

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO

FÍSICA I



LUIS RODRÍGUEZ VALENCIA

COLABORADORES

ALICIA LIRA
ROSEMARIE POHL
VERÓNICA PETERS
YOLANDA VARGAS
MANUEL ARRIETA
JUAN BARRERA
JORGE LAY
DAGOBERTO CASTRO

FISICA I

versión 2

Autor : Luis Rodríguez Valencia¹
DEPARTAMENTO DE FISICA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Colaboradores: Alicia Lira, Rosemarie Pohl,
Verónica Peters, Yolanda Vargas,
Manuel Arrieta, Dagoberto Castro,
Juán Barrera, Jorge Lay.

4 de diciembre de 2003

¹email: lhrodrig@lauca.usach.cl

Contenidos

Prólogo	xI
1. Introducción a la Física	1
1.1. Historia	1
1.2. Modelos del Cosmos	2
1.2.1. Modelo de Ptolomeo	2
1.2.2. Nicholas Copernicus (1473-1543). Modelo de Copérnico	4
1.2.3. Mejores modelos	5
1.2.4. Johannes Kepler (1571-1630)	6
1.2.5. Las leyes de Kepler	7
1.2.6. Contribución de Galileo (1564 - 1642)	10
1.2.7. Sir Isaac Newton. La unificación de la Física y la As- tronomía	12
1.3. La difusión del método científico	14
1.3.1. La edad clásica de la Ciencia	17
1.4. El método científico	18
1.5. Gravitación	19
1.5.1. Desarrollo de la teoría gravitacional	19
1.5.2. Ley inversa al cuadrado de la distancia	22
1.5.3. Cuerpos en órbita circular	23
1.5.4. Velocidad de escape	24
1.5.5. Peso y masa	24
1.5.6. Interacción entre los cuerpos celestiales	25
1.5.7. Medidas absolutas de la gravedad	27
1.5.8. Medidas relativas de la gravedad	27
1.5.9. La Teoría gravitacional y otros aspectos de la Física . .	28
1.5.10. Teorías del campo de gravitación	28

1.5.11. Los campos gravitacionales y la teoría general de relatividad	30
1.5.12. Los caminos de partículas y luz	31
1.5.13. Estudio experimental de la gravitación	32
1.5.14. Datos actuales de las órbitas planetarias	33
1.6. Los cambios actuales	35
1.6.1. Hitos en la historia de la Física Moderna	35
1.7. Unidades	38
1.7.1. Medición	38
1.7.2. Valor verdadero	39
1.8. Cifras significativas	39
1.9. Estandarización	41
1.10. Valores de algunas constantes fundamentales	43
1.11. Las unidades básicas	43
1.12. Ejercicios	44
2. Vectores	47
2.1. Escalares y vectores	47
2.2. Sistemas de referencia	47
2.3. Desplazamientos en el espacio	51
2.4. Vectores	52
2.4.1. Notación	53
2.4.2. Suma de vectores	53
2.4.3. Magnitud de un vector	53
2.4.4. Multiplicación de un vector por un escalar	54
2.4.5. Vectores unitarios	54
2.4.6. Vectores unitarios cartesianos	55
2.4.7. Componentes cartesianas de un vector	55
2.4.8. Vector nulo	55
2.4.9. Resta de vectores	56
2.4.10. Producto escalar de vectores	56
2.4.11. Producto vectorial de dos vectores	56
2.4.12. Algunas propiedades	57
2.4.13. Algunas operaciones en términos de las componentes	58
2.4.14. Relación con geometría	58
2.5. Más sobre sistemas de referencia	62
2.5.1. Sistema cartesiano	62

2.5.2.	Sistema esférico de coordenadas	63
2.5.3.	Sistema cilíndrico de coordenadas	64
2.5.4.	Sistema polar de coordenadas	64
2.5.5.	Relaciones entre los vectores unitarios	64
2.5.6.	Componentes de un vector	65
2.6.	Aplicaciones	66
2.7.	Ejercicios	67
3.	Fuerzas	73
3.1.	Las Fuerzas	73
3.1.1.	Fuerza de acción a distancia	73
3.1.2.	Fuerzas de contacto	74
3.1.3.	Tercera ley de Newton	75
3.1.4.	Unidades de Fuerza	76
3.2.	Tipos de fuerzas de contacto	76
3.2.1.	Fuerza normal	76
3.2.2.	Fuerza de roce	76
3.2.3.	Tensiones	76
3.2.4.	Superficies lisas o sin roce	77
3.3.	Condiciones de equilibrio	77
3.3.1.	Línea de acción y punto de aplicación	78
3.3.2.	Fuerzas concurrentes	78
3.3.3.	Par de Fuerzas	78
3.3.4.	Fuerzas no concurrentes	79
3.3.5.	Caso general	80
3.4.	Centro de masa	82
3.4.1.	Cuerpos continuos	82
3.5.	Centroides	82
3.5.1.	Triángulo	84
3.5.2.	Triángulo	84
3.5.3.	Semi disco	85
3.5.4.	Cuarto de disco	86
3.5.5.	Combinación de áreas	86
3.6.	Resultante de fuerzas paralelas de igual magnitud	87
3.6.1.	Centro de Fuerzas paralelas	87
3.6.2.	Centro de fuerzas distribuidas paralelas	90
3.7.	Trabajar con componentes	92
3.7.1.	Eje torsor	93

3.8. Ejercicios	97
4. Fuerzas y equilibrio	103
4.1. Condiciones de equilibrio. Leyes de la estática	104
4.1.1. Equilibrio de una partícula	104
4.1.2. De un sistema de partículas	104
4.1.3. Cuerpo rígido	105
4.1.4. La fuerza de roce estática	105
4.1.5. Fuerzas causadas por ciertos soportes	106
4.2. Ejemplos	109
4.3. Ejercicios	111
5. Hidrostática	123
5.1. Fluidos	123
5.2. Concepto de Presión	123
5.2.1. Unidades de Presión	124
5.2.2. Propiedades de la presión	125
5.3. Densidad o masa específica	125
5.3.1. Densidad relativa	126
5.4. Peso específico	126
5.5. Presión atmosférica	126
5.6. Variación de la presión con la profundidad	128
5.7. Medidores de presión	129
5.7.1. Barómetro de mercurio en U	129
5.7.2. Manómetro en U de líquido, para presiones relativas de gases	129
5.8. Principio de Arquímedes	132
5.9. Fuerza de Flotación	133
5.9.1. Cuerpo totalmente sumergido	133
5.9.2. Cuerpo parcialmente sumergido	134
5.9.3. Estabilidad de un cuerpo prismático inhomogéneo . . .	134
5.10. Fuerzas sobre las paredes o compuertas	135
5.10.1. Superficie rectangular	137
5.10.2. Superficie de forma arbitraria	138
5.11. Fuerza sobre una superficie de forma rectangular inclinada . .	140
5.12. Ejemplos	141
5.13. Ejercicios	143

6. Cinemática	151
6.1. Introducción	151
6.2. Movimiento rectilíneo	151
6.2.1. Desplazamientos	152
6.2.2. Espacio recorrido	152
6.2.3. Velocidad media	152
6.2.4. Velocidad instantánea	152
6.2.5. Rapidez	153
6.2.6. Aceleración media	153
6.2.7. Aceleración instantánea	153
6.2.8. Interpretación gráfica	155
6.2.9. Movimiento uniformemente acelerado	157
6.2.10. Solución gráfica	158
6.3. Movimiento en el espacio	159
6.3.1. En coordenadas cartesianas	159
6.3.2. En coordenadas polares	160
6.3.3. Velocidad y aceleración en coordenadas esféricas	165
6.3.4. Coordenadas cilíndricas	167
6.3.5. Coordenadas intrínsecas	168
6.4. Resumen	169
6.5. Movimiento de proyectiles	170
6.5.1. Análisis del movimiento	170
6.6. Movimiento relativo	176
6.6.1. Traslación de un sistema	177
6.6.2. Movimiento general de un sistema	178
6.7. Ejercicios	178
7. Dinámica de la partícula	195
7.1. Leyes de Newton	195
7.1.1. Primera ley de Newton	196
7.1.2. Sistema inercial de referencia	196
7.1.3. Segunda ley de Newton	197
7.1.4. Principio de equivalencia	197
7.1.5. Sobre las fuerzas	198
7.1.6. Tercera ley de Newton	200
7.1.7. Definiciones	200

7.2.	Teoremas	201
7.3.	Paréntesis matemático. Derivadas y diferenciales	203
7.4.	Fuerzas conservativas (C) y no conservativas (NC)	207
7.4.1.	Energías potenciales	208
7.4.2.	Teoremas sobre la energía	210
7.5.	Sobre la energía	211
7.5.1.	La energía cinética de los asteroides	212
7.5.2.	Integración de la ecuación de movimiento	213
7.5.3.	Dinámica del movimiento circular	217
7.6.	Movimiento armónico simple	218
7.6.1.	Evaluación de las constantes	219
7.6.2.	Energía	219
7.6.3.	Amplitud del movimiento	220
7.6.4.	Periodo y frecuencia	221
7.7.	Movimiento armónico amortiguado	222
7.7.1.	Caso sub amortiguado	224
7.7.2.	Caso amortiguado crítico	225
7.7.3.	Caso sobre amortiguado	225
7.7.4.	Movimiento amortiguado forzado	226
7.7.5.	Fenómeno de resonancia	227
7.8.	Dinámica del movimiento circular	228
7.9.	Ejemplos	233
7.9.1.	Fuerzas constantes o dependientes del tiempo	233
7.9.2.	Fuerzas dependientes de la posición o de la velocidad	235
7.10.	Ejercicios	240
7.10.1.	Dinámica unidimensional	240
7.10.2.	Dinámica en dos o tres dimensiones	246
7.10.3.	Trabajo y energía	248
8.	Sistema de Partículas	251
8.1.	Ecuaciones de movimiento	251
8.1.1.	Ecuaciones de movimiento	253
8.1.2.	Movimiento del centro de masa	255
8.1.3.	Sobre el momentum angular	256
8.1.4.	Torque en punto arbitrario	259
8.1.5.	Teorema Energía Trabajo	260
8.2.	Sistema de dos partículas	264

8.2.1.	La energía cinética	265
8.3.	Campo central de Fuerza	265
8.3.1.	Ecuación diferencial para la órbita	267
8.3.2.	Excentricidad	269
8.3.3.	Semi ejes de la elipse	271
8.3.4.	Ley de Kepler de los períodos	271
8.4.	Choques	272
8.4.1.	Coefficiente de restitución	274
8.4.2.	Choques unidimensionales	275
8.4.3.	Choques bidimensionales de esferas	276
8.4.4.	Consideraciones sobre la energía	278
8.5.	Sistemas de masa variable	279
8.6.	Ejercicios.	283
8.6.1.	Sistema de partículas	283
8.6.2.	Choques	288
8.6.3.	Masa variable	292
8.6.4.	Campo central. Orbitas.	296
9.	Dinámica del cuerpo rígido	303
9.1.	Cuerpo rígido	303
9.2.	Cuerpo rígido continuo	303
9.3.	Cinemática plana de un cuerpo rígido	304
9.3.1.	Desplazamientos de un cuerpo rígido	304
9.3.2.	Condición de rigidez	306
9.3.3.	Ejemplos	306
9.3.4.	Centro instantáneo de rotación	307
9.3.5.	Curvas rueda y riel	311
9.3.6.	Modelo continuo de un cuerpo rígido	313
9.3.7.	Momentum angular y energía cinética	314
9.4.	Dinámica de un cuerpo rígido	320
9.4.1.	Ecuaciones de movimiento	320
9.4.2.	Ecuaciones para el caso de movimiento plano	321
9.4.3.	Momentos de Inercia	322
9.4.4.	Teorema de Steiner	323
9.5.	Ejemplos de dinámica plana	325
9.5.1.	Dinámica de rotación	325

9.5.2.	Dinámica de rotación y traslación	328
9.5.3.	Casos donde el movimiento de un punto es conocido . .	331
9.6.	Ejercicios de cinemática plana	338
9.7.	Ejercicios dinámica plana	341
10.	Apéndice	347
10.1.	Apéndice matemático (opcional)	347
10.1.1.	Algunas funciones importantes	347
10.1.2.	Sumatorias	351
10.1.3.	Derivadas	351
10.1.4.	Diferenciales	353
10.1.5.	Integrales	354
10.2.	Ecuaciones diferenciales	358
10.2.1.	Ecuación diferencial lineal, homogénea, con coeficien- tes constantes	358
10.2.2.	Identidades útiles	360
10.3.	Coordenadas intrínsecas	361
10.3.1.	Resumen	366
10.4.	Movimiento relativo	367
10.4.1.	Movimiento general del sistema	367
10.4.2.	Transformación de Lorentz	368
10.5.	Operador ∇	368
10.5.1.	Gradiente.	369
10.5.2.	Divergencia.	369
10.5.3.	Rotor de un campo vectorial.	370
10.5.4.	Algunas propiedades.	371
10.5.5.	El Laplaciano ∇^2	372

Prólogo

Este texto tiene el propósito de iniciarlos en una ciencia: la Física que nos muestra una maravillosa relación establecida entre la naturaleza y el ingenio del cerebro humano.

Veremos cómo, a partir de observaciones y experimentos sencillos, se consigue estructurar una teoría sólida que da cuenta de fenómenos de la naturaleza, algunos observables a simple vista y otros fuera del alcance de los sentidos.

La Física siempre ha estado, está y estará formando parte de nuestro entorno. A través de ella es posible predecir lo que sucederá con el Universo y, además, nos da señales que permiten vislumbrar cómo comenzó todo.

Desde Aristóteles (384-322aC) hasta nuestros días los científicos aportan sus trabajos para beneficio de la humanidad, interactuando para el progreso de la Ciencia y de la Tecnología. Por ejemplo, avances en la Física contribuyen al progreso de las Ciencias de la Ingeniería, y éstas, a su vez, dan soporte técnico a la Medicina, mejorando la calidad de vida del hombre.

Este trabajo está dedicado a jóvenes deseosos de aprender, mediante la comprensión, razonamiento y deducción, a partir de los conceptos fundamentales y las leyes de la Física.

