M(x)} \ = \ -\lambda \,,$$

y las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} M''(x) \;+\; \lambda M(x) \;=\; 0 \\ M'(0) \;=\; M(\pi) \;=\; 0 \end{cases} \qquad N'(t) \;+\; \lambda N(t) \;=\; 0\,.$$

Por lo tanto, los autovalores son $\lambda_n \;=\; \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$ y la autofunciones son $M_n(x) \;=\; \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$, para todo entero $n \geq 0$.

Luego la otra ecuación es

$$N_n'(t) \;+\; \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 N_n(t) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad N_n(t) \;=\; a_n\, e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 t}\,.$$

Consideremos entonces la solución formal

$$v(x,t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 t} \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,.$$

Como para $0 < x < \pi$ debemos tener

$$x \;=\; v(x,0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,,$$

$$\begin{aligned} a_n \;&=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,dx \\ &=\; \frac{2}{\pi}\left[x\,\frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\Big/_0^{\pi} \;-\; \frac{2}{2n+1}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,dx\right] \\ &=\; \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1}\,\pi\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) \;+\; \frac{4}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\Big/_0^{\pi}\right] \\ &=\; \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1}\,\pi\,(-1)^n \;-\; \frac{4}{(2n+1)^2}\right]\,. \end{aligned}$$

Luego

$$v(x,t) \;=\; \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2n+1}\,\pi\,(-1)^n \;-\; \frac{2}{(2n+1)^2}\right] e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} u(x,t) \;&=\; -\frac{x^3}{6} \;+\; \frac{\pi^3}{6} \;+ \\ &\quad \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2n+1}\,\pi\,(-1)^n \;-\; \frac{2}{(2n+1)^2}\right] e^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 11.2.4 Una barra homogénea de 3 metros de longitud y difusibilidad 0.3, se saca de un horno de modo que la distribución de temperatura de la barra es $\mathbf{4x+5}$. Rápidamente se aisla su manto y sus extremos se mantienen a $\mathbf{5^0C}$. Hallar la distribución de temperatura $\mathbf{u(x,t)}$ de la barra para cualquier instante $\mathbf{t>0}$ de cualquier punto $\mathbf{x}$ de ella.

Solución. Nuestra ecuación es

$$\begin{array}{rcl} u_t & = & 0.3\,u_{xx}\,, \quad 0<x<3\,, \quad t>0 \\ u(0,t) & = & u(3,t) \;=\; 5\,, \quad t>0 \\ u(x,0) & = & 4x+5\,, \quad 0<x<3 \end{array}$$

Haciendo el cambio $u(x,t)=v(x,t)+A$, obtenemos

$$u_t \;=\; v_t\,, \quad u_{xx} \;=\; v_{xx}\,,$$

$$5 \;=\; u(0,t) \;=\; v(0,t)+A\,5 \;=\; u(3,t) \;=\; v(3,t)+A\,, \quad \text{y}$$
$$4x+5 \;=\; u(x,0) \;=\; v(x,0)+A\,.$$

Luego haciendo $A=5$ nos queda el problema

$$\begin{array}{rcl} v_t & = & 0.3\,v_{xx}\,, \quad 0<x<3\,, \quad t>0 \\ v(0,t) & = & v(3,t) \;=\; 0\,, \quad t>0 \\ v(x,0) & = & 4x\,, \quad 0<x<5 \end{array}$$

Ponemos entonces $v(x,t) \;=\; M(x)\cdot N(t)$, y separando variables obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left\{ \begin{array}{l} M''(x) \;+\; \lambda M(x) \;=\; 0 \\ M(0) \;=\; M(3) \;=\; 0 \end{array} \right. \qquad N'(t)+0.3\,\lambda N(t) \;=\; 0$$

Por lo tanto los autovalores y autofunciones son, respectivamente

$$\lambda_n \;=\; \frac{n^2\pi^2}{3^2}\,, \quad M_n(x) \;=\; \sin(\frac{n\pi}{3}x)\,, \quad n \;=\; 1,2,3,\cdots$$

Reemplazando el valor de $\lambda=\lambda_n$ en la ecuación en t obtenemos

$$N_n'(t) \;+\; \frac{n^2\pi^2}{30}N(t) \;=\; 0\,,$$

cuya solución general es

$$N_n(t) \;=\; a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{30}t}\,.$$

Así tenemos la solución formal

$$v(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{30}t}\sin(\frac{n\pi}{3}x)\,.$$

Imponiendo la condición inicial tenemos

$$4x \;=\; v(x,0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{3}x)$$

lo que implica

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3}\int_0^3 4s\sin(\frac{n\pi}{3}s)ds \\ &= \frac{8}{3}\left[-\frac{3s}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{3}s) \;+\; \frac{9}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{3}s)\right]_0^3 \\ &= -\frac{24}{n\pi}(-1)^n\cdot \end{aligned}$$

Luego

$$v(x,t) \;=\; -\frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2}{30}t}\sin(\frac{n\pi}{3}x)\,,$$

y nuestra solución es

$$u(x,t) \;=\; 5 \;-\; \frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2}{30}t}\sin(\frac{n\pi}{3}x)\,.$$

Capítulo 12

Ecuación de Laplace

12.1 Funciones armónicas

Las ecuaciones elípticas aparecen cuando se estudian procesos estacionarios, es decir, que no dependen del tiempo. Como sabemos, en el caso de ecuaciones lineales de segundo orden definidas en una región Λ del plano x, y son de la forma

$$\Delta u \;=\; A_4(x,y)\,u_x \;+\; A_5(x,y)\,u_y \;+\; g(x,y)\,,$$

donde

$$\Delta u \;=\; u_{xx} \;+\; u_{yy}\,,$$

es el **operador Laplaciano** aplicado a u.

Las más frecuentes son:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{ecuación de Laplace}\,, \\ \Delta u &= A(x,y) && \text{ecuación de Poisson}\,. \end{aligned}$$

Consideraremos sólo problemas definidos en un cierto dominio $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ con ciertas condiciones de contorno dadas sobre su frontera $\partial\Lambda$. Pueden ser de tres tipos:

i) Condiciones de Dirichlet: $u\big/_{\partial\Lambda} = f\,.$

ii) Condiciones de Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n}\big/_{\partial\Lambda} = f\,.$
($\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada según la normal exterior a la frontera)

iii) Condiciones de Robin: $(u + h\,\frac{\partial u}{\partial n})\big/_{\partial\Lambda} = f\,, \text{con}\,, h \in \mathbb{R}.$

Nos restrigiremos básicamente a las del tipo i) para las ecuaciones de Laplace.

Las soluciones clásicas de la ecuación de Laplace en un dominio Λ son las llamadas funciones armónicas.

Definición 12.1.1 *Una función $u : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice* **armónica** *en una región Λ si u tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en Λ y verifica*

$$\Delta u = 0\,.$$

Estas funciones tienen una propiedad muy útil: bajo condiciones bien generales alcanzan su máximo y su mínimo en la frontera de la región. Más precisamnente:

Proposición 12.1.2 *(Principio del Máximo) Sea* u *una función armónica en un dominio bidimensional acotado* Λ *que es continua en* $\overline{\Lambda} = \Lambda \cup \partial\Lambda$ *Entonces* u *alcanza su valor máximo en* $\partial\Lambda$ *.*

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} M &= \text{valor máximo de}\, u \text{ en } \partial\Lambda \quad \text{y} \\ M_0 &= \text{valor máximo de}\, u \text{ en } \overline{\Lambda}\,. \end{aligned}$$

Si $M_0 > M$; es decir, si el valor máximo de u en $\overline{\Lambda}$ no se alcanza en la frontera $\partial\Lambda$, sea $(x_0, y_0) \in \Lambda$ un punto interior de Λ tal que

$$u(x_0, y_0) = \max_{(x,y)\in\overline{\Lambda}} u(x, y) = M_0\,.$$

Sea $R > 0$ tal que $\overline{\Lambda}$ esté contenida en la bola de centro (x_0, y_0) y radio R , y consideremos la función

$$v(x, y) = u(x, y) + \frac{M_0 - M}{2\,R^2}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\,.$$

Por lo tanto, $v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M_0$, y si $(x, y) \in \partial\Lambda$, entonces

$$v(x, y) \leq M + \frac{M_0 - M}{2} = \frac{1}{2}(M_0 + M) < M_0\,.$$

Esto implica que v también alcanza su valor máximo en un punto interior de Λ .

Además,

$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + 2\,\frac{M_0 - M}{R^2} = 2\,\frac{M_0 - M}{R^2} > 0\,.$$

Ahora, como v posee un valor máximo en Λ , la correspondiente matriz Hessiana debe ser negativa definida, es decir,

$$v_{xx} < 0 \qquad \text{y}$$

$$\begin{vmatrix} v_{xx} & v_{xy} \\ v_{xy} & v_{yy} \end{vmatrix} > 0\,,$$

Por lo tanto

$$v_{xx} \cdot v_{yy} > 0 \quad \Longrightarrow \quad v_{yy} < 0 \quad \Longrightarrow \quad v_{xx} + v_{yy} < 0\,,$$

lo cual es una contradicción. Luego el valor máximo de u tiene que alcanzarse en $\partial\Lambda$.

Corolario 12.1.3 *(Principio del Mínimo) Sea u una función armónica en un dominio bidimensional acotado Λ que es continua en $\overline{\Lambda}$. Entonces u alcanza su valor mínimo en $\partial\Lambda$.*

Demostración. Aplicar la proposición anterior a $-u$.

Observación 12.1.4 *Estos resultados son válidos para dimensiones mayores.*

Consideremos el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u/_{\partial\Lambda} &= f\,, \end{aligned} \tag{12.1}$$

donde $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado.

Proposición 12.1.5 *La solución de (12.1), si existe, es única.*

Demostración. Sean u_1, u_2 soluciones de (12.1). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta u_2 = 0 \\ u_1/_{\partial\Lambda} &= u_2/_{\partial\Lambda} = f\,. \end{aligned}$$

Ahora como, u_1 y u_2 son armónicas en Λ, también $w = u_1 - u_2$ es armónica en Λ y $w/_{\partial\Lambda} = 0$. Por lo tanto $w = 0$ en Λ, ya que w alcanza su máximo y su mínimo en $\partial\Lambda$. Esto implica que $u_1 = u_2$.

Proposición 12.1.6 *La solución de (12.1), si existe, es estable.*

Demostración. Sean v_1 y v_2 armónicas en Λ tales que

$$v_1/_{\partial\Lambda} = f_1 \qquad \text{y} \qquad v_2/_{\partial\Lambda} = f_2\,.$$

Entonces $w = v_1 - v_2$ es armónica y $w/_{\partial\Lambda} = f_1 - f_2$.

Si consideramos la norma del supremo,

$$|| \, f_1 - f_2 \, || = \max_{(x,y)\in\overline{\Lambda}} | \, f_1(x,y) - f_2(x,y) \, | \,,$$

tenemos

$$\max_{(x,y)\in\overline{\Lambda}} w(x,y) \leq \|f_1 - f_2\| \quad \text{(Principio del Máximo)}$$

y

$$\min_{(x,y)\in\overline{\Lambda}} w(x,y) \geq -\|f_1 - f_2\| \quad \text{(Principio del Mínimo)}\,.$$

Por lo tanto

$$| \, w(x,y) \, | \leq \ \|f_1 - f_2\| \quad \forall (x,y) \in \Lambda\,,$$

lo que implica

$$| \, v_1(x,y) - v_2(x,y) \, | \leq \ \|f_1 - f_2\| \quad \forall (x,y) \in \Lambda\,.$$

Corolario 12.1.7 *Sea* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones armónicas en un dominio acotado* Λ *de* $\mathbb{R}^2$ *, que son continuas en* $\overline{\Lambda}$*, y sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de funciones tales que:*

$$u_n/_{\partial\Lambda} = f_n\,.$$

Entonces, si $f_n \longrightarrow f$ *uniformemente en* $\partial\Lambda$*, tenemos que* $u_n \longrightarrow u$ *uniformemente en* $\overline{\Lambda}$*.*

Demostración. Como $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en $\partial\Lambda$, entonces dado $\epsilon > 0\,, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, se tiene $\|f_n - f_m\| < \epsilon$.
Por lo tanto, $\forall n, m > N$ tenemos que $\|u_n - u_m\| < \epsilon$, lo cual implica que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y, por lo tanto, convergente.