Este texto, para el primer año de Ingeniería Civil, se presenta en la misma secuencia que ha sido programado el curso de Física. Los requerimientos de Matemáticas necesarios para su desarrollo serán presentados de manera gradual según las necesidades del curso. Se comienza con una introducción, que creemos necesaria, para tener una comprensión de los esfuerzos realizados en el pasado para alcanzar el grado actual del conocimiento. De manera progresiva se hace indispensable la adquisición de más elementos matemáticos, que son, en algunos casos aportados por el texto. En otros, se darán las demostraciones como una ilustración. De cualquier forma queremos enfatizar el hecho, no discutido, de que las Matemáticas son el lenguaje y la herramienta fundamental de la Física.

Se han hecho importantes esfuerzos por el grupo de colaboradores para minimizar los errores de cualquier índole, pero esa es una tarea interminable, de manera que nos será muy grato considerar las críticas de los estudiantes y colegas que deseen utilizar este texto.

Esta es la tercera edición del texto que se usará (eso esperamos) durante el año 2004. Se han hecho diversos cambios a las versiones anteriores aplicada los años 2001, 2002 y 2003 en el desarrollo del curso de Física Anual para Ingeniería Civil. Estos cambios son el resultado de la experiencia acumulada en la aplicación práctica de este texto. Por ejemplo varios tópicos, cuyo desarrollo no es estrictamente necesario, fueron pasados a un apéndice. Se agregó un apéndice matemático opcional que incluye diversos tópicos que ayudarán a la comprensión del curso, se han agregado problemas y reordenados de acuerdo a su temática. Una versión en formato PDF fué colocada en la página WEB del curso, que a mitad del año 2003 ya alcanzaba alrededor de 33.000 visitas. Todos los problemas del texto están resueltos y se presentan en un texto separado de "Soluciones a los ejercicios", para la realización del cual la ayuda de los colaboradores en la detección de sus errores ha sido muy importante.

Consejos para estudiar y para las pruebas

- En general en las pruebas de este curso se preguntan problemas
- Luego haga problemas. El nivel de los problemas de las pruebas corresponden a problemas indicados con (1) o (2).
- En el desarrollo de las pruebas haga figuras de un buen tamaño. Un tercio de la hoja por lo menos.

- Defina en su figura todas las letras que representen alguna propiedad física que se usará en el desarrollo del problema.
- Explique su desarrollo.
- Sea ordenado. Si los problemas tienen partes (a), (b), (c), etcétera. Explique claramente cual parte está resolviendo.
- Si usa lápiz grafito, procure que su calidad sea tal que se pueda leer con claridad.
- Los resultados indíquelos con lápiz pasta, caso contrario no podrá reclamar de la corrección.
- En cada prueba se aceptarán reclamos que se justifiquen, es decir usted deberá indicar por escrito las razones de su reclamo.

A pesar que hay pautas de corrección, en ellas se indican solamente los máximos por ítem. Si usted tiene errores, cada profesor corrector juzgará cuánto del máximo usted merece y en ello no hay reclamo. Este proceso de corrección tiene algo de subjetividad y la claridad de su desarrollo puede influir positivamente en su resultado.

Introducción a la Física

1.1. Historia

Aristóteles (384 aC, 322 aC) más que cualquier otro pensador, determinó el pensamiento occidental hasta finales del siglo 17 y aún después de la revolución científica, los conceptos e ideas aristotélicas han permanecido en el pensamiento occidental.

Aristóteles pensaba que las sustancias que constituían la Tierra eran diferentes de las sustancias existentes en los Cielos. El también creía que la dinámica, la rama de la Física que describe los movimientos, estaba determinada esencialmente por la naturaleza de la sustancia que se movía. Así, limitándonos a lo esencial, Aristóteles tenía la creencia de que una piedra caía hacia el suelo porque piedra y suelo eran sustancias similares. En términos de los cuatro elementos básicos, la piedra era esencialmente "tierra". De la misma forma el humo se elevaba porque era principalmente "aire" (y algo de "fuego") y por lo tanto el humo deseaba estar cerca del "aire" y lejos de la "tierra" y del "agua". Por similares argumentos él pensaba que los cielos estaban formados por la más perfecta de las sustancias, la quinta esencia, la cual poseía por su naturaleza la tendencia de efectuar un movimiento perfecto, es decir circular. El también pensaba que los objetos en la Tierra se movían mientras fueran empujados, de modo que ellos se detenían apenas se eliminaban las fuerzas aplicadas. Esta concepción causaba problemas, por ejemplo era difícil explicar porqué una flecha lanzada mediante un arco, continuaba volando aún después de que la cuerda terminaba su contacto con la

flecha. Algunas explicaciones fueron esbozadas, por ejemplo que la flecha en su vuelo producía un vacío detrás. El aire se precipitaba en ese vacío empujando además a la flecha. Esto es un esbozo de lo que eran las creencias antes del desarrollo del método científico.

Una de principales cuestiones que origina el desarrollo de la ciencia y del método científico es la explicación del movimiento de los objetos que se ven en el Cielo. Hoy día, producto de una enorme cantidad de observaciones, las cosas parecen estar claras. Sin embargo antes la información disponible era muy escasa. Excepto quizás por estimaciones sobre la Luna y el Sol, los hombres de antes no tenían idea de las distancias y de los tamaños de los objetos celestiales. No debería causar extrañeza entonces que los Griegos apoyaron la idea, con mucho sentido común, de que la tierra debería estar estacionaria (en reposo), y en base a esa hipótesis había que diseñar un método para predecir las posiciones de los astros. La versión final de este modelo fue diseñada por Ptolomeo de Alejandría, modelo que es conocido en nuestros tiempos como el modelo de Ptolomeo.

1.2. Modelos del Cosmos

1.2.1. Modelo de Ptolomeo

Este era un intrincado modelo, donde la Tierra permanecía en reposo en su centro, mientras los otros objetos del Cielo se movían en torno a la Tierra, en círculos o combinaciones de movimientos circulares, la única curva perfecta para los griegos y por lo tanto la única posible. Todo esto estaba encerrado por una gigantesca esfera de cristal sobre la cual están las estrellas fijas, esfera que daría una vuelta completa por día. Así por ejemplo, un planeta describía un pequeño círculo en torno a un punto que a su vez describía un círculo mayor en torno a la Tierra. La figura, de la época, lamentablemente no muy clara, muestra esquemáticamente ese modelo.

Así se podían explicar satisfactoriamente para los datos disponibles en ese tiempo, como los planetas tenían velocidades variables incluso invirtiendo su movimiento. Entonces era posible hacer cálculos hacia el futuro o hacia el pasado, coincidiendo con las observaciones acumuladas durante cientos de años. Este modelo tuvo vigencia durante alrededor de 1400 años, un gran periodo de tiempo comparado con la rapidez de los cambios actuales. Esto no debe considerarse una aceptación ciega de una hipótesis. Ella descansaba



Figura 1.1:

en las comprobaciones experimentales de sus predicciones. De hecho fue necesario un refinamiento de las técnicas de observación para detectar fallas en el modelo de Ptolomeo. En este aspecto fue fundamental el trabajo observacional realizado por Tycho Brahe, astrónomo danés (Dic. 14, 1546,— Oct. 24, 1601), cuyo trabajo en el desarrollo de instrumentos astronómicos y en las determinaciones de las posiciones de los astros fue crucial.



Figura 1.2: Tycho Brahe

Tycho Brahe fue el más grande de los observadores en astronomía antes de la invención del telescopio. Bajo el auspicio del rey de Dinamarca él construyó y operó el observatorio de Uraniborg, que constaba de innumerables instrumentos de su propio diseño. La precisión de diez minutos de arco desde

Ptolomeo, fue reducida en Uraniborg a un minuto de arco. En particular, Brahe recopiló extensos datos sobre la órbita de Marte, que más tarde probaría ser cruciales para la formulación de las leyes correctas del movimiento de los planetas por parte de Kepler.

Las críticas al modelo de Ptolomeo las inició Copérnico, quien basándose directamente en trabajos de Tycho Brahe puso de manifiesto las discrepancias del modelo con la observación, discrepancias no muy grandes pero que debían ser justificadas.

1.2.2. Nicholas Copernicus (1473-1543). Modelo de Copérnico

Debido a las diferencias observadas, cabían dos posibilidades, hacer correcciones a las órbitas del modelo de Ptolomeo haciéndolas más intrincadas, o adoptar otro modelo. Nicholas Copernicus en su primer libro, establece que el Sol es el centro del Universo y que la Tierra tiene un movimiento triple en torno a ese centro, esto es una rotación diaria en torno a su centro, un movimiento anual en torno al Sol, y un movimiento cónico de su eje de rotación. Su teoría fue capaz de dar una explicación simple y elegante del movimiento retrógrado de los planetas. Además se explica el movimiento aparente del Sol entre las estrellas debido al movimiento de la Tierra. Copérnico sin embargo mantuvo el rol privilegiado del movimiento circular de modo que tuvo que construir sus órbitas planetarias mediante círculos. Sus resultados numéricos sin embargo fueron solo levemente mejores que las existentes. El movimiento aparente de los planetas, en particular el movimiento retrógrado, se explica con simplicidad como lo ilustra la figura (1.3). Las proporciones del dibujo son aproximadas considerando los radios de las órbitas de Marte y de la Tierra y la validez de la ley de Kepler de los periodos que se explica más adelante.

En la figura se explica como el planeta Marte se ve avanzar o a veces retroceder sobre el fondo de las estrellas fijas. A pesar de la simplicidad del modelo, Copérnico encontró que las posiciones predichas con su modelo para los astros no eran significativamente mejores que las predichas por el modelo de Ptolomeo.

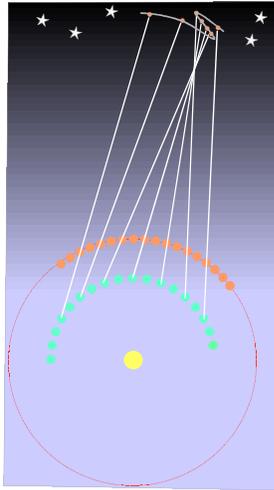


Figura 1.3: Movimiento aparente de Marte

1.2.3. Mejores modelos

Aquí nos encontramos frente a dos hipótesis que daban cuenta más o menos igual de los hechos observados. Las creencias imperantes en aquellos días, sobre todo ideas religiosas, favorecían la hipótesis de una tierra en reposo, ocupando el lugar central en el Universo. Además la Mecánica Clásica no estaba lo suficientemente desarrollada como para contestar muchas preguntas.

Entonces ocurrió que las mediciones por si solas no permitieron dilucidar entre los dos modelos, de Copérnico y de Ptolomeo. Tycho insistía en una Tierra inmóvil. Copérnico persuadió a Tycho para colocar el centro de revolución de todos los otros planetas en el Sol. Para ello tenía que abandonar las esferas cristalinas Aristotélicas puesto que chocarían entre si. Tycho también cuestionó la doctrina Aristotélica de perfección celestial, cuando, en los años 1570, un cometa y una nueva estrella aparecieron. Tycho mostró que ambos estaban sobre la esfera de la Luna. Quizás las críticas más serias fueron las hechas por Galileo, después de su invención del telescopio. Galileo Galilei (1520 - 1591) hizo notables contribuciones al desarrollo del método científico, en particular a la descripción del movimiento de los cuerpos y a la comprensión del Universo.

En una rápida sucesión de acontecimientos, Galileo anunció que había montañas en la Luna, satélites que rodean Júpiter, y manchas en el Sol.

Es más, que la Vía Láctea está compuesta de innumerables estrellas cuya existencia nadie había sospechado hasta que Galileo las observó. Aquí la crítica golpeaba las raíces mismas del sistema Aristotélico del mundo.

Al mismo tiempo que Galileo investigaba los cielos con su telescopio, en Alemania Johannes Kepler estaba investigándolo con su mente. La figura muestra el telescopio de Galileo.



Figura 1.4:

Las observaciones muy precisas de Tycho le permitieron a Kepler descubrir que Marte y los otros planetas, no se movían en círculos sino que describiendo elipses, con el Sol en uno de sus focos. El cosmos de Kepler era anti-Aristotélico, y quizás por ello él escribió sus descubrimientos en prosa latina casi indecifrible en una serie de trabajos que no tuvieron mucha circulación.

1.2.4. Johannes Kepler (1571-1630)

El siguiente paso en la historia de la astronomía fue debido a la intuición teórica de Johannes Kepler, un astrónomo Alemán quien fue a Praga como asistente de Brahe durante los años 1599-1601. Kepler y Brahe no se llevaban bien. Al parecer Brahe pensaba que Kepler podría eclipsarlo de ser el más grande de los astrónomos de esos días, por lo cual sólo le permitió a Kepler examinar parte de su enorme caudal de datos observacionales. El le propuso a Kepler la tarea de entender la órbita de Marte que parecía muy complicada, con la esperanza de que gastara su tiempo en eso, permitiéndole a él trabajar en su teoría del sistema Solar.

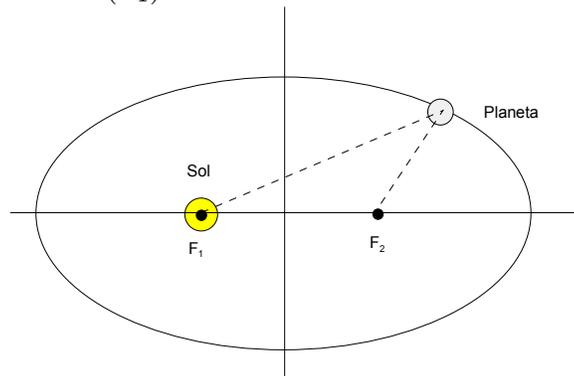
Como una ironía, fueron los datos de la órbita de Marte los que le permitieron a Kepler formular las leyes correctas del movimiento de los planetas, sobrepasando lejos los logros de Brahe.

En retrospectiva la razón de que la órbita de Marte pareciera tan complicada fue que Copérnico colocaba el Sol en el centro del sistema solar, pues había errado en su creencia de que las órbitas de los planetas eran círculos. Kepler pudo finalmente concluir que las órbitas de los planetas no eran los círculos exigidos por Aristóteles, sino que curvas que los geómetras llaman elipses. Sin embargo las órbitas son apenas elípticas, y para los datos disponibles en ese tiempo, era precisamente la órbita de Marte quien mostraba ser más elíptica.