12.2 Ecuación de Laplace en el disco

Consideremos el problema

$$\begin{array}{lcl} \Delta u & = & 0\,, \qquad 0 \le r < a\,, \quad 0 \le \theta < 2\pi\,, \\ u(a,\theta) & = & f(\theta)\,, \\ \lim_{r\to 0} u(r,\theta) & < & \infty\,. \end{array}$$

Para poder usar separación de variables, ocuparemos coordenadas polares. Sea

$$x = r\,\cos(\theta)\,, \quad y = r\,\mathrm{sen}(\theta)\,.$$

Entonces

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \theta = \arctan(\frac{y}{x})\,,$$

y tenemos las derivadas

$$\begin{array}{lcl} r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & , & r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \\ \theta_x = \frac{-y}{x^2+y^2} & , & \theta_y = \frac{x}{x^2+y^2}\,, \\ r_{xx} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & , & r_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \\ \theta_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & , & \theta_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,. \end{array}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= u_{rr}\,(r_x)^2 + 2u_{r\theta}\,r_x\,\theta_x + u_{\theta\theta}\,(\theta_x)^2 + u_r\,r_{xx} + u_\theta\,\theta_{xx} \\
&= u_{rr}\,\frac{x^2}{x^2+y^2} - 2u_{r\theta}\,\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + u_{\theta\theta}\,\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \\
&\quad u_r\,\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + u_\theta\,\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \\
u_{yy} &= u_{rr}\,(r_y)^2 + 2u_{r\theta}\,r_y\,\theta_y + u_{\theta\theta}\,(\theta_y)^2 + u_r\,r_{yy} + u_\theta\,\theta_{yy} \\
&= u_{rr}\,\frac{y^2}{x^2+y^2} + 2u_{r\theta}\,\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + u_{\theta\theta}\,\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \\
&\quad u_r\,\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - u_\theta\,\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,,
\end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= u_{rr} + \frac{1}{x^2+y^2}\,u_{\theta\theta} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,u_r \\
&= u_{rr} + \frac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\,u_r\,.
\end{aligned}$$

Así el operador Laplaciano en coordenadas polares asume la forma

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\,.$$

Además debemos imponer las condiciones de periodicidad:

$$u(r,0) \;=\; u(r,2\pi)\,, \quad u_\theta(r,0) \;=\; u_\theta(r,2\pi)\,.$$

Así nuestro problema es:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,; \quad 0 \le r < a\,; \quad 0 < \theta < 2\pi\,, \\
u(a,\theta) &= f(\theta)\,; \quad \lim_{r\to 0} u(r,\theta) < \infty\,, \\
u(r,0) &= u(r,2\pi)\,; \quad 0 < r < a\,, \\
u_\theta(r,0) &= u_\theta(r,2\pi)\,; \quad 0 < r < a\,.
\end{aligned}$$

Sea $u(r,\theta) = M(r)\cdot N(\theta)$. Entonces debemos tener:

$$\begin{aligned}
r^2 M''(r) + rM'(r) + \lambda M(r) &= 0\,, \\
N''(\theta) &= \lambda N(\theta)\,.
\end{aligned}$$

Como las condiciones de frontera en la variable r no son homogéneas, utilizamos $N(\theta)$ para definir el problema de autovalores. Se tiene:

$$\begin{aligned}
u(r,0) = u(r,2\pi) &\implies M(r)\cdot[N(0) - N(2\pi)] = 0 \implies N(0) = N(2\pi)\,, \\
u_\theta(r,0) = u_\theta(r,2\pi) &\implies N'(0) = N'(2\pi)\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $N(\theta)$ debe ser solución de autovalores:

$$\left.\begin{array}{rcl} N''(\theta) & = & \lambda N(\theta)\,, \\ N(0) & = & N(2\pi)\,, \\ N'(0) & = & N'(2\pi)\,, \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son:

$$\left.\begin{array}{rcl} N_0(\theta) & = & 1\,, \\ N_n^{(1)}(\theta) & = & \cos(n\theta)\,, \\ N_n^{(2)}(\theta) & = & \operatorname{sen}(n\theta)\,, \end{array}\right\} \quad \lambda_n = -n^2\,, n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup 0\,.$$

Observe que el autovalor nulo tiene asociada una autofunción, mientras que para los restantes existen dos.

Reemplazando en la ecuación diferencial para r, se obtiene:

$$r^2 M_n''(r) + r M_n'(r) - n^2 M_n(r) = 0,\ ,\forall n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{12.2}$$

Para $n = 0$, la solución es

$$M_0(r) = C_0 + D_0 \ln(r)\,.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, la ecuación (12.2) es una ecuación de Euler cuya solución es:

$$M_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}\,.$$

Entonces, cada uno de los productos:

$$C_0 + D_0 \ln(r)\,, \quad (E_n r^n + F_n r^{-n})\operatorname{sen}(n\theta)\,, \quad (C_n r^n + D_n r^{-n})\cos(n\theta)$$

son soluciones de la E.D.P. que verifica las condiciones de periodicidad.