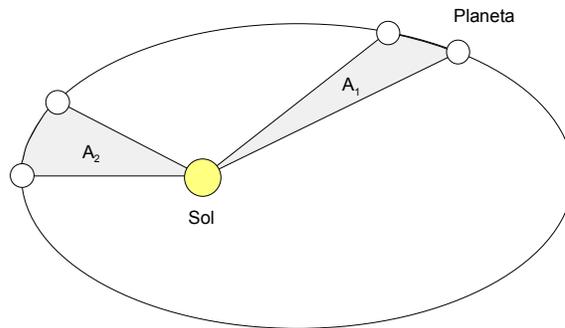
1.2.5. Las leyes de Kepler

Los descubrimientos de Kepler pueden resumirse en tres hechos, conocidos hoy en día como las tres leyes de Kepler:

- Cada planeta se mueve en una órbita elíptica en torno del Sol, el cual ocupa uno de sus focos (F_1).



- La línea que conecta el Sol con cada planeta, barre áreas iguales en intervalos iguales de tiempo. Esto es $A_1 = A_2$ si los intervalos de tiempo transcurridos son iguales.



- Los cuadrados de los tiempos requeridos por cada planeta para dar una vuelta completa en torno al Sol, son proporcionales al cubo de su distancia promedio al Sol. Esta ley será establecida en forma más precisa más adelante.

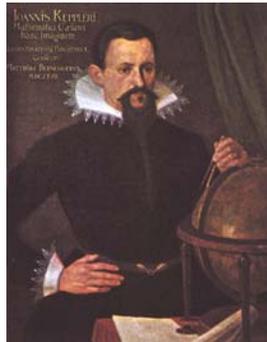


Figura 1.5: Johannes Kepler

Lo que Galileo y Kepler no podían dar, aunque lo intentaron, eran respuestas a las preguntas Aristotélicas como las siguientes: ¿ Si la Tierra gira en torno de su eje, entonces por qué no salen volando los objetos? ¿Y qué hace que los objetos dejados caer de lo alto de las torres no se desvíen hacia el oeste dado que la tierra gira debajo de ellos? ¿Y cómo es posible que la Tierra, en espacio vacío, viaje en torno del Sol—ya sea en círculos o en elipses—sin algo que la empuje? Las mejores respuestas vinieron de parte de Galileo, quién analizó los problemas de la rotación de la Tierra y su revolución mediante análisis lógico. Los cuerpos no salen volando la Tierra porque

la tierra no gira demasiado rápido, así los cuerpos, tienen una tendencia pequeña a salir volando. Los cuerpos dejados caer desde las torres, caen a la base de ellas porque ellos (antes de ser soltados) comparten con la torre la rotación de la Tierra. Asimismo Galileo dedujo lo que acontece cuando otro movimiento se agrega. Así Galileo dedujo que una pelota dejada caer de la cima de un mástil de una nave en movimiento caería directamente a la base del mástil. Si la pelota fuera permitida a seguir sin roce en vuelo horizontal, continuaría moviéndose para siempre. De hecho Galileo concluyó que los planetas, una vez puestos en movimiento circular, continuarían así para siempre. Por consiguiente, las órbitas circulares de Copérnico existen. Galileo nunca aceptó las elipses de Kepler; hacerlo habría significado abandonar su solución al problema de Copérnico.

Kepler comprendió que había un problema real con el movimiento planetario. Él buscó resolverlo mediante la existencia de alguna fuerza que parecía ser cósmica en naturaleza, en su creencia el magnetismo.

La Tierra había sido descrita como un gigantesco imán por William Gilbert en 1600. Kepler se aferró a ese hecho. Una fuerza magnética, dijo Kepler, emanó del Sol y empujó los planetas alrededor en sus órbitas, pero él nunca pudo cuantificar esta idea bastante vaga y poco satisfactoria.

A finales del primer cuarto del siglo 17 el pensamiento Aristotélico sobre el cosmos estaba rápidamente teniendo fin, pero no aparecía ningún sistema satisfactorio para ocupar su lugar. Como resultado existía escepticismo: "La nueva filosofía pone todo en duda". Era esta situación la que favoreció el desarrollo de las ideas de René Descartes.

La materia y movimiento fueron tomados por Descartes para explicar todos los procesos naturales por medio de los modelos mecánicos, aunque él advirtió que tales modelos probablemente no eran la naturaleza misma. Ellos proporcionan meramente "las historias probables", cuestión que parecía mejor que ninguna explicación en absoluto.

Armado con materia y movimiento, Descartes atacó los problemas del sistema de Copérnico. Cuerpos una vez en movimiento, Descartes argumentó, permanecen en movimiento en una línea recta a menos que y hasta que ellos se desvíen de esta línea por el impacto de otro cuerpo. Todo cambio de un movimiento es el resultado de cosas que impactan. La pelota soltada desde el alto de un mástil, cae al pie del mástil porque, a menos que sea golpeado por otro cuerpo, continúa moviéndose con la nave. Los planetas se mueven alrededor del Sol porque ellos son desviados por una materia sutil que llena todo el espacio (¿qué será eso?). Podían así construirse modelos similares para

considerar todos los fenómenos; el sistema Aristotélico podría ser reemplazado por el Cartesiano. Existía sin embargo un problema mayor, y eso bastó para derrumbar al Cartesianismo en esos tiempos. La materia Cartesiana y movimiento no tenían ningún propósito. Ni la filosofía de Descartes parecía necesitar la participación activa de una deidad. El cosmos Cartesiano, como lo dijo Voltaire después, era como un reloj al cual le habían dado cuerda en la creación y que continuaba haciendo tictac por siempre.

1.2.6. Contribución de Galileo (1564 - 1642)

Además de las contribuciones ya señaladas, Galileo Galilei (1564 - 1642) en su libro "Dos nuevas Ciencias" establece sus ideas sobre los cuerpos que caen y en general sobre el movimiento de los proyectiles. Sus ideas son presentadas como un diálogo entre tres personajes Salviati, Sagredo y Simplicio. El punto de vista oficial de la Iglesia, esto es las ideas Aristotélicas son defendidas por Simplicio y en general demolidas por los otros.

Galileo prosigue dando un detallado análisis de la caída de los cuerpos. El comprende que en la caída de objetos muy livianos, la resistencia del aire tiene un gran efecto, mientras que para cuerpos pesados eso causa un efecto leve.

Movimientos acelerados

Habiendo establecido experimentalmente que los cuerpos pesados caen prácticamente de la misma manera, el analiza la pregunta central, no tocada por Aristóteles ¿cómo varía la velocidad durante la caída? El problema, en esos tiempos, es que la caída es demasiado rápida como para hacer observaciones. El movimiento debería ser de alguna manera hecho más lento. Galileo sugiere la más simple de las hipótesis, un cuerpo al caer acelera uniformemente, es decir gana iguales cantidades de velocidad en iguales intervalos de tiempo. Esta es sin duda un hipótesis simple, pero debía ser establecida experimentalmente.

El experimento de Galileo

Para hacer la caída más lenta, Galileo utilizó una tabla de madera colocada inclinada respecto a la horizontal, con una canal muy pulida donde se colocaba una esfera muy pulida de bronce, la cual se permitía caer rodando

por la canal. El tiempo tomado por la esfera para recorrer cierta distancia fueron determinados utilizando un reloj de agua. Este consiste en un recipiente con agua colocado en una posición elevada, con un pequeño tubito soldado en su fondo, con un pequeño diámetro dando un chorrito de agua durante el tiempo de caída, cantidad de agua que era posteriormente masada en una balanza. Las razones entre los pesos de agua dan las razones entre los tiempos de bajada. Galileo encontró que los espacios recorridos eran unos a otros como los cuadrados de los tiempos transcurridos. De hecho él marcó las distancias recorridas por la esfera en iguales intervalos de tiempo contados desde la partida encontrando que las distancias crecían en la proporción

$$1 : 3 : 5 : 7 : \dots$$

Para mayores inclinaciones del plano, las distancias recorridas en esos mismos intervalos de tiempos resultaron mayores, pero que estaban en esa misma razón. Un análisis matemático puede hacerse. Si llamamos $x(t)$ la distancia recorrida en un tiempo t desde la partida, Δt el intervalo de tiempo considerado, ΔL la primera distancia recorrida entonces tenemos

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(\Delta t) - x(0) &= \Delta L, \\ x(2\Delta t) - x(\Delta t) &= 3\Delta L, \\ x(3\Delta t) - x(2\Delta t) &= 5\Delta L, \\ &\dots \\ x(n\Delta t) - x((n-1)\Delta t) &= (2n-1)\Delta L. \end{aligned}$$

Si a estos resultados los sumamos, lado a lado, obtenemos

$$x(n\Delta t) = (1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1))\Delta L,$$

pero la suma de los impares es conocida

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

de modo que

$$x(n\Delta t) = n^2\Delta L.$$

Por último, si llamamos $t = n\Delta t$ tenemos

$$x(t) = \frac{\Delta L}{\Delta t^2} t^2,$$

es decir el espacio recorrido varía con el cuadrado del tiempo transcurrido. Esto puede parecer trivial hoy día, pero esto es la primera constatación experimental de un movimiento que no es uniforme en el tiempo. Si la velocidad de caída en el tramo n del recorrido se define mediante

$$v_n = \frac{x(n\Delta t) - x((n-1)\Delta t)}{\Delta t},$$

esta resulta ser

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{n^2\Delta L - (n-1)^2\Delta L}{\Delta t}, \\ v_n &= (2n-1)\frac{\Delta L}{\Delta t}, \end{aligned}$$

esto es

$$v_{n+1} - v_n = 2\frac{\Delta L}{\Delta t},$$

y Galileo concluye que en este tipo de movimiento, la velocidad se incrementa en la misma proporción en que se incrementa el tiempo, en lenguaje moderno que varía linealmente con el tiempo.

1.2.7. Sir Isaac Newton. La unificación de la Física y la Astronomía

El siglo 17 era un tiempo de intenso sentimiento religioso, y en ninguna parte era ese sentimiento más intenso que en Gran Bretaña. Allí un hombre joven devoto, Isaac Newton, finalmente sienta las bases de la Mecánica Clásica.

Newton era a la vez un experimentalista y un genio matemático, una combinación que le permitió defender el sistema de Copérnico mediante “unas nuevas mecánicas”. Su método era simplemente: “de los fenómenos de los movimientos investigar las fuerzas naturales, y entonces de estas fuerzas deducir otros fenómenos del movimiento”. El genio de Newton lo guió en la elección de fenómenos a ser investigados, y la creación de una herramienta matemática fundamental—el cálculo (simultáneamente inventado por Gottfried Leibniz). El resultado fue su gigantesca obra, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principios Matemáticos de Filosofía Natural, normalmente llamados Principia simplemente que aparecieron en 1687).

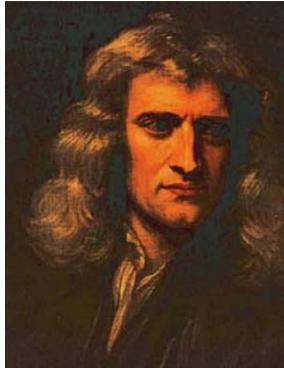


Figura 1.6: Isaac Newton

Aquí se asentaban unas nuevas físicas que aplicaron igualmente bien a los cuerpos terrestres y a los celestiales. Copérnico, Kepler, y Galileo eran todos justificados por el análisis de Newton de las fuerzas. Descartes fue absolutamente derrotado.

Así con sus tres leyes (de Newton) de movimiento y su principio de gravitación universal le bastó a Newton para explicar el nuevo cosmos. Newton creyó sin embargo que eso era con la ayuda de Dios. La Gravedad, es acción divina directa, como lo son todas las fuerzas. El espacio absoluto, para Newton, era esencial, porque el espacio era el "el sensorium de Dios", y la morada divina la cual, necesariamente, debe ser el último sistema de coordenadas. (Estas ideas muestran con claridad que Newton formuló sus leyes de la Mecánica en un sistema privilegiado de referencia, sistemas que hoy en día se conocen como "Sistemas inerciales de Referencia".) Finalmente, el análisis de Newton de las perturbaciones mutuas de los planetas causado por sus campos gravitacionales individuales lo hicieron predecir el derrumbamiento natural del sistema solar, a menos que Dios actuara para corregir las cosas.

La gran síntesis de Newton

Kepler propuso sus tres leyes del movimiento de los planetas basándose en las regularidades que encontró en los datos de Brahe. Estas leyes se suponía aplicaban sólo al movimiento de los planetas, no teniendo relación alguna con otros movimientos en el Universo. Además eran completamente empíricas, ellas daban buenos resultados, pero nadie sabía la razón de porqué ellas

funcionaban.

Newton cambió todo eso. Primero él demostró que los movimientos de todos los cuerpos podían ser descritos mediante tres leyes. Más detalles se indicarán en el capítulo de Dinámica, pero las enunciaremos de todos modos en esta introducción, para partículas de masa constante

► LEY 1.1 (PRIMERA.)

Un cuerpo que no está sometido a fuerzas permanece en reposo o se mueve con velocidad constante.

► LEY 1.2 ((SEGUNDA))

La aceleración que experimenta un cuerpo es la fuerza aplicada dividida por la masa

$$a = \frac{F}{m}. \quad (1.1)$$

► LEY 1.3 ((TERCERA))

La fuerza de acción de un cuerpo sobre otro es igual y contraria a la fuerza de reacción del segundo sobre el primero.

Además enunció la ley de gravitación universal

► LEY 1.4 ((GRAVITACIÓN))

la fuerza de atracción entre dos cuerpos es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}. \quad (1.2)$$

Luego pudo demostrar que las tres leyes de Kepler se deducen de sus leyes cuando la fuerza es la fuerza gravitacional. Los detalles de este proceso se explicarán en el capítulo de dinámica de la partícula.

1.3. La difusión del método científico

La publicación del Principia marca la culminación del movimiento iniciado por Copérnico y, como tal, siempre ha perdurado como el símbolo de la revolución científica.

Existían, sin embargo, críticas similares en otros ámbitos del conocimiento natural. En el mismo año que Newton publicaba su gran volumen, aparecía un libro igualmente importante en anatomía. Andreas Vesalius "Del fabrica

de corporis de humani " ("En el Tejido del Cuerpo Humano", llamó el Del fabrica), aparece un examen crítico de la anatomía de Galeno en la que Vesalius utilizó sus propios estudios para corregir muchos de los errores de Galeno.