Como antes, construimos la solución mediante una serie formal:

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2} C_0 + D_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n\, r^n + D_n\, r^{-n}) \cos(n\theta) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n\, r^n + F_n\, r^{-n}) \operatorname{sen}(n\theta)\,, \end{aligned} \tag{12.3}$$

donde las constantes arbitrarias $C_n\,, D_n\,, E_n\,, F_n$ se determinan de las condiciones de frontera:

$$\lim_{r\to 0} u(r,\theta) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} D_0 = & & 0 \\ D_n = & 0\,, & n \in \mathbb{N}\,, \\ F_n = & 0\,, & n \in \mathbb{N}\,. \end{array}\right.$$

$$f(\theta) = u(a,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n a^n \operatorname{sen}(n\theta)$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds \\
C_n &= \tfrac{a^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds &= a^{-n}c_n \\
E_n &= \tfrac{a^{-n}}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\mathrm{sen}(ns)ds &= a^{-n}d_n
\end{aligned}
$$

Se obtiene finalmente:

$$
u(r,\theta) = \frac{1}{2}\,C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\,[c_n\cos(n\theta) + d_n\mathrm{sen}(n\theta)]\,. \tag{12.4}
$$

12.3 Convergencia de la Serie de Fourier: Núcleo de Poisson

Supongamos $f(\theta)$ continua en $[0,2\pi]$. Si $\mid f(\theta)\mid \leq \frac{k}{2}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mid C_0\mid &= \mid \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds \mid <\ k\,, \quad \text{y} \\
\mid c_n\mid &= \mid \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds \mid <\ k\,,\ \forall n\in\mathbb{N} \\
\mid d_n\mid &= \mid \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\mathrm{sen}(ns)ds \mid <\ k\,,\ \forall n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Consideremos entomces la sucesión de funciones $(u_n(r,\theta))_{n\in\mathbb{N}^*}$ definida por:

$$
u_0 = \frac{C_0}{2}\,, \qquad u_n(r,\theta) = \left(\frac{r}{a}\right)^n(c_n\cos(n\theta) + d_n\mathrm{sen}(n\theta))\,.
$$

Entonces para todo $n\in\mathbb{N}^*$ se tiene

$$
\mid u_n(r,\theta)\mid <\ 2\,k\,{\rho_0}^n \quad \text{para} \quad 0 \leq \frac{r}{a} \leq \rho_0 < 1\,.
$$

Luego, por el Criterio de Convergencia de Weierstrass, la serie

$$
\sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta)
$$

converge unifirmemente y absolutamente en cualquier disco cerrado contenido en el disco abierto de radio a. Por lo tanto, $u(r,\theta)$ definida como en (12.4), está bien definida.

Por otra parte para todo $n\in\mathbb{N}^*$,

$$
\left|\frac{\partial u_n}{\partial r}\right| \;=\; \left|\frac{n}{a}\,\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}(c_n\cos(n\theta) + d_n\mathrm{sen}(n\theta))\right| \;<\; 2\,k\,\frac{n}{a}\,\rho_0^{n-1}\,.
$$

Esto implica que

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial r}\,(r,\theta)
$$

converge absolutamente y uniformemente en todo disco cerrado contenido en el disco abierto de radio a.

Lo mismo sucede con las series que se obtienen derivando dos veces, término a término, con respecto a r y θ, respectivamente.

Luego, como cada $u_n(r,\theta)$ es armónica, tenemos que $u(r,\theta)$ definida como en (12.4), es armónica en todo punto interior del disco de radio a.

Reemplazando los valores de C_0, c_n, d_n en (12.4) tenemos

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\int_0^{2\pi} f(s)\cos(ns)ds\right)\cos(n\theta) \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(\int_0^{2\pi} f(s)\mathrm{sen}(ns)ds\right)\mathrm{sen}(n\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} f(s)[\cos(ns)\ cos(n\theta) + \mathrm{sen}(ns)\mathrm{sen}(n\theta)]ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\theta - s))\right] f(s)ds
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
1\ +\ 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n(\theta-s)) &= 1\ +\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(e^{n(\theta-s)\imath} + e^{-n(\theta-s)\imath}\right) \\
&= 1\ +\ \frac{\frac{r}{a}e^{(\theta-s)\imath}}{1-\frac{r}{a}e^{(\theta-s)\imath}}\ +\ \frac{\frac{r}{a}e^{-(\theta-s)\imath}}{1-\frac{r}{a}e^{-(\theta-s)\imath}} \\
&= \frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-s)+r^2}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-s)+r^2}\,f(s)ds\,.$$

Observación 12.3.1

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-s)+r^2}ds\ =\ 1\,.$$

En efecto, si $f(\theta)\equiv 1$, los coeficientes de Fourier son $c_0 = 2$, $c_n = d_n = 0$, lo que implica que $u(r,\theta)\equiv 1$, para $0 < r < a$. Entonces

$$u(r,\theta) - f(\theta)\ =\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-s)+r^2}\,(f(s)-f(\theta))\,ds\,.$$

Como f es continua en $[0, 2\pi]$, lo es uniformemente. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|\theta - s\| < \delta \implies \|f(\theta) - f(s)\| < \epsilon \,.$$

Por otra parte, si $\|\theta - s\| \geq \delta$, se tiene

$$\lim_{r \to a} \frac{(a^2 - r^2)}{(a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2)} = 0 \,.$$

Por lo tanto, existe r_0 tal que, si $0 \leq r_0 \leq r < a$ y $\|\theta - s\| \geq \delta$, entonces

$$\frac{(a^2 - r^2)}{(a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2)} < \epsilon \,.$$

Luego para $0 \leq r_0 \leq r < a$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mid u(r,\theta) - f(\theta) \mid \;&\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta - s| \geq \delta} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2} \mid f(\theta) - f(s) \mid \, ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta - s| < \delta} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2} \mid f(\theta) - f(s) \mid \, ds \\
&\leq\; \frac{1}{2\pi}\left[2\pi\varepsilon \max_{\theta \in [0,2\pi]} \mid f(\theta) \mid\right] + \varepsilon \\
&=\; \varepsilon\left[1 + 2\max_{\theta \in [0,2\pi]} \mid f(\theta) \mid\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{r \to a} u(r,\theta) = f(\theta) \,.$$

Así hemos demostrado el siguiente resultado.