Vesalius, como Newton, puso énfasis en los fenómenos observados, es decir, la descripción exacta de hechos naturales. Esto culminó con el descubrimiento de la circulación de la sangre por William Harvey cuyo trabajo fue publicado como "Exercitatio Anatomica De Motu et de Cordis Sanguinis in Animalibus" (Un Ejercicio Anatómico Acerca del Movimiento del Corazón y Sangre en Animales) .

Éste era como el Principia en fisiología donde se estableció la anatomía y la fisiología como ciencias con derecho propio. Harvey mostró que esos fenómenos orgánicos podrían estudiarse experimentalmente y que algunos procesos orgánicos podían reducirse a sistemas mecánicos. El corazón y el sistema vascular podrían ser considerados como una bomba y un sistema de cañerías y que podían entenderse sin recurrir a espíritus u otras fuerzas no susceptibles al análisis.

En otras ciencias el esfuerzo por sistematizar no tuvo tanto éxito. En química, por ejemplo, el trabajo de los alquimistas modernos medievales habían conducido a nuevas sustancias importantes y procesos, como los ácidos minerales y destilación, pero presentaron sus teorías en un lenguaje místico casi incomprensible. Robert Boyle en Inglaterra intentó disipar la maleza intelectual insistiendo en las descripciones claras, en la reproducibilidad de los experimentos, y concepciones mecánicas de los procesos químicos. La química, sin embargo, no estaba todavía madura para la revolución.

Nuevos instrumentos como el microscopio y el telescopio multiplicaron los mundos con los que el hombre tenía que ver. Los viajes por el Mundo devolvieron un diluvio de nuevos especímenes botánicos y zoológicos que agobiaron esquemas clasificadores antiguos. Lo mejor que podía hacerse era describir estas cosas nuevas con precisión y esperar que algún día alguien pudiera ajustarlas de una manera coherente.

El diluvio creciente de información puso tensiones pesadas en las instituciones viejas y tradicionales. La información tuvo que ser extendida amplia y rápidamente. Ni el genio aislado de Newton pudo comprender un mundo en el que la nueva información estaba produciéndose más rápidamente de lo que cualquier persona podía asimilar. Los filósofos naturales tenían que estar seguros de sus datos, y con ese fin requirieron la confirmación independiente y crítica de sus descubrimientos. Se crearon nuevos medios para lograr estos

finés. Las sociedades científicas empiezan en Italia en los primeros años del siglo 17 y culminan en las dos grandes sociedades científicas nacionales que marcan el cenit de la revolución científica: la Sociedad Real de Londres para la Promoción de Conocimiento Natural, creado por carta constitucional real en 1662, y las Académie des Ciencias de París, formadas en 1666.

En estas sociedades y otras como ellas por el mundo, los filósofos naturales podrían discutir, y podrían criticar nuevos descubrimientos y las teorías antiguas. Para mantener una base firme en estas discusiones, las sociedades empezaron a publicar trabajos científicos (papers). Las Transacciones Filosóficas de la Sociedad Real que empezaron como una aventura privada de su secretaria fueron el primer periódico científico profesional. Fue copiado pronto por el Mémoires de la academia francesa que ganó igual importancia y prestigio. La antigua práctica de ocultar los nuevos descubrimientos en jerga común, el idioma oscuro, o incluso los anagramas gradualmente dieron lugar al ideal de comprensión universal. Se inventaron nuevos cánones para informar y para que los experimentos y descubrimientos pudieran ser reproducidos por otros. Esto requirió nueva precisión en el idioma o lenguaje para compartir métodos experimentales u observacionales. El fracaso de otros para reproducir resultados lanzaba serias dudas en los informes originales. Así se crearon las herramientas para un ataque frontal a los secretos de naturaleza.

Incluso con la revolución científica comenzando, faltaba aún mucho por hacer. De nuevo, fue Newton quien mostró la manera. El Principia bastaba para el mundo macroscópico. Las tres leyes de Newton de movimiento y el principio de gravitación universal eran todo lo necesario para analizar las relaciones mecánicas de cuerpos ordinarios, y el cálculo como la herramienta matemática esencial. Para el mundo microscópico, Newton proporcionó dos métodos.

Primero, donde las leyes simples de acción ya habían sido determinadas de la observación, como la relación de volumen y presión de un gas (la ley de Boyle, $p v = k$), Newton supuso fuerzas entre partículas que le permitieron derivar esa ley.

Él usó estas fuerzas entonces para predecir otros fenómenos, en este caso la velocidad del sonido en el aire la cual podía medirse y contrastarse con la predicción.

Segundo, el método de Newton hizo posible el descubrimiento de que las leyes de acción del mundo macroscópico. podrían considerarse como el efecto de fuerzas microscópicas. Aquí el trabajo terminal de Newton no está en el Principia sino en su obra maestra de físicas experimentales, el Opticks,

publicado en 1704 en los que él mostró cómo examinar un asunto experimentalmente y descubrir las leyes del fenómeno.

Newton mostró como el uso juicioso de una hipótesis puede llevar más allá la investigación experimental hasta que una teoría coherente fuese lograda. El *Opticks* fue el modelo en los siglos 18 y comienzos del 19 para la investigación del calor, la electricidad, el magnetismo, y los fenómenos químicos.

1.3.1. La edad clásica de la Ciencia

Como consecuencia de que el *Principia* precedió al *Opticks*, la mecánica tuvo más desarrollo que otras ciencias en el siglo 18, que en este proceso se transformó de una rama de la física en una rama de la matemáticas.

Se redujeron muchos problemas de la física en problemas matemáticos, que mostraron su ductibilidad de ser resueltos por métodos analíticos cada vez más sofisticados. El matemático suizo Leonhard Euler fue uno de los obreros más fecundos y prolíficos en matemática y en la física matemática. Su desarrollo del cálculo de variaciones, una herramienta muy poderosa, le permitió tratar problemas muy complejos. En Francia, Jean Le de Rond d'Alembert y Joseph-Louis Lagrange tuvieron éxito en reducir los problemas de la mecánica a un sistema axiomático que requiere sólo manipulación matemática.

La base de la Mecánica de Newton era su congruencia con la realidad física. Al principio del siglo 18 ella se expuso a muchas pruebas rigurosas. El toque final al edificio de Newton fue proporcionado por Pierre-Simon Laplace cuyo "*Traité habile du système du monde*" (1798-1827; las *Mecánicas Celestiales*) sistematizó todo lo que se había hecho en mecánicas celestiales bajo la inspiración de Newton.

Laplace fue más allá de Newton, en sus creencias, mostrando que las perturbaciones de las órbitas planetarias causadas por las interacciones de gravitación planetaria son de hecho periódicas y que el sistema solar es, por consiguiente, estable, no requiriendo ninguna intervención divina para evitar su colapso. Esta afirmación puede sin embargo ser discutida hoy en día con el desarrollo de la teoría de los sistemas dinámicos donde se han abierto nuevas dudas en el asunto de la estabilidad del sistema Solar.

1.4. El método científico

En términos modernos, el método científico puede resumirse en un proceso que consta de los siguientes pasos o etapas

- 1 Observe aspectos del Universo que sean de su interés como investigador.
- 2 Invente alguna descripción tentativa de los hechos observados, cuestión llamada una hipótesis, que sea consistente con todo lo que usted ha observado.
- 3 Utilice la hipótesis para efectuar predicciones de fenómenos en el ámbito de los fenómenos descritos.
- 4 Contraste esas predicciones mediante nuevos experimentos o mediante nuevas observaciones, y redefina su hipótesis a la luz de los nuevos resultados.
- 5 Repita los pasos 3 y 4 hasta que no existan discrepancias entre su teoría o hipótesis y los experimentos u observaciones.

Cuando se logre consistencia entre la hipótesis y los resultados, la hipótesis adquiere el rango de teoría científica la cual provee un conjunto coherente de proposiciones que explican una cierta clase de fenómeno. Una teoría es entonces un artefacto mediante el cual se explican observaciones y se pueden hacer predicciones.

Una gran ventaja del método científico está en la ausencia de prejuicios. Un investigador no tiene necesariamente que creer a otros. Los experimentos pueden ser repetidos y así determinar si los resultados son verdaderos o falsos, independientemente de creencias religiosas o de prejuicios existentes. Una teoría científica es adoptada o descartada sin consideración al prestigio del proponente o a su poder de persuasión.

Al estudiar el cosmos, no es posible realizar experimentos directamente, toda la información se obtiene mediante la observación.

Una crítica frecuente que se hace a los científicos y en consecuencia al método científico es que muchas cosas que se creían imposibles en el pasado son hoy en día realidades. Esta crítica está basada en una mala interpretación del método científico. Cuando una hipótesis pasa el test de su comprobación experimental, entonces ella se adopta como la teoría que explica correctamente los fenómenos observados. Sin embargo, cuando se explora un nuevo rango

de fenómenos se utiliza la teoría existente pero se tiene siempre en mente que la teoría puede fallar al intentar explicar nuevos fenómenos. En estos casos, nuevas hipótesis son hechas hasta que emerge una nueva teoría.

1.5. Gravitación

1.5.1. Desarrollo de la teoría gravitacional

Hasta los hallazgos de Newton, no se comprendió que el movimiento de los cuerpos celestiales y la caída libre de objetos en la Tierra eran determinados por la misma fuerza. Los filósofos griegos clásicos, por ejemplo, no creían que los cuerpos celestiales podían ser afectados de algún modo, puesto que ellos parecían perpetuamente seguir trayectorias sin caerse del cielo. Por esa misma razón, Aristóteles pensaba que cada cuerpo celeste sigue un camino "natural" en su movimiento. Asimismo creía que los objetos materiales terrenales poseen una tendencia natural a acercarse al centro de la Tierra.

Tres leyes de Kepler

- 1 Los planetas describen órbitas elípticas en las cuales el Sol el cual ocupa uno de sus focos.
- 2 La línea que une un planeta al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
- 3 El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol. Una expresión moderna de esta ley es

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3, \quad (1.3)$$

siendo G la constante de gravitación Universal, M la masa del Sol, y R la distancia media al Sol.

La aceleración de gravedad

Desde los estudios de Galileo, se acepta que los objetos en las vecindades de la superficie terrestre, caen con la misma aceleración, llamada aceleración de gravedad que tiene un valor aproximadamente

$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2} \quad (1.4)$$

Por otro lado, Newton descubrió una sorprendente relación entre el movimiento de la Luna (¿influenciada por la Tierra?) y el movimiento de cualquier cuerpo que cae sobre la Tierra. Primero que nada, mediante métodos puramente matemáticos y geométricos, él descubrió que un cuerpo que recorre una órbita circular de radio R en un tiempo (período) T , está acelerado hacia el centro de la circunferencia con una magnitud igual a:

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2}R. \quad (1.5)$$

De hecho, es posible obtener lo anterior por métodos puramente geométricos. En efecto considere la figura Cuando el cuerpo pasa de P_1 a P_2' el

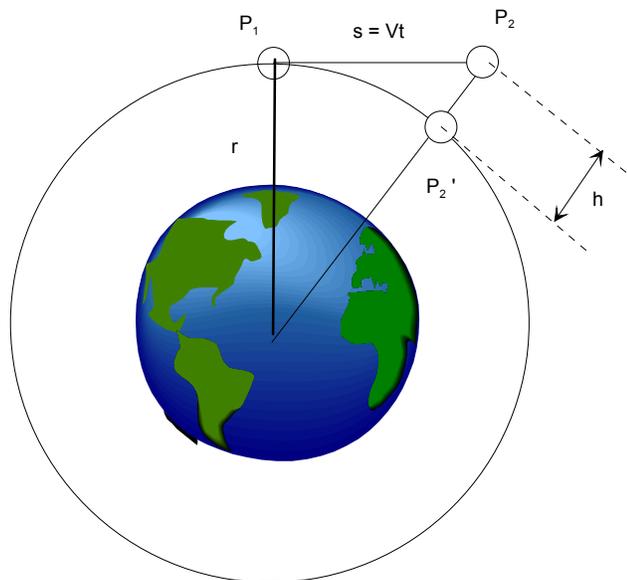


Figura 1.7:

cuerpo ha caído, respecto a la trayectoria rectilínea, la distancia h que puede calcularse geoméricamente mediante el teorema de Pitágoras

$$h = \sqrt{r^2 + V^2t^2} - r.$$

Si el tiempo es pequeño podemos aproximar

$$\begin{aligned} h &= r\sqrt{1 + \frac{V^2 t^2}{r^2}} - r \\ &\approx r\left(1 + \frac{V^2 t^2}{2r^2}\right) - r \\ &= \frac{1}{2} \frac{V^2}{r} t^2. \end{aligned}$$

Esto corresponde a un objeto "cayendo" con aceleración de magnitud

$$a = \frac{V^2}{r}$$

y como la rapidez es

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

se obtiene el resultado de Newton.

Newton supuso la presencia de una fuerza atractiva entre todos los cuerpos materiales, una fuerza que no requiere contacto directo y actúa a distancia. Haciendo uso de la ley de inercia es decir que los cuerpos no sometidos a fuerzas siguen con velocidad constante en una línea recta, Newton concluyó que una fuerza ejercida por la Tierra sobre la Luna es necesaria para que su movimiento sea circular en torno a la Tierra. Él comprendió que esta fuerza debería ser, considerando las proporciones, igual que la fuerza con la que la Tierra atrae a objetos sobre su superficie.

Newton analizó el movimiento de la Luna la que tiene un periodo de $T = 27,3$ días (casi un mes) y una órbita de radio aproximadamente igual a $R_L = 384,000$ kilómetros (aproximadamente 60 radios de la Tierra R_T). Él encontró que la aceleración de la Luna en su órbita es (dirigida hacia la Tierra) de magnitud

$$a = \frac{4\pi^2 R_L}{T^2} = \frac{4\pi^2 3,84 \times 10^8}{(27,3 \times 24 \times 3600)^2} = 0,00272 \text{ m s}^{-2},$$

y entonces

$$\frac{a}{g} = \frac{0,00272}{9,8} = 0,000277$$

que sorprendentemente resulta igual a

$$(R_T/R_L)^2 = (1/60)^2 = 0,000\ 277$$

Cuando Newton descubrió que la aceleración de la Luna en su órbita es $1/3600$ veces más pequeña que la aceleración en la superficie de la Tierra, él tuvo la genial idea de suponer que la fuerza, llamada fuerza gravitatoria, entre dos cuerpos disminuye como el inverso del cuadrado de la distancia entre los cuerpos. Así, si la distancia entre los cuerpos se dobla, se reduce la fuerza en ellos en cuatro veces. Un resultado que requiere suponer que la masa de la Tierra actúa gravitacionalmente en sus alrededores como que si su masa se concentrara en el centro del planeta.

1.5.2. Ley inversa al cuadrado de la distancia

Es también posible deducir la ley inversa al cuadrado de la distancia, de acuerdo a la tercera ley de Kepler. En efecto si en la expresión

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

se reemplaza el periodo de acuerdo a la tercera ley de Kepler

$$T^2 = kR^3$$

se obtiene

$$a = \frac{4\pi^2 R}{kR^3} = \frac{4\pi^2}{kR^2}.$$

Newton también dedujo que las fuerzas gravitacionales entre los cuerpos deberían depender de las masas de los cuerpos. Dado que un cuerpo de masa M que experimenta una fuerza F acelera a razón F/M , una fuerza proporcional a M sería consistente con la observaciones de Galileo de que los cuerpos aceleran bajo la gravedad terrestre con la misma magnitud. Así y en forma resumida la teoría gravitacional de Newton establece que

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{(r_{12})^2}, \quad (1.6)$$

donde F_{12} es la magnitud de la fuerza gravitatoria que actúa entre las los cuerpos de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r_{12} . "La fuerza iguala el producto de estas masas y de G , una constante universal, dividida por el

cuadrado de la distancia". Su teoría gravitatoria permitió explicar las leyes de Kepler y estableció la ciencia cuantitativa moderna de la gravitación.

La constante de gravitación universal tiene en el sistema SI, que se explica más adelante, el valor

$$G = 6,67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (1.7)$$

y la fuerza gravitacional actúa en la dirección de la línea que une los dos cuerpos.

Una expresión más simple, permite calcular la aceleración en la superficie en Tierra, la llamada aceleración de gravedad. Sea M_T la masa de la tierra y R_T su radio, la aceleración descendente de un cuerpo en la superficie es

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

De aquí puede deducirse una expresión aproximada para la aceleración de gravedad a una altura h sobre la superficie terrestre, pequeña comparada con el radio terrestre:

$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \\ &\approx G \frac{M_T}{R_T^2} + \left(-2G \frac{M_T}{R_T^3} \right) h \\ &= g(0) \left(1 - \frac{2h}{R_T} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

NOTA 1.1 Las matemáticas nos informan que $(1 + x)^p \approx 1 + px$, cuando $|x|$ es mucho menor que 1. Esto justifica el resultado anterior.

1.5.3. Cuerpos en órbita circular

Colocando las cosas juntas, de acuerdo a lo establecido por Newton para la aceleración de un cuerpo en movimiento circular de radio R , periodo T y rapidez v

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{v^2}{R},$$

y a su ley de gravitación Universal

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{(r_{12})^2},$$

entonces si el cuerpo está en órbita alrededor de la Tierra de masa M_T se debe tener

$$\frac{v^2}{R} = G \frac{M_T}{R^2},$$

o bien

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}. \quad (1.9)$$

1.5.4. Velocidad de escape

Un objeto lanzado hacia arriba desde la superficie de un planeta, despreciando el efecto del roce con la atmósfera, no regresa de caída si la velocidad excede el valor denominado velocidad de escape que puede ser determinado mediante

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \quad (1.10)$$

siendo M la masa del planeta, R su radio y G la constante de gravitación.

1.5.5. Peso y masa

El peso W del cuerpo es definido por la fuerza igual y opuesta necesaria para prevenir la aceleración descendente del cuerpo. El mismo cuerpo puesto en la superficie de la Luna tiene la misma masa, pero, como la Luna tiene una masa de aproximadamente $1/81$ veces el de la Tierra y un radio de aproximadamente $0,27$ el de la Tierra, el cuerpo en la superficie lunar tiene un peso de sólo $1/6$ su peso de Tierra.

Newton pudo demostrar que las tres leyes de Kepler, se desprenden matemáticamente del uso de sus propias leyes de movimiento y de la ley de gravitación. En todas las observaciones del movimiento de un cuerpo celestial, sólo el producto de G y la masa M aparece. Newton estimó la magnitud de G suponiendo la densidad de masa de promedio de la Tierra alrededor de $5,5$ veces la del agua lo que permite estimar la masa de la Tierra M_T . Finalmente calculó G mediante

$$G = \frac{gR_T^2}{M_T}$$

obteniendo un valor cercano a $6,6726 \times 10^{-11}$.

Usando las observaciones del movimiento de las lunas de Júpiter descubiertas por Galileo, Newton determinó que Júpiter es 318 veces más masivo que la Tierra pero tiene sólo 1/4 de su densidad y un radio 11 veces más grande que la Tierra.

1.5.6. Interacción entre los cuerpos celestiales

Cuando dos cuerpos celestiales de masas comparables se atraen gravitacionalmente, ambos orbitan con respecto al centro de masa de los dos cuerpos. Ese punto queda entre los cuerpos en la línea que los une en una posición tal que las distancias a cada cuerpo multiplicadas por la masa de cada cuerpo son iguales. En fórmulas

$$R_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} R,$$

$$R_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} R,$$

Así, la Tierra y el Sol están orbitando en torno a su centro común de masa

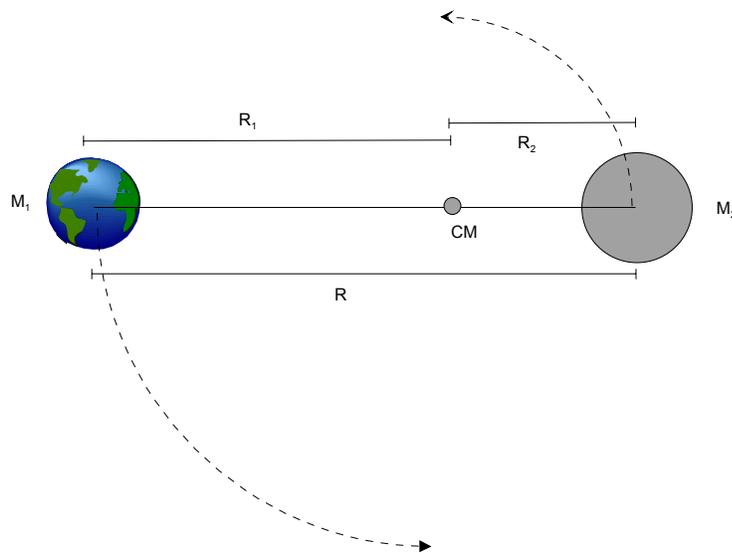


Figura 1.8:

CM . Con leves modificaciones las leyes de Kepler son válidas para los sistemas de dos cuerpos de masas estando el foco de las órbitas elípticas en la

posición del centro de masa de los dos cuerpos. En efecto, por simplicidad consideremos órbitas circulares, cada cuerpo cumple con la segunda ley de Newton, es decir

$$\begin{aligned} M_1 \frac{v_1^2}{R_1} &= G \frac{M_1 M_2}{R^2}, \\ M_2 \frac{v_2^2}{R_2} &= G \frac{M_1 M_2}{R^2}, \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2 R_1}{T^2} &= G \frac{M_2}{R^2}, \\ \frac{4\pi^2 R_2}{T^2} &= G \frac{M_1}{R^2}, \end{aligned}$$

si las sumamos considerando que $R = R_1 + R_2$ resulta para la tercera ley de Kepler

$$R^3 = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2} T^2. \quad (1.11)$$

Esta fórmula puede usarse para determinar las masas separadas de estrellas binarias. La fórmula anterior determina la suma de las masas y si R_1 y R_2 son las distancias de las estrellas individuales del centro de masa, entonces

$$M_1 R_1 = M_2 R_2$$

y la suma de las distancias es la distancia total R . Estas relaciones son suficientes para determinar las masas individuales. Las observaciones del movimiento orbital de las estrellas dobles, del movimiento dinámico de estrellas que mueven colectivamente dentro de sus galaxias, y del movimiento de las galaxias, verifican que la ley de Newton de gravitación es válida, con un alto grado de exactitud a lo largo y ancho del universo visible.

Newton también explicó las mareas del océano, fenómenos que envolvieron en misterio a los pensadores durante siglos, y que son una simple consecuencia de la ley universal de gravitación. Ellas son causadas específicamente por la fuerza gravitatoria de la Luna y, en menor grado, del Sol sobre las aguas.

Ya era conocido en tiempos de Newton que la Luna no tiene una órbita Kepleriana simple. Otras observaciones más exactas sobre los planetas también mostraron diferencias con las leyes de Kepler. El movimiento de la Luna

es particularmente complejo. Además, la atracción gravitatoria de los planetas explica casi todos los rasgos de sus movimientos. Las excepciones son no obstante importantes. Urano, el séptimo planeta del Sol, manifestó importantes variaciones en su movimiento que no podían ser explicadas mediante perturbaciones de Saturno, Júpiter, y de los otros planetas. Dos astrónomos del siglo 19, John Couch Adams de Bretaña y Urbain-Jean-Joseph Le Verrier de Francia, supusieron independientemente la presencia de un octavo planeta inadvertido que podría producir las diferencias observadas. Ellos calcularon su posición dentro de una precisión de un grado de donde se descubrió Neptuno más tarde en 1846.

1.5.7. Medidas absolutas de la gravedad

Hay dos maneras básicas de determinación de la gravedad: cronometrando el caída libre de un objeto y cronometrando el periodo del movimiento de un péndulo bajo la gravedad, el cual para oscilaciones pequeñas está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (1.12)$$

En 1817 el físico inglés Henry Kater construye y fue el primero en usar un péndulo reversible para hacer medidas absolutas de g . (Péndulo de Kater)

El péndulo reversible se usó para las medidas absolutas de gravedad desde los tiempos de Kater hasta los años cincuenta. Los instrumentos electrónicos les han permitido a los investigadores medir con mucha precisión el tiempo de caída libre. También es posible hacer medidas sumamente exactas que usan interferencia láser. Por consiguiente, las medidas directas de caída libre han reemplazado el péndulo para las medidas absolutas de gravedad. Hoy día los lasers sirven como fuentes luminosas para los interferómetros. El objeto que cae refleja un haz de luz láser. Se han usado versiones transportables de tal aparato para medir diferencias de gravedad en toda Tierra. La exactitud alcanzable en estas medidas es aproximadamente una parte en 10^8 .

1.5.8. Medidas relativas de la gravedad

Desde los tiempos de Newton, las mediciones de diferencias de gravedad, estrictamente hablando, las proporciones de valores de gravedad, fueron hechas cronometrando el mismo péndulo en lugares diferentes. Durante los años

treinta, sin embargo, los gravímetros estáticos reemplazaron a los péndulos para las medidas locales de variaciones pequeñas de la gravedad. Hoy día los experimentos de caída libre han dejado el péndulo obsoleto para estos propósitos.

Los gravímetros estáticos equilibran la fuerza de peso (mg) de gravedad en una masa por medio de una fuerza elástica, usando dispositivos electrónicos para lograr alta sensibilidad.

Otro gravímetro de desarrollo reciente es el gravímetro de superconductor, un instrumento en que la posición de una esfera magnéticamente levitada proporciona una medida de g .

Los gravímetros modernos pueden tener sensibilidades mejores que 0,005 miligal, las desviación usuales en estudios de exploración geofísica están en el orden de 0,01 – 0,02 miligal. ($1\text{gal} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$; $1 \text{ miligal} = 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$)

1.5.9. La Teoría gravitacional y otros aspectos de la Física

La teoría de Newton de la gravedad está basada en la existencia de una fuerza que aparece entre todos los pares de cuerpos, actuando a distancia. Cuando una de las dos masas se mueve, se supone que la fuerza que actúa en otras masas, se ajusta instantáneamente a la nueva situación con la masa original cambiada de sitio. Esto entra en conflicto con la teoría de la relatividad especial, donde ninguna información o señal física puede viajar más rápidamente que la velocidad de luz.

La teoría de la relatividad junto a la teoría del campo de fenómenos eléctricos y magnéticos, han tenido tal éxito, que se han construido teorías gravitatorias más modernas, como teorías de campo consistentes con los principios de la relatividad especial. En una teoría de campo, la fuerza gravitatoria se manifiesta en dos etapas: el cuerpo produce un campo gravitatorio que penetra todo el espacio que lo rodea y un segundo cuerpo en ese espacio es influenciado por el campo y experimenta una fuerza.

1.5.10. Teorías del campo de gravitación

La posibilidad que la gravitación pudiera unirse con las otras fuerzas de naturaleza en una teoría unificada de fuerzas aumentó el interés en teorías del campo gravitatorias durante los años setenta y los años ochenta. El primer

modelo unificado de campos, y hasta ahora el único exitoso, es de los físicos Abdus Salam de Pakistán y Steven Weinberg y Sheldon L. Glashow de los Estados Unidos que propusieron que las fuerzas electromagnéticas y la fuerza débil (responsable del decaimiento beta), son manifestaciones diferentes de la misma interacción básica. (El decaimiento beta es un proceso donde un neutrón decae en un protón más un electrón y un neutrino)

Los Físicos están ahora buscando activamente otras posibles combinaciones unificadas de fuerzas. Debido entre otros aspectos a que la fuerza gravitatoria es sumamente débil comparada con todas las otras, y porque aparenta ser independiente de todas las otras propiedades físicas excepto la masa, la unificación de gravitación con las otras fuerzas no se ha logrado.

Un ejemplo de una teoría de campo es la relatividad general de Einstein según la cual la aceleración debido a gravedad es una consecuencia completamente geométrica de las propiedades de espacio-tiempo en el lugar donde se encuentra la masa.