Proposición 12.3.2 *Si f es continua en $[0, 2\pi]$, existe una única función armónica $u(r,\theta)$ que verifica $u(a,\theta) = f(\theta)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Esta función es:*

$$u(r,\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2} f(s)\, ds \;=\; (P_r * f)(\theta) \,,$$

donde

$$P_r(\theta) \;=\; \frac{1}{2\pi}\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta) + r^2} \qquad (\textit{núcleo de Poisson})$$

Ejemplo 12.3.3 Resuelva la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned}
\Delta u \;&=\; 0\,; \quad 0 < r < 1\,; \quad 0 < \theta < 2\pi \\
u(1,\theta) \;&=\; \theta\,, \quad \lim_{r \to 0} u(r,\theta) < \infty \,.
\end{aligned}$$

Solución. Entonces nuestra solución es de la forma (12.4) con

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s\,ds \;=\; 2\pi\,, \\ c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s\cos(ns)\,ds \;=\; 0 \\ d_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s\mathrm{sen}(ns)\,ds \;=\; -\frac{2}{n}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(r,\theta) \;=\; \pi \;-\; 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\,\mathrm{sen}(n\theta)\,.$$

Ejemplo 12.3.4 Resuelva la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,; \quad 0<r<1\,; \quad 0<\theta<2\pi \\ u(1,\theta) &= sen^3(\theta)\,, \quad \lim_{r\to 0} u(r,\theta) < \infty\,. \end{aligned}$$

Solución. Como

$$\mathrm{sen}^3(\theta) = \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(\theta) \;-\; \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(3\theta)\,,$$

comparando con (12.4) tenemos

$$C_0 = 0\,; \quad c_n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

y

$$d_n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{1,3\}\,, \quad d_1 = \frac{3}{4}\,; \quad d_3 = -\frac{1}{4}\,.$$

Por lo tanto,

$$u(r,\theta) = \frac{3}{4}\,r\,\mathrm{sen}(\theta) \;-\; \frac{1}{4}\,r^3\,\mathrm{sen}(3\theta)\,.$$

Ejemplo 12.3.5 Resuelva la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,; \quad 1<r<3\,; \quad 0\le\theta<2\pi \\ u(1,\theta) &= 0\,, \\ u(3,\theta) &= \cos(3\theta) + sen(5\theta)\,. \end{aligned}$$

Solución. Nuestra solución formal es

$$\begin{aligned} u(r,\theta) \;&=\; \frac{1}{2}\,C_0 \;+\; D_0\ln(r) \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\,r^n \;+\; D_n\,r^{-n})\,\cos(n\theta) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}(E_n\,r^n \;+\; F_n\,r^{-n})\,\mathrm{sen}(n\theta)\,. \end{aligned}$$

Para calcular el valor de las constantes imponenmos las condiciones de frontera.

$$\begin{aligned} 0 \ = \ u(1,\theta) \ &= \ \frac{1}{2}\,C_0 \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \ + \ D_n)\,\cos(n\theta) \\ &+ \ \sum_{n=1}^{\infty}(E_n \ + \ F_n)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,, \end{aligned}$$

implica

$$C_0 \ = \ 0\,, \quad D_n \ = \ -C_n\,, \quad F_n \ = \ -E_n\,, \quad \forall n \geq 1\,.$$

Además

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + \mathrm{sen}(5\theta) \ = \ u(3,\theta) \ &= \ D_0\ln(3) \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}(3^n \ - \ 3^{-n})\,C_n\,\cos(n\theta) \\ &+ \ \sum_{n=1}^{\infty}(3^n \ + \ 3^{-n})\,E_n\,\mathrm{sen}(n\theta)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0 \ = \ 0\,, \qquad C_3 \ &= \ \frac{1}{3^3 - 3^{-3}}\,, \quad C_n \ = \ 0\,, \quad \forall n \neq 3\,, \\ E_5 \ &= \ \frac{1}{3^5 - 3^{-5}}\,, \quad E_n \ = \ 0\,, \quad \forall n \neq 5\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es

$$u(r,\theta) \ = \ \frac{1}{3^3 - 3^{-3}}\,(r^3 \ - \ r^{-3})\,\cos(3\theta) \ + \ \frac{1}{3^5 - 3^{-5}}\,(r^5 \ - \ r^{-5})\,\mathrm{sen}(5\theta)\,.$$

12.4 Ecuación de Laplace en un Rectángulo

$$\begin{aligned} \Delta u \ &= \ 0\,;0 < x < a\,;0 < y < b \\ u(0,y) \ &= \ f_1(y)\,;u(a,y) = f_2(y)\,;0 < y < b \\ u(x,0) \ &= \ f_3(x)\,;u(x,b) = f_4(x)\,;0 < x < a\,. \end{aligned}$$

Como en este problema ninguna de las condiciones de frontera es homogénea, descomponemos en los siguientes dos problemas.

1. Condiciones de frontera homog'eneas en la variable x.

$$\begin{aligned} \Delta u^I \ &= \ 0\,;0 < x < a\,;0 < y < b \\ u^I(0,y) \ &= \ 0 = u^I(a,y)\,;0 < y < b \\ u^I(x,0) \ &= \ f_3(x)\,;u^I(x,b) = f_4(x)\,;0 < x < a\,. \end{aligned}$$

2. Condiciones de frontera homog'eneas en la variable y.

$$\begin{aligned} \Delta u^{II} &= 0\,; 0 < x < a\,; 0 < y < b \\ u^{II}(0,y) &= f_1(y)\,; u^{II}(a,y) = f_2(y)\,; 0 < y < b \\ u^{II}(x,0) &= 0 = u^{II}(x,b)\,; 0 < x < a\,. \end{aligned}$$

Cada uno se resuelve mediante separación de variables y, obtenida la solución en ambos casos, la suma será solución de nuestro problema.

Problema 1 $u^I(x,y) = M(x) \cdot N(y)$
Obtenemos

$$\begin{aligned} M''(x) &= -\lambda M(x) \\ N''(y) - \lambda N(y) &= 0\,. \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones de frontera para x, obtenemos el problema regular de Sturm-Liouville

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} M''(x) &=& -\lambda M(x) && \\ M(0) &=& M(a) &=& 0\,. \end{array} \right.$$

Por lo tanto,

$$M_n(x) = \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}\,x)\,; \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}\,, \mathrm{con} n \in \mathbb{N}\,.$$

Sustituyendo,

$$N_n''(y) - (\frac{n^2\pi^2}{a^2}) \cdot N_n(y0 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$N_n(y) = C_n \cosh(\frac{n\pi}{a}\,y) + D_n \mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}\,y)\,.$$

entonces los productos $u_n(x,y) = M_n(x)N_n(y) \mathrm{con} n \in \mathbb{N}$, son soluciones de la E.D.P. que verifica las condiciones de contorno en x.