Las teorías de Einstein de campo de gravedad predicen correcciones específicas a la forma Newtoniana de la gravitación, en dos formas básicas: (1) cuando la materia está en movimiento, aparecen campos gravitatorios adicionales, análogo a la aparición de campos magnéticos cuando las cargas eléctricas se mueven. (2) Las teorías clásicas de campo son lineales, en el sentido que dos o más campos eléctricos o magnéticos se superponen por una simple suma vectorial para dar los campos totales, no siendo así en el caso de la teoría de Einstein de la gravitación. Algunas de las consecuencias de los términos de la corrección respecto a la teoría de Newton son pruebas concretas e importantes de la teoría de Einstein. Debe señalarse que estas predicciones de nuevos efectos gravitatorios, y de su comprobación experimental, requieren de mucho cuidado pues debido al trabajo pionero de Einstein en gravedad, esos campos gravitacionales afectan los instrumentos básicos de medición, en particular a los relojes. Algunos de estos efectos se listan debajo:

1. La proporción en que el ritmo de los relojes es reducida por proximidad de cuerpos masivos; es decir, los relojes cerca del Sol correrán más lento comparado con relojes idénticos más lejos del Sol.

2. En la presencia de campos gravitatorios, la estructura espacial de objetos físicos no es más describable por una geometría Euclidiana; por ejemplo, para formar un triángulo, la suma de los ángulos subtendidos no igualará 180 grados

Un tipo más general de geometría, geometría de Riemann, parece nece-

sario para describir la estructura espacial de la materia en la presencia de campos gravitatorios. Los rayos luminosos no viajan en líneas rectas, siendo desviados por los campos gravitatorios. En este sentido es posible decir que los diversos rayos luminosos que salen de un punto, dibujan la geometría local, en torno al punto. Ellos corresponden a las geodésicas del espacio-tiempo.

1.5.11. Los campos gravitacionales y la teoría general de relatividad

En la teoría general de la relatividad de Einstein, se formulan las consecuencias físicas de los campos gravitatorios, resumidamente de la siguiente manera. El espacio-tiempo es un continuo de cuatro dimensiones no Euclidiano. La curvatura de este espacio-tiempo es determinada por la distribución de masa de la materia. Las partículas y los rayos de luz viajan a lo largo de geodésicas, caminos extremales en este mundo geométrico de cuatro dimensiones.

Hay dos consecuencias principales de este punto de vista geométrico de la gravitación: (1) las aceleraciones de cuerpos sólo dependen de sus masas y no en su constitución química o nuclear, y (2) el camino de un cuerpo o de luz en la vecindad de un cuerpo masivo (el Sol, por ejemplo) es levemente diferente del predicho por la teoría de Newton. El primero es el principio débil de equivalencia.

El propio Newton realizó experimentos con péndulos que demostraron el principio dentro de una parte en 1,000 para una variedad de materiales. Al principio del siglo 20, el físico húngaro Roland, Barón von Eötvös, mostró que materiales diferentes aceleran en el campo de la Tierra con la misma proporción dentro de una parte en 10^9 . Los más recientes experimentos han mostrado la igualdad de aceleraciones en el campo del Sol a dentro de una parte en 10^{11} . La teoría de Newton está en acuerdo con estos resultados debido al postulado que la fuerza gravitatoria es proporcional a la masa de un cuerpo.

La masa inercial y gravitacional

La masa inercial es un parámetro que da cuenta de la resistencia inercial a los cambios de velocidad de un cuerpo al responder a todos los tipos de fuerza. Por otro lado, la masa gravitacional es determinada por la intensidad de la fuerza gravitatoria experimentada por el cuerpo cuando está en un

campo gravitatorio. Por consiguiente, el experimento de Eötvös muestra que la razón entre la masa gravitatoria y la inercial es la misma para todas las substancias, aun cuando conceptualmente se trata de cosas muy diferentes, por lo menos así se pensaba hasta que llegó Einstein..

La teoría especial de la relatividad de Einstein, considera la masa inercial como una manifestación de todas las formas de energía en un cuerpo según su relación fundamental

$$E = mc^2,$$

donde E que la energía total de un cuerpo, m la masa inercial del cuerpo, y c la velocidad de luz. Tratando entonces con la gravitación, como un fenómeno de campo, el principio débil de equivalencia indica que todas las formas de energía del tipo no gravitacional deben acoplar idénticamente o deben actuar recíprocamente con el campo gravitatorio, porque los diversos materiales en la naturaleza poseen cantidades diferentes de energías nuclear, eléctrica, magnética, y cinética, y sin embargo todas ellas aceleran en proporciones idénticas.

El Sol tiene una parte importante de energía gravitatoria interior, y las repeticiones de los experimentos de Eötvös durante los años setenta con el Sol en lugar de la Tierra revelan que los cuerpos aceleran idénticamente en el campo del Sol así como en el de la Tierra. Las medidas hechas con láser, sumamente exactas, de la distancia de la Luna a la Tierra han hecho posible una prueba extensa del principio débil de equivalencia. Las constituciones químicas de la Tierra y la Luna no son las mismas, y si eso tuviera algún efecto, los cuerpos deberían acelerar en proporciones diferentes bajo la atracción del Sol. Ningún efecto se ha descubierto.

Otros experimentos han dado confirmación de las predicciones de Einstein a una exactitud de uno por ciento.

1.5.12. Los caminos de partículas y luz

La idea que la luz debe ser desviada pasando al pasar cerca de un cuerpo material había sido sugerida por el astrónomo británico y geólogo John Michell durante el siglo 18.

Sin embargo, la teoría de relatividad general de Einstein predijo una desviación dos veces más grande. Una confirmación del resultado de Einstein surgió al efectuar mediciones directas sobre la dirección de una estrella cerca del Sol durante el eclipse solar de 1919, durante la expedición llevada a cabo

por el astrónomo británico Sir Arthur Stanley Eddington. Las determinaciones ópticas del cambio de dirección de la posición observada de una estrella están sujetas a muchos errores sistemáticos, y lejos, la mejor confirmación de la teoría de la relatividad general de Einstein se ha obtenido de las medidas de un efecto estrechamente relacionado—a saber, el aumento del tiempo tomado por la luz a lo largo de un camino cerca de un cuerpo material. Cronometrando el tiempo de viaje de ida y vuelta de un pulso de radar entre la Tierra y otros planetas internos que pasan detrás del Sol, los experimentos han confirmado con incertezas del orden de un 4 por ciento la predicción de un retraso de tiempo adicional.

La precesión de la órbita de Mercurio de 43 segundos de arco por siglo era conocida antes del desarrollo de la teoría de relatividad general. Con medidas hechas con radar de las distancias a los planetas, se han estimado precesiones anómalas similares para Venus y la Tierra, en plena concordancia con la relatividad general.

1.5.13. Estudio experimental de la gravitación

La esencia de la teoría de Newton de gravitación es que la fuerza entre dos cuerpos es proporcional al producto de sus masas y al inverso del cuadrado de su separación y que esa fuerza no depende de nada más. Con una modificación geométrica pequeña, lo mismo es en general verdad en la teoría de la relatividad general. El propio Newton probó sus afirmaciones mediante experimentos y observaciones. Él hizo mediante el péndulo experimentos para confirmar el principio de equivalencia y verificó la ley cuadrada inversa como una aplicación a los periodos y diámetros de las órbitas de los satélites de Júpiter y Saturno. Durante la última parte del siglo 19 muchos experimentos mostraron que la fuerza de gravedad es independiente de la temperatura, de los campos electromagnéticos, y de otros factores. Una parte de la actividad científica durante los años setenta consistió en un esfuerzo teórico para relacionar la fuerza de gravitación con otras fuerzas de la naturaleza. Se realizaron nuevos experimentos sobre el principio de la equivalencia. Se hicieron pruebas experimentales de la ley inversa al cuadrado de la distancia en el laboratorio. Ha existido también un interés permanente en la determinación de la constante de gravitación G , que ocupa una posición bastante anómala entre las otras constantes de la física. En primer lugar, la masa M , de cualquier objeto celestial no puede determinarse independientemente de la atracción gravitatoria que ejerce. Así, es la combinación GM , y no el valor

separado de M , la única propiedad significativa de una estrella, planeta, o galaxia. Segundo, según la relatividad general y el principio de equivalencia, G no depende de propiedades materiales pues es en cierto sentido un factor geométrico. La determinación de la constante de gravitación no parece tan esencial como la medida de otras cantidades físicas como la carga del electrón o la constante de Planck. También está mucho menos bien determinada experimentalmente que cualquiera de las otras constantes de la física.

Los experimentos en gravitación son de hecho muy difíciles, comparados con los experimentos en la ley inversa al cuadrado de la distancia en electrostática. La ley electrostática, que es también inversa al cuadrado de la distancia, se ha establecido dentro de una parte en 10^{16} usando el hecho que el campo dentro de un conductor cerrado es cero cuando la ley cuadrada inversa es verdadera. Así, midiendo cualquier campo residual con dispositivos electrónicos muy sensibles, podrían detectarse desviaciones muy pequeñas a esa ley. Las fuerzas gravitatorias tienen que ser medidas por medios mecánicos, a menudo el equilibrio de un péndulo de torsión y, aunque se han mejorado las sensibilidades de los dispositivos mecánicos, ellos todavía son mucho menos sensibles que los equipos electrónicos. Por último, las perturbaciones extrañas al experimento son relativamente grandes porque las fuerzas gravitatorias son muy pequeñas. Así, la ley inversa al cuadrado de la distancia se establece en laboratorios con una exactitud no mejor que una parte en 10^4 .

1.5.14. Datos actuales de las órbitas planetarias

Hoy se conocen bastante bien las características de los planetas y de sus órbitas, para lo cual se presenta la tabla siguiente

	Mercurio	Venus	Tierra	Marte
Distancia al Sol (Semi eje mayor Km)	57,909,175	108,208,930	149,597,890	227,936,640
Volumen (Tierra = 1)	0.054	0.88	1.0	0.149
Masa $\times 10^{-27}$ g	0.33022	4.8690	5.9742	0.64191
Densidad g cm^{-3}	5.43	5.24	5.515	3.94
Gravedad en la superficie cm s^{-2}	370	887	980	371
Velocidad de escape en el Ecuador	4.25 km/s	10.36 km/s	11.18 km/s	5.02 km/s
Periodo de rotación (sideral, días)	58.6462	243.0187*	0.99726968	1.02595675
Periodo orbital (Años terrestres)	0.24084445	0.61518257	0.99997862	1.88071105
Velocidad orbital promedio km s^{-1}	47.8725	35.0214	29.7859	24.1309
Excentricidad de la órbita	0.20563069	0.00677323	0.01671022	0.09341233
Inclinación órbita con la eclíptica ($^{\circ}$)	7.00487	3.39471	0.00005	1.85061
Inclinación Ecuador con la órbita ($^{\circ}$)	0.0	177.3	23.45	25.19
T. media en la superficie sólida K	440	730	288-293	183-268
T. atmosférica al nivel de P = 1 bar, K	–	–	288	–
Constituyentes principales atmósfera	–	CO ₂ , N ₂	N ₂ , O ₂	CO ₂ , N ₂ , Ar
Radio medio ecuatorial (Km)	2,439.7	6,051.8	6,378.14	3,397

1 AU = 149,597,870.66km

Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Plutón
778,412,020	1,426,725,400	2,870,972,200 km	4,498, 252, 900	5,906,376,200
1316	755	52	44	0.005
1,898.7	568.51	86.849	102.44	0.013
1.33	0.70	1.30	1.76	1.1
2312	896	869	1100	81
59.54 km/s	35.49 km/s	21.29 km/s	23.71 km/s	1.27 km/s
0.41354	0.44401	0.71833 *	0.67125	6.38718*
11.85652502	29.42351935	83.74740682	163.7232045	248.0208
13.0697	9.6724	6.8352	5.4778	4.7490
0.04839266	0.5415060	0.04716771	0.00858587	0.24880766
1.30530	2.48446	0.76986	1.76917	17.14175
3.12	26.73	97.86	29.58	119.61
–	–	–	–	57.8
165	134	76	73	–
H ₂ ,He	He,H ₂ ,CH ₄	H ₂ ,He, CH ₄	H ₂ , He	–
71,492	60,268	25,559	24,764	1,195

* retrógrado.

1.6. Los cambios actuales

Hoy día, los cambios y nuevos descubrimientos suceden a un ritmo impresionante, tópicos que corresponden a temas de estudio de actualidad se estudian normalmente en cursos de postgrado en Física, pero de todos modos se muestran algunos de los hitos más relevantes ocurridos recientemente en la Física.

1.6.1. Hitos en la historia de la Física Moderna

- 1887 Albert Michelson y Edward Morley, usando un interferómetro, fallan en detectar el Eter.
- 1896 Henri Becquerel descubre la radioactividad natural.
- 1900 Max Planck introduce la teoría cuántica para explicar la radiación termal.
- 1905 Albert Einstein publica su famoso artículo sobre la teoría de la relatividad.
- 1905 Albert Einstein introduce el concepto de fotón para explicar el efecto fotoeléctrico.
- 1911 Heike Kamerlingh-Onnes descubre la superconductividad.
- 1911 Ernest Rutherford propone el núcleo atómico, basado en experimentos de Hans Geiger y Ernest Marsden.
- 1913 Neils Bohr introduce la teoría de la estructura atómica.
- 1913 William H. Bragg y William L. Bragg (Padre e Hijo) estudian la difracción de rayos X por cristales.
- 1914 James Franck y Gustav Hertz muestran evidencia de energías cuantizadas en los átomos.
- 1914 Henry J. Moseley encuentra relación entre frecuencias de rayos X y número atómico.

- 1915 Albert Einstein propone la teoría general de la relatividad.
- 1916 Robert Millikan ejecuta cuidadosas medidas del efecto fotoeléctrico y confirma la teoría de los fotones de Einstein.
- 1919 Sir Arthur Eddington y otro astrónomo Británico miden efectos gravitacionales sobre la deflexión de luz de las estrellas confirmando las predicciones de la teoría general de la relatividad de Einstein.
- 1921 Otto Stern y Walter Gerlach demuestran la cuantización espacial y muestran la necesidad de introducir el momento magnético intrínseco del electrón.
- 1923 Arthur Compton demuestra cambios en la longitud de onda de los rayos X en el scattering por electrones.
- 1924 Prince Louis de Broglie postula la conducta ondulatoria de las partículas.
- 1925 Wolfgang Pauli propone el principio de exclusión.
- 1925 Samuel Goudsmita y George Uhlenbeck introducen el concepto de momento angular intrínseco.
- 1926 Max Born establece la interpretación estadística de la función de onda de Schrödinger.
- 1927 Werner Heisenberg introduce el principio de incerteza.
- 1927 Clinton Davisson y Lester Germer demuestran la conducta ondulatoria de los electrones; George P. Thomson independientemente hace lo mismo.
- 1928 Paul A.M. Dirac propone la teoría relativística cuántica.
- 1929 Edwin Hubble reporta evidencia de la expansión del Universo.
- 1931 Carl Anderson descubre la antipartícula del electrón, el positrón.
- 1931 Wolfgang Pauli sugiere la existencia de una partícula neutra, el neutrino, emitido en el decaimiento beta.
- 1932 James Chadwick descubre el neutrón.

-
- 1932 John Cockroft y Ernest Walton producen la primera reacción nuclear usando un acelerador de alto voltaje.
 - 1934 Irène y Frédéric Joliot-Curie descubren radioactividad inducida artificialmente.
 - 1935 Hideki Yukawa propone la existencia de los mesones.
 - 1938 Otto Hahn, Fritz Strassmann, Lise Meitner y Otto Frisch descubren la fisión nuclear.
 - 1940 Edwin McMillan, Glenn Seaborg y colegas producen los primeros elementos sintéticos transuránicos.
 - 1942 Enrico Fermi y colegas construyen el primer reactor de fisión nuclear.
 - 1945 Explosión de la primera bomba atómica de fisión en el desierto de Nuevo México.
 - 1946 George Gamow propone el big-bang cosmológico.
 - 1948 John Bardeen, Walter Brattain y William Shockley muestran primer transistor.
 - 1952 Explosión de la primera bomba de fusión nuclear en el atolón Eniwetok.
 - 1956 Frederick Reines y Clyde Cowan presentan evidencia experimental sobre la existencia del neutrino.
 - 1956 Lee Tsung-dao y Yang Chen-ying sugieren pérdida de simetría de paridad en el decaimiento beta.
 - 1958 Rudolf L. Mössbauer demuestra emisión sin retroceso de rayos gama.
 - 1960 Theodore Maiman construye el primer láser de ruby; Ali Javan construye el primer láser de helio-neón.
 - 1964 Allan R. Sandage descubre el primer *quasar*.

- 1964 Murray Gell-Mann y George Zweig independientemente introducen el modelo de tres quarks de las partículas elementales.
- 1965 Arno Penzias y Robert Wilson descubren la radiación de fondo de micro ondas.
- 1967 Jocelyn Bell y Anthony Hewish descubren el primer pulsar.
- 1967 Steven Weinberg y Abdus Salam proponen independientemente una teoría unificada incluyendo las interacciones débiles y electromagnéticas.
- 1974 Burton Richter y Samuel Ting y colaboradores descubren independientemente evidencia de un cuarto quark, llamado *charm*.
- 1974 Joseph Taylor y Russel Hulse descubren el primer pulsar binario.
- 1977 Leon Lederman y colegas descubren una nueva partícula que es evidencia de un quinto quark, llamado *bottom*.
- 1981 Gerd Binnig y Heinrich Rohrer inventan el microscopio de efecto túnel.
- 1983 Carlo Rubbia y colaboradores en el CERN descubren las partículas W^- , W^+ y Z^0 .
- 1986 J. Georg Bednorz y Karl Alex Müller producen el primer superconductor de alta temperatura.
- 1994 Investigadores en el Fermilab descubren evidencia de un sexto quark, llamado *top*.

1.7. Unidades

1.7.1. Medición

El tema de las mediciones en Física es uno de los aspectos centrales del método científico. Cualquier medición involucra primero que nada la definición de la propiedad física a ser medida y en segundo lugar involucra una

comparación (por algún método bien definido) con una propiedad física conocida del mismo tipo, la **unidad** de medida. El proceso termina arrojando un número para la propiedad física que está siendo medida, más alguna estimación del error cometido. El error se define como la diferencia entre el valor medido y el valor verdadero, hipotético valor que posee la cantidad física.

El proceso de medición siempre involucra algún intercambio de energía entre el observador o el instrumento, con el objeto que está siendo medido. En muchos casos eso produce un efecto despreciable sobre la determinación realizada, pero en otros casos produce un efecto no despreciable que limita la acuciosidad del valor logrado, sobre todo a nivel del mundo microscópico.

1.7.2. Valor verdadero

Los errores en las mediciones están bien definidos, aunque sean desconocidos, cuando el valor verdadero de la propiedad física que está siendo medida existe. Este punto no está absolutamente claro, pero se cree que hay ciertas cantidades físicas que tienen valor verdadero. Por ejemplo la carga del electrón o del protón. La masa en reposo del electrón. La velocidad de la luz. Además existen constantes en las leyes de la física, las cuales tienen presumiblemente un valor verdadero, por ejemplo la constante de gravitación universal, la constante de Planck, etcétera. Por otro lado, la corriente que circula por un dispositivo puede tener fluctuaciones intrínsecas de causas desconocidas, que indeterminan el concepto de valor verdadero, y por lo tanto el concepto de error en su medición. La aplicación de teorías de errores o tratamiento estadístico de datos que se explica más adelante, requiere tener claridad sobre estos aspectos.

1.8. Cifras significativas

Como resultado de un proceso de medición, por ejemplo de una longitud, el resultado debe establecer los números correctos y el primer número incierto. Con relación a la figura la longitud determinada podría ser escrita

$$L = 14,35 \text{ cm}$$

siendo incierto el último dígito, de manera que sería igualmente válido escribirlo como

$$L = 14,34 \text{ cm}$$

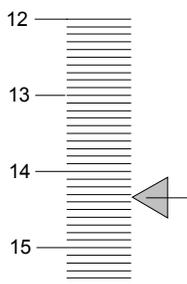


Figura 1.9: Incerteza

Así, las cifras significativas de una medida, en este caso cuatro, son los dígitos correctos y el primer número incierto.

Ejemplos

- $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ tiene seis cifras significativas.
- $e = 1,60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$ tiene nueve cifras significativas.
- $L = 10,8345 \text{ m}$ tiene seis cifras significativas.
- $L = 10,8345 \times 10^6 \text{ m}$ tiene seis cifras significativas.
- $L = 1,08345 \times 10^{-6} \text{ m}$ tiene seis cifras significativas.
- 40100 tiene cinco cifras significativas
- 0,000401 tiene tres cifras significativas.

Operaciones con cifras significativas

Al operar con resultados de mediciones, deben respetarse ciertas reglas. En la suma o resta de números, debe redondearse el resultado de modo que el número de decimales sea el del que tenga menos cifras decimales.

En la multiplicación o división, el resultado debe redondearse de modo que el número de cifras significativas del resultado, sea el del factor que tenga menos cifras significativas.

Ejemplos

- $0,123 - 0,1256 = -0,0026 \approx -0,003$
- $12,1 + 0,0017 = 12,1017 \approx 12,1$
- $3,67 \times 2,3 = 8,441 \approx 8,4$
- $0,0123/2,3 = 0,005347 \approx 0,0054$

1.9. Estandarización

Los primeros estándares de medición aparecieron en las culturas mediterráneas y estaban basadas en partes del cuerpo humano, o en lo que algún animal podía tirar, o en el volumen de algún depósito. La unidad egipcia "cubit" se acepta que fue la unidad de longitud lineal más extendida en el mundo antiguo a partir de año 3000 bC, y consistía en la longitud entre el codo del brazo hasta la punta de los dedos extendidos. Bueno, las cosas han avanzado progresivamente y hoy día de acuerdo a una convención internacional realizada en París en 1960 acordaron el sistema internacional de unidades (SI) basado en siete unidades básicas.

Las letras SI representan al "Système International d'Unités". Este es el sistema internacionalmente acordado para la mayor parte de los trabajos científicos y tecnológicos en la mayoría de los países. Las Unidades SI son de tres tipos *base*, *suplementarias*, y *derivadas*. Hay siete unidades *base* correspondientes a las siete cantidades físicas dimensionalmente independientes, como se muestra en la tabla siguiente

Unidades SI base		
<i>Cantidad física</i>	<i>Nombre</i>	<i>Símbolo</i>
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
corriente eléctrica	Ampère	A
temperatura termodinámica	Kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

Unidades SI suplementarias

<i>Cantidad física</i>	<i>Nombre</i>	<i>Símbolo</i>
ángulo plano	radián	rad
ángulo sólido	estereorradián	sr

Unidades SI derivadas

<i>Cantidad física</i>	<i>Nombre</i>	<i>Símbolo</i>
frecuencia	Hertz	Hz
energía	Joule	J
fuerza	Newton	N
potencia	Watt	W
presión	Pascal	Pa
carga eléctrica	Coulomb	C
diferencia de potencial eléctrico	Volt	V
resistencia eléctrica	Ohm	Ω
conductancia eléctrica	Siemens	S
capacidad eléctrica	Farad	F
flujo magnético	Weber	Wb
inductancia	Henry	H
densidad de flujo magnético 1.9	Tesla	T
flujo luminoso	Lumen	lm
iluminación	Lux	lx

*También conocida como inducción magnética

Unidades SI se usan con catorce prefijos para formar múltiplos decimales y submúltiplos de las unidades.

Prefijos usados con unidades SI

<i>Nombre de</i>			<i>Nombre de</i>		
<i>Factor</i>	<i>Prefijo</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Factor</i>	<i>Prefijo</i>	<i>Símbolo</i>
10	deca-	da	10^{-1}	deci-	d
10^2	hecto-	h	10^{-2}	centi-	c
10^3	kilo-	k	10^{-3}	mili-	m
10^6	mega-	M	10^{-6}	micro-	μ
10^9	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	pico-	p
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a

1.10. Valores de algunas constantes fundamentales

De acuerdo a la recomendación de 1986, CODATA recomienda los siguientes valores de algunas constantes fundamentales

Cantidad	Símb.	Valor	Unidad
veloc. de la luz en vacío	c	299792458	m s^{-1}
permitiv. el. del vacío	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	N A^{-2}
permitiv mag. del vacío	ε_0	8.854187817..	$10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
const. de gravitación	G	6.67259	$10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
const. de Planck	\hbar	1.05457266	10^{-34} J s
carga electrón	e	1.60217733	10^{-19} C
masa electrón	m_e	9.1093897	10^{-31} kg
const. de Avogadro	N_A	6.0221367	10^{23} mol^{-1}

CODATA fue establecido en 1996 como un comité interdisciplinario del Consejo Internacional de uniones científicas (International Council of Scientific Unions). Tabla adaptada de la Referencia NIST sobre Constantes, Unidades e Incertezas. La incerteza relativa está expresada en partes por millón (ppm).

1.11. Las unidades básicas

Las definiciones de las unidades básicas, de espacio tiempo y masa, han experimentado cambios con el propósito de adecuarse a los avances en los métodos experimentales, no existiendo razón alguna para suponer que las actuales definiciones son las definitivas. La excepción consiste en la unidad de masa, el kilogramo, establecida en 1887. Hoy (1999), las definiciones aceptadas son las siguientes.

DEFINICION 1.11.1 *El kilogramo se define como la masa de un cilindro fabricado con una aleación de platino e Iridio que se conserva en la International Bureau of Weights and Measures, en Sevres Francia.*

Este patrón (primario) no se ha cambiado debido a la extraordinaria estabilidad de esa aleación. Un duplicado (patrón secundario) se conserva en el National Bureau of Standards en Gaitherburg.

DEFINICION 1.11.2 *Un segundo es el tiempo que requiere un átomo de Cesio 133 para realizar 9.192.631.770 vibraciones, correspondientes a la transición entre dos niveles hiperfinos de su estado fundamental.*

Esta definición tiene la ventaja respecto a la definición del kilogramo, de no requerir de patrones específicos guardados en algún lugar, para su realización.

DEFINICION 1.11.3 *El metro se define como la distancia recorrida por la luz en el vacío en un intervalo de tiempo de $1/299,792,458$ segundos.*

Esta definición está basada en la extraordinaria precisión con que actualmente se puede medir la velocidad de la luz, la cual se acepta hoy en día que es exactamente $299,792,458 \text{ m s}^{-1}$.

1.12. Ejercicios

NOTA 1.2 (1), (2), y (3) representan el grado de dificultad del problema. El (1) corresponde a problemas tipo prueba, el (2) corresponde a problemas discriminatorios y el (3) a problemas de tareas.

EJERCICIO 1.1 (1) *Un cuerpo describe una órbita circular de radio $R = 100$ m en torno a un punto fijo con rapidez constante dando una vuelta completa por segundo. Determine la magnitud de la aceleración del cuerpo.*

EJERCICIO 1.2 (3) *Si el cuerpo del ejercicio anterior, repentinamente siguiera en línea recta, determine la rapidez de crecimiento de la distancia al punto fijo en m s^{-1} .*

EJERCICIO 1.3 (1) *Las masas de la Tierra y de la Luna son aproximadamente $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg y $M_L = 7,36 \times 10^{22}$ kg siendo la distancia promedio entre ellos $3,84 \times 10^8$ m. Determine la fuerza ejercida por la Tierra sobre la Luna y la ejercida por la Luna sobre la Tierra.*

EJERCICIO 1.4 (1) *De los datos del ejercicio anterior, determine el tiempo empleado por la Luna en dar una vuelta completa en torno a la Tierra, en días.*

EJERCICIO 1.5 (1) *Determine aproximadamente la fuerza que hace la Luna sobre una persona que está sobre la superficie terrestre y de masa 80 kg.*

EJERCICIO 1.6 (1) *Si el radio de la Luna es $1,74 \times 10^6$ m determine cuanto pesa un kg de oro en la Luna.*

EJERCICIO 1.7 (1) *De acuerdo a los radios orbitales, evalúe los periodos orbitales usando la tercera ley de Kepler, comparando con los datos tabulados.*

EJERCICIO 1.8 (1) *Determine a qué distancia entre la Tierra y la Luna, un cuerpo no es atraído hacia ninguno de los dos cuerpos.*

EJERCICIO 1.9 (1) *Un péndulo de longitud $L = 2$ m efectúa oscilaciones en la superficie terrestre. Determine el número de oscilaciones que efectúa en cada segundo.*

EJERCICIO 1.10 (1) *Utilizando las leyes de Kepler, discuta la existencia del planeta X, hipotético planeta igual a la Tierra, en su misma órbita elíptica en torno al Sol, pero que permanece siempre oculto detrás del Sol y por eso no ha sido observado.*