Ponemos como siempre

$$u^I(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cosh(\frac{n\pi}{a}\,y) + D_n \mathrm{senh}(\frac{n\pi}{a}\,y) \right) \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}\,x)\,.$$

Para determinar $C_n \mathrm{y} D_n$, $\mathrm{con} n \in \mathbb{N}$, imponemos las condiciones de contorno en y.

$$u^I(x,0) = f_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}\,x)$$

$$\Longrightarrow C_n = \frac{2}{a} \int_0^a f_3(s) \mathrm{sen}(\frac{n\pi s}{a}) ds = a_n^{(1)}$$

$$u^I(x,b) = f_4(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cosh(\frac{n\pi b}{a}) + D_n \mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})\right)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{a}\,x)$$

Luego,

$$\begin{aligned} C_n \cosh(\frac{n\pi b}{a}) + D_n \mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a}) &= \frac{2}{a}\int_0^a f_4(s)\mathrm{sen}(\frac{n\pi s}{a})ds \\ &= a_n^{(2)} \end{aligned}$$

De donde,

$$D_n = \frac{a_n^{(2)} - a_n^{(1)}\cosh(\frac{n\pi b}{a})}{\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\,.$$

Así tenemos que,

$$u^I(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^{(1)}\cosh(\frac{n\pi y}{a}) + \frac{a_n^{(2)} - a_n^{(1)}\cosh(\frac{n\pi b}{a})}{\mathrm{senh}(\frac{n\pi b}{a})}\right]\cdot \mathrm{sen}(\frac{n\pi x}{a})\,,$$

donde

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &= \frac{2}{a}\int_0^a f_3(s)\mathrm{sen}(\frac{n\pi s}{a})ds \\ a_n^{(2)} &= \frac{2}{a}\int_0^a f_4(s)\mathrm{sen}(\frac{n\pi s}{a})ds\,. \end{aligned}$$

Observación 12.4.1 El problema 2 se resuelve de manera similar.

12.5 Ejercicios resueltos

Ejercicio 12.5.1 Resuelva la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,; \quad 0 < r < 1\,; \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(1,\theta) &= \theta(\theta - 2\pi)\,, \quad \lim_{r\to 0} u(r,\theta) < \infty\,. \end{aligned}$$

Solución. Nuestra solución es de la forma

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}\,C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left[c_n\cos(n\theta) + d_n\mathrm{sen}(n\theta)\right],$$

con

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(s-2\pi)\,ds \;=\; \frac{8}{3}\pi^2 - 4\pi\,,\\
c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(s-2\pi)\cos(ns)\,ds\\
&= \frac{1}{\pi}\left[s(s-2\pi)\,\frac{\operatorname{sen}(ns)}{n}\Big/_0^{2\pi} \;-\; \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} 2(s-\pi)\operatorname{sen}(ns)\,ds\right]\\
&= -\frac{2}{n\,\pi}\left[-(s-\pi)\,\frac{\cos(ns)}{n}\Big/_0^{2\pi} \;+\; \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos(ns)\,ds\right]\\
&= \frac{2}{n^2\,\pi}\left[\pi+\pi+\frac{1\operatorname{sen}(ns)}{n}\Big/_0^{2\pi}\right] \;=\; \frac{4}{n^2}\\
d_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} s(s-2\pi)\operatorname{sen}(ns)\,ds\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-s(s-2\pi)\,\frac{\cos(ns)}{n}\Big/_0^{2\pi} \;+\; \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} 2(s-\pi)\,\cos(ns)\,ds\right]\\
&= \frac{2}{n\,\pi}\left[(s-\pi)\,\frac{\operatorname{sen}(ns)}{n}\Big/_0^{2\pi} \;-\; \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(ns)\,ds\right] \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$u(r,\theta) \;=\; \frac{4}{3}\pi^2 - 2\pi \;+\; 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^2}\,\cos(n\theta)\,.$$

Ejercicio 12.5.2 Resuelva la ecuación de Laplace

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,; \quad 0 < r < a\,; \quad 0 \le \theta < \tfrac{\pi}{2}\\
u(a,\theta) &= f(\theta) \;=\; (\theta - \tfrac{\pi}{3})sen(3\theta)\,,\\
u(r,0) &= u(r,\tfrac{\pi}{2}) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Solución. Observe que en este caso no tenemos las condiciones de periodicidad de los ejercicios anteriores por lo que no podemos usar directamente la solución formal 12.3. Poniendo $u(r,\theta) \;=\; M(r)\,N(\theta)$, obtenemos las ecuaciones

$$
\left\{\begin{array}{c} r^2M''(r) \;+\; rM'(r) \;+\; \lambda M(r) \;=\; 0\\ \lim_{r\to 0} u(r,\theta) = 0\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{l} N''(\theta) - \lambda N(\theta) \;=\; 0\\ N(0) \;=\; N(\tfrac{\pi}{2}) \;=\; 0\end{array}\right.
$$

Por lo tanto las autofunciones y autovalores son para $n \ge 1$, respectivamente

$$N_n(\theta) \;=\; \operatorname{sen}(2n\theta)\,, \quad \lambda_n \;=\; 4n^2\,.$$

Reemplazando el valor de $\lambda = \lambda_n$ en la ecuación en r obtenemos

$$r^2M_n''(r) \;+\; rM_n'(r) \;-\; 4n^2M_n(r) \;=\; 0$$

cuya solución general es

$$M_n(r) \;=\; a_n r^{2n} \;+\; b_n r^{-2n}\,.$$

Nuestra solución formal es

$$u(r,\theta) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, r^{2n} \;+\; b_n\, r^{-2n})\,\mathrm{sen}(2n\theta)\,.$$

Para que la solución sea acotada cuando $r \to 0$ debemos tener $b_n \;=\; 0 \quad \forall\, n \geq 1$. Luego

$$u(r,\theta) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, r^{2n}\,\mathrm{sen}(2n\theta)]\,.$$

La condición

$$f(\theta) \;=\; u(a,\theta) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, a^{2n}\,\mathrm{sen}(2n\theta)\,,$$

implica

$$a_n\, a^{2n} \;=\; \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta - \frac{\pi}{3})\,\mathrm{sen}(3\theta)\,\mathrm{sen}(2n\theta)\,.$$

Como

$$\mathrm{sen}(3\theta)\,\mathrm{sen}(2n\theta) \;=\; \frac{1}{2}\,[\cos((2n-3)\theta) \;-\; \cos((2n+3)\theta)\,,$$

tenemos

$$\begin{aligned} a_n\, a^{2n} \;&=\; \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta - \frac{\pi}{3})\;\cos((2n-3)\theta)\,d\theta \;-\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta - \frac{\pi}{3})\;\cos((2n+3)\theta)\,d\theta\right] \\ &=\; -\frac{8\,(-1)^n}{\pi}\,\frac{n}{4n^2-9}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto nuestra solución es

$$u(r,\theta) \;=-\frac{8}{\pi}\;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{4n^2-9}\;\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\;\mathrm{sen}(2n\theta)\,.$$

Ejercicio 12.5.3 Resolver el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < y < \pi$$

bajo las condiciones

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = u(x,\pi) = 0\,, u(x,0) = x\,.$$

Solución. Poniendo $u(x,y) = M(x)N(y)$, y separando variables obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} M''(x) + \lambda M(x) = 0 \\ M'(0) = M'(\pi) = 0 \end{cases} \qquad N''(y) - \lambda N(y) = 0\,.$$

Los correspondientes autovalores y autofunciones son entonces respectivamente $\lambda_n = n^2$ y $M_n(x) = \cos(nx)$, $n \geq 1$.

De esta forma la ecuación en y queda de la forma

$$N_n''(y) - n^2 N_n(y) = 0\,, \quad n \geq 1$$

cuya solución general es

$$N_n(x) = a_n \cosh(ny) + b_n \operatorname{senh}(ny)\,.$$

Luego nuestra solución formal es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh(ny) + b_n \operatorname{senh}(ny)] \cos(nx)\,.$$

Imponiendo las condiciones iniciales $u(x,0) = x$ y $u(x,\pi) = 0$, tenemos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

y

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh(n\pi) + b_n \operatorname{senh}(n\pi)] \cos(nx)\,.$$

Por lo tanto

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2}((-1)^n - 1)$$

y

$$b_n = -a_n \cdot \frac{\cosh(n\pi)}{\operatorname{senh}(n\pi)}\,.$$

De esta forma

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}((-1)^n - 1)[\cosh(ny) - \frac{\cosh(n\pi)}{\operatorname{senh}(n\pi)} \operatorname{senh}(ny)] \cos(nx)\,,$$

o bien

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}((-1)^n - 1) \frac{\operatorname{senh}(n(\pi - y))}{\operatorname{senh}(n\pi)} \cos(nx)\,.$$

Ejercicio 12.5.4 Encuentre la solución de la ecuación de Laplace

$$\begin{array}{l} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1, \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(x,0) = \cos(x) - \cos(3x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(x,1) = \cos(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{array}$$

Solución. Como tenemos las mismas condiciones de frontera homogénea en la variable x, tenemos la solución formal

$$u(x,y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh(ny) + b_n \mathrm{senh}(ny)] \cos(nx)\,.$$

Entonces

$$\cos(x) - \cos(3x) \;=\; u(x,0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\,,$$

implica

$$a_1 \;=\; 1\,,\; a_3 \;=\; -1 \quad \text{y} \quad a_n \;=\; 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} - \{1,3\}\,.$$

Además

$$\begin{aligned} \cos(2x) \;=\; u(x,1) \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh(n) + b_n \mathrm{senh}(n)]\, \cos(nx) \\ &=\; [\cosh(1) + b_1 \,\mathrm{senh}(1)]\, \cos(x) \;+\; b_2 \,\mathrm{senh}(2)\, \cos(2x) \\ &\quad + [-\cosh(3) + b_3 \,\mathrm{senh}(3)]\, \cos(3x) \;+\; \sum_{n=4}^{\infty} b_n \,\mathrm{senh}(n)\, \cos(nx)\,, \end{aligned}$$

implica

$$b_1 \;=\; -\frac{\cosh(1)}{\mathrm{senh}(1)}\,, \quad b_2 \;=\; -\frac{1}{\mathrm{senh}(2)}\,, \quad b_3 \;=\; \frac{\cosh(3)}{\mathrm{senh}(3)} \quad \text{y} \quad b_n \;=\; 0 \quad \forall\, n \geq 4\,.$$

Luego nuestra solución es

$$\begin{aligned} u(x,y) \;=\; & [\cosh(y) - \frac{\cosh(1)}{\mathrm{senh}(1)} \mathrm{senh}(y)]\, \cos(x) \;-\; \frac{1}{\mathrm{senh}(2)} \mathrm{senh}(2y)\, \cos(2x) \\ & + [-\cosh(3y) + \frac{\cosh(3)}{\mathrm{senh}(3)} \mathrm{senh}(3y)]\, \cos(3x)\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 12.5.5 Encuentre la solución de la ecuación de Laplace correspondiente a una región exterior

$$\begin{array}{lcl} \Delta u & = & 0\,, \qquad\qquad r > 1\,, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(r,0) & = & u(r,2\boldsymbol{\pi})\,, \quad u_\theta(r,0) \;=\; u_\theta(r,2\pi)\,, \quad r > 1 \\ u_r(1,\theta) & = & \cos^4(\theta) \;-\; \frac{3}{8}\,, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ u(r,\theta) & & \textit{permanece acotada cuando} \quad r \to \infty \end{array}$$

Solución. Poniendo $u(r,\theta) = M(r)\cdot N(\theta)$ y separando variables obtenemos las ecuaciones

$$r^2M''(r) + rM'(r) + \lambda M(r) = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{c} N''(\theta) - \lambda N(\theta) = 0 \\ N(0) = N(2\pi)\,, \quad N'(0) = N'(2\pi) \end{array} \right.$$

Por lo tanto las autofunciones y autovalores son, respectivamente

$$\left. \begin{array}{lcl} N_0(\theta) & = & 1 \\ N_n^{(1)}(\theta) & = & \cos(n\theta) \\ N_n^{(2)}(\theta) & = & \operatorname{sen}(n\theta) \end{array} \right\} \quad \lambda_n = -n^2\,, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

Reemplazando el valor de $\lambda = \lambda_n$ en la ecuación en r obtenemos

$$r^2M_n''(r) + rM_n'(r) - n^2M_n(r) = 0$$

cuya solución general es

$$\begin{array}{lcl} M_0(r) & = & C_0 + D_0\ln(r)\,, \quad \text{para} \quad n=0\,, \quad \text{y} \\ M_n(r) & = & C_nr^n + D_nr^{-n}\,, \quad \text{para} \quad n \geq 1\,. \end{array}$$

De esta forma tenemos la solución formal

$$\begin{aligned} u(r,\theta) = {} & \frac{1}{2}(C_0 + D_0\ln(r)) + \sum_{n=1}^{\infty}(C_nr^n + D_nr^{-n})\cos(n\theta) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}(E_nr^n + F_nr^{-n})\operatorname{sen}(n\theta)\,. \end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} u(r,\theta) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} D_0 & = & 0\,, \\ C_n & = & 0\,, \quad n\geq 1\,, \\ E_n & = & 0\,, \quad n \geq 1\,. \end{array} \right.$$

Luego

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} D_nr^{-n}\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} F_nr^{-n}\operatorname{sen}(n\theta) \qquad \text{y}$$

$$u_r(r,\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} nD_nr^{-n-1}\cos(n\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} nF_nr^{-n-1}\operatorname{sen}(n\theta)\,.$$

Luego debemos tener

$$\cos^4(\theta) - \frac{3}{8} = -\sum_{n=1}^{\infty} nD_n\cos(n\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} nF_n\operatorname{sen}(n\theta)\,.$$

Pero

$$\begin{aligned}\cos^4(\theta)-\frac{3}{8} &= \frac{1}{4}(1+\cos(2\theta))^2-\frac{3}{8} = \frac{1}{4}(1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta))-\frac{3}{8}\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}(1+\cos(4\theta))-\frac{3}{8}\\ &= \frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}\cos(4\theta)\,.\end{aligned}$$

Luego

$$D_1 = 0\,,\quad -2D_2 = \frac{1}{2}\,,\quad D_3 = 0\,,\quad -4D_4 = \frac{1}{8}\,,\quad D_n = 0\,,\quad n\geq 5\,,$$

y

$$F_n = 0\,,\quad n\geq 1\,.$$

Entonces nuestra solución es

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}C_0-\frac{1}{4}r^{-2}\cos(2\theta)-\frac{1}{32}r^{-4}\cos(4\theta)\,.$$

Ejercicio 12.5.6 Sea A una constante. Resolver la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad 0<x<\pi\,,\ 0<y<1\\ &u(x,0)=Ax,\ u(x,1)=A \qquad 0<x<\pi\\ &u(0,y)=u(\pi,y)=Ay \qquad 0<y<1\,.\end{aligned}$$

Solución. Para obtener condiciones de frontera homogénea en x, hacemos un cambio de función de la forma

$$u(x,y) = Mx + Ny + v(x,y)\,.$$

Entonces

$$A\,y = u(0,y) = Ny + v(0,y) \implies N = A\,,$$

y

$$Ay = u(\pi,y) = M\pi + Ay + v(\pi,y) \implies M = 0\,.$$

Así el cambio de función es

$$u(x,y) = Ay + v(x,y)\,.$$

Además

$$v(x,0) = u(x,0) = A\,x\,,$$

y

$$v(x,1) = u(x,1) - A = 0\,.$$

Luego nuestro problema es

$$\begin{array}{l} v_{xx} + v_{yy} = 0 \qquad 0 < x < \pi \, , \, 0 < y < 1 \\ v(x,0) = A\,x \, , \, v(x,1) = 0 \qquad 0 < x < \pi \\ v(0,y) = v(\pi,y) = 0 \qquad 0 < y < 1 \, . \end{array}$$

Poniendo $v(x,y) = M(x)N(y)$, y separando variables obtenemos las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} M''(x) + \lambda M(x) \;=\; 0 \\ M(0) = M(\pi) = 0 \end{array} \right. \qquad N''(y) - \lambda N(y) \;=\; 0 \, .$$

Los correspondientes autovalores y autofunciones son entonces respectivamente $\lambda_n = n^2$ y $M_n(x) = \mathrm{sen}(nx)$, $n \geq 1$.

De esta forma la ecuación en y queda de la forma

$$N_n''(y) - n^2 N_n(y) = 0 \, , \quad n \geq 1$$

cuya solución general es

$$N_n(x) = a_n \cosh(ny) + b_n \mathrm{senh}(ny) \, .$$

Luego nuestra solución formal es

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh(ny) + b_n \mathrm{senh}(ny)] \mathrm{sen}(nx) \, .$$

La condición

$$A\,x \;=\; v(x,0) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{sen}(nx) \, ,$$

implica

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A}{\pi} \int_0^{\pi} x \mathrm{sen}(nx) \, dx \\ &= \frac{A}{\pi} \left[-x \, \frac{\cos(nx)}{n} \Big/_0^{\pi} \;+\; \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) \, dx \right] \\ &= -\frac{A}{n} (-1)^n \, . \end{aligned}$$

La otra condición

$$0 \;=\; v(x,1) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cosh(n) + b_n \mathrm{senh}(n)] \mathrm{sen}(nx) \, ,$$

implica

$$b_n \;=\; -a_n \cdot \frac{\cosh(n)}{\mathrm{senh}(n)} \;=\; \frac{A}{n} (-1)^n \cdot \frac{\cosh(n)}{\mathrm{senh}(n)} \, .$$

De esta forma

$$u(x,y) \;=\; -A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,[\cosh(ny)-\frac{\cosh(n)}{\operatorname{senh}(n)}\operatorname{senh}(ny)]\operatorname{sen}(nx)\,,$$

o bien

$$u(x,y) \;=\; -A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\frac{\operatorname{senh}(n(1-y))}{\operatorname{senh}(n)}\,\operatorname{sen}(nx)\,.$$