EJERCICIO 1.11 (1) *Si la distancia promedio de la Tierra al Sol es aproximadamente $1,496 \times 10^{11}$ m determine aproximadamente la masa del Sol.*

EJERCICIO 1.12 (1) *Verifique con los datos de la tabla, el cumplimiento de la tercera Ley de Kepler.*

EJERCICIO 1.13 (1) *De acuerdo a las masas de los planetas, evalúe las velocidades de escape desde sus superficies, comparando sus valores con los tabulados.*

EJERCICIO 1.14 (1) *De acuerdo a las masas de los planetas y sus radios, evalúe la aceleración de gravedad en sus superficies, comparando sus valores con los tabulados.*

EJERCICIO 1.15 (3) *Estudie si existe alguna ley que de cuenta de las distancias de los planetas al Sol. (Por razones históricas, considere unidades donde la distancia Tierra Sol sea 10). Si existe alguna discontinuidad en su ley, aventure alguna hipótesis.*

EJERCICIO 1.16 (1) *Considere un satélite artificial en órbita ecuatorial geostacionaria, es decir que permanece siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre. Determine entonces la altura del satélite sobre la superficie terrestre y la rapidez de él en su órbita.*

EJERCICIO 1.17 (1) *Respecto a la situación del problema anterior, si la altura del satélite es reducida a la mitad pasando a otra órbita circular, determine el número de vueltas que da el satélite por día en torno a la Tierra.*

EJERCICIO 1.18 (2) *Considere a una persona en el Ecuador terrestre. Producto de la rotación terrestre esa persona está acelerada hacia el centro de la Tierra. Determine la magnitud de esa aceleración. Si la persona se para sobre una balanza y ella tiene una masa de 80 kg determine la lectura de la balanza en kgf. ($1 \text{ kgf} = 9,8 \text{ N}$)*

EJERCICIO 1.19 (1) *Determine el radio que debería tener un planeta con la misma masa terrestre, para que la velocidad de escape en su superficie fuera la velocidad de la luz.*

EJERCICIO 1.20 (1) *Determine el radio que debería tener una estrella con la misma masa que el Sol, para que la velocidad de escape en su superficie fuera la velocidad de la luz.*

EJERCICIO 1.21 (1) *Determine la velocidad de rotación que debería tener un planeta como la Tierra, en vueltas por día, para que despegáramos de la superficie en el Ecuador.*

Vectores

2.1. Escalares y vectores

Una cantidad física que pueda ser completamente descrita por un número real, en términos de alguna unidad de medida de ella, se denomina una cantidad física escalar. Como veremos existen cantidades físicas que son descritas por más de un número, o por un número y otras propiedades. En particular los vectores se caracterizan por tener una magnitud, expresable por un número real, una dirección y un sentido. Sin embargo hay algo más que explicaremos.

2.2. Sistemas de referencia

Para especificar la posición de un punto en el espacio, se utilizan sistemas de referencia. Esta posición se define en forma relativa a algún determinado sistema de referencia.

Sistema cartesiano

En un sistema de referencia cartesiano, existen tres ejes denominados ejes cartesianos X , Y , Z ortogonales que se intersectan en un punto O llamado origen del sistema cartesiano. La posición de un punto respecto a ese sistema de referencia se define por el conjunto de sus coordenadas cartesianas (x, y, z) , esto es mediante tres números, ver figura (2.1)

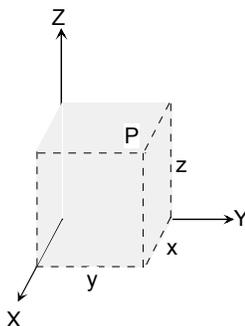


Figura 2.1: Coordenadas cartesianas.

Los rangos de variación de las coordenadas cartesianas son

$$-\infty < x < \infty,$$

$$-\infty < y < \infty,$$

$$-\infty < z < \infty,$$

Sistema esférico de coordenadas

En el sistema esférico de coordenadas, la posición de un punto está definida por sus tres coordenadas esféricas r , θ y ϕ , ver figura (2.2)

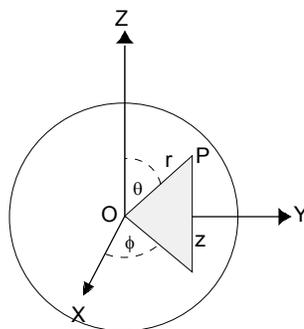


Figura 2.2: Coordenadas esféricas.

donde r es la distancia al origen, θ es el ángulo que forma OP con el eje Z y ϕ es el ángulo que forma la proyección de la línea OP en el plano XY

con el eje X . Los rangos de variación de las coordenadas esféricas son

$$\begin{aligned} 0 &< r < \infty, \\ 0 &< \theta < \pi, \\ 0 &< \phi < 2\pi. \end{aligned}$$

Sistema cilíndrico de coordenadas

En el sistema cilíndrico de coordenadas, la posición de un punto está definida por sus tres coordenadas cilíndricas ρ , z y ϕ , ver figura (2.3) donde

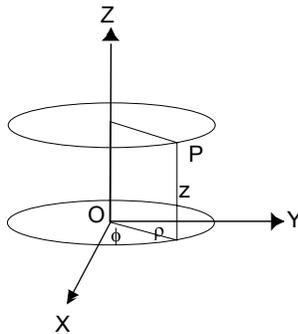


Figura 2.3: Sistema cilíndrico.

ρ es la distancia de la proyección del punto en el plano OXY al origen, z es la altura sobre el plano OXY y ϕ es el ángulo que forma la proyección de la línea OP en el plano XY con el eje X . Los rangos de variación de las coordenadas cilíndricas son

$$\begin{aligned} 0 &< \rho < \infty, \\ 0 &< \phi < 2\pi, \\ -\infty &< z < \infty. \end{aligned}$$

Sistema polar de coordenadas

En el sistema polar de coordenadas, la posición de un punto sobre un plano está definida por sus dos coordenadas denominadas polares, r y θ , ver figura (2.4)

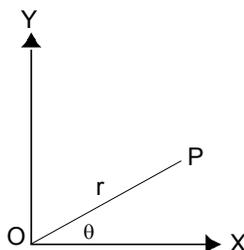


Figura 2.4: Coordenadas polares.

donde r es la distancia del punto P al origen, θ es el ángulo que forma la línea OP con el eje X , llamado aquí eje polar. Los rangos de variación de las coordenadas polares son

$$\begin{aligned} 0 &< r < \infty, \\ 0 &< \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

Relaciones entre las coordenadas

Es tarea sencilla establecer las siguientes relaciones entre las diversas coordenadas para los sistemas recién descritos

- Cartesiano-esférico

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \tag{2.1}$$

- Cartesiano-cilíndrico

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi, \\ y &= \rho \sin \phi, \\ z &= z, \end{aligned} \tag{2.2}$$

- Polar-cartesiano

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Más detalles se proporcionan después de introducir el concepto de vector. Si está perdido respecto de la trigonometría, vea resumen al final.

2.3. Desplazamientos en el espacio

El concepto que dio lugar a los vectores, es el de desplazamiento. Considere un sistema de referencia respecto al cual esté definida la posición de puntos.

DEFINICION 2.3.1 Se dice que un punto se mueve respecto a un sistema de referencia, si sus coordenadas varían con el tiempo.

DEFINICION 2.3.2 Un desplazamiento se define como cualquier cambio de posición de un punto en el espacio

Este concepto básico de desplazamiento es en principio más elemental que el concepto de movimiento de un punto, puesto que no tiene relación con tiempos. Si un punto pasa de una posición A a otra posición B , se dice que el punto se ha desplazado de A a B . De su definición se desprende que un desplazamiento tiene tres características

- Su magnitud, que se define como la distancia entre el punto inicial y el punto final.
- Su dirección, correspondiente a la dirección de la recta AB . (rectas paralelas tienen la misma dirección)
- Su sentido, de A hacia B . Así el sentido del desplazamiento de B hacia A es contrario al desplazamiento de A hacia B .

Además, desplazamientos sucesivos se combinan (o se suman) de acuerdo a la regla del triángulo, indicada en la figura siguiente (2.5), donde el desplazamiento $A \rightarrow B$ seguido del desplazamiento $B \rightarrow C$ es equivalente a un desplazamiento $A \rightarrow C$.

Eso queda absolutamente claro de la figura que define la regla de combinación triangular de desplazamientos. Esta regla se generaliza en la sección siguiente para dar origen al concepto de vector. Como veremos más adelante, para el caso de las fuerzas se utiliza la regla del paralelogramo en vez de la del triángulo para obtener la fuerza resultante. Ambas reglas son completamente equivalentes.

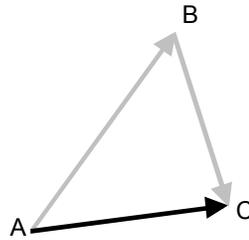


Figura 2.5: Desplazamiento equivalente.

2.4. Vectores

Los vectores son objetos que tienen las características de los desplazamientos, es decir que tienen magnitud, dirección, sentido, y tales que la combinación (llamada suma vectorial) de dos de ellos, se obtiene de acuerdo a la regla del triángulo indicada en la figura anterior. Obviamente un ejemplo de vectores son los desplazamientos. Otro ejemplo de vectores en Física, lo constituyen las fuerzas que se aplican a los cuerpos, tema del siguiente capítulo. Ellas poseen las tres características básicas, magnitud dirección y sentido. La cuestión de que si las fuerzas se combinan de acuerdo a la regla de suma vectorial, puede y es establecida experimentalmente para ciertas condiciones que explicaremos en el capítulo siguiente. Es decir debe establecerse que aplicar dos fuerzas dadas sobre un cuerpo es físicamente equivalente a aplicar una fuerza, llamada fuerza resultante que tiene la magnitud, dirección y sentido dada por la regla de adición vectorial.

Debemos señalar que no es suficiente que un objeto tenga magnitud, dirección, sentido para ser considerado un vector. Deben necesariamente combinarse como tales. Las rotaciones de los cuerpos, en torno a la dirección de un eje, en un sentido u otro, y de cierta magnitud (el ángulo), no son vectores porque no se combinan como los desplazamientos. En el capítulo sobre fuerzas veremos que siempre es posible cambiar los puntos de aplicación de fuerzas que actúan sobre un cuerpo indeformable a un determinado punto, allí sumarlas como vectores obteniendo la fuerza resultante, pero es en general necesario agregar el torque de las fuerzas que se cambiaron de posición respecto al punto donde se obtiene la resultante vectorial. Esta característica de las fuerzas no la poseen los desplazamientos.

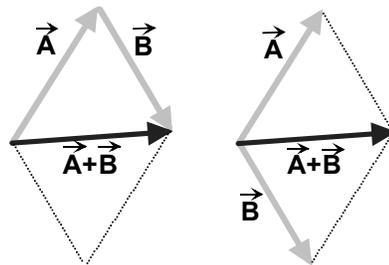
2.4.1. Notación

Los vectores, cualquiera sea su naturaleza, los denotaremos en el texto con letras con flechas: \vec{a} , \vec{B} , \vec{f} y la combinación o suma vectorial de ellos con el símbolo usual de suma $+$, es decir

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

2.4.2. Suma de vectores

Naturalmente solo podremos sumar vectores del mismo tipo: desplazamientos, fuerzas, otros, de modo que la regla de suma vectorial puede ser representada en cualquiera de las dos figuras siguientes, reglas conocidas como triangular y del paralelogramo:



2.4.3. Magnitud de un vector

La magnitud de un vector \vec{a} será representada por $|\vec{a}|$ y a veces simplemente por a , y representa por ejemplo, para los desplazamientos la distancia entre el punto inicial y el final y para una fuerza, la magnitud de ella expresada en unidades de fuerza.

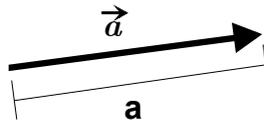


Figura 2.6: Magnitud.

2.4.4. Multiplicación de un vector por un escalar

Si \vec{a} es un vector y λ es un escalar (número real) definimos

$$\lambda \vec{a}$$

como el vector paralelo al vector \vec{a} , de magnitud $|\lambda|$ veces la magnitud de \vec{a} , y del mismo sentido del vector \vec{a} si $\lambda > 0$ y de sentido contrario si $\lambda < 0$.

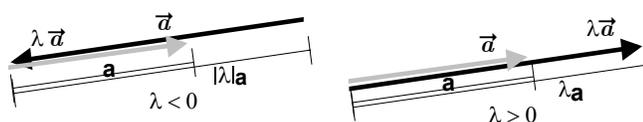


Figura 2.7:

2.4.5. Vectores unitarios

Al vector paralelo y del mismo sentido que el vector \vec{A} , pero de magnitud unidad lo denotaremos por

$$\hat{A}.$$

Entonces obviamente tenemos la siguiente importante relación

$$\vec{A} = |\vec{A}| \hat{A}, \quad (2.4)$$

que se ilustra en la figura siguiente

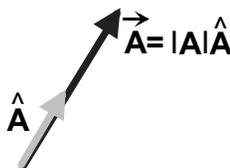


Figura 2.8: Vector unitario.

2.4.6. Vectores unitarios cartesianos

Los vectores de magnitud unidad, paralelos y en el sentido positivo de los ejes cartesianos, los denotaremos por

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}.$$

2.4.7. Componentes cartesianas de un vector

Todo vector \vec{F} (en tres dimensiones), puede ser escrito como

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = (F_x, F_y, F_z), \quad (2.5)$$

donde F_x, F_y, F_z se denominan componentes cartesianas del vector. Hemos señalado además una notación alternativa para denotar un vector como un trío ordenado formado por sus tres componentes (F_x, F_y, F_z) .

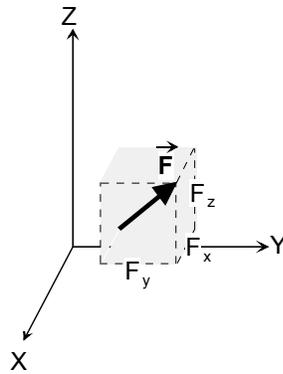


Figura 2.9: Componentes cartesianas.

2.4.8. Vector nulo

Un vector de magnitud cero, se denomina vector nulo y lo indicaremos por $\vec{0}$.

2.4.9. Resta de vectores

Se define al vector diferencia

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}, \quad (2.6)$$

que pasa a ser un caso especial de suma de vectores como se ilustra en la figura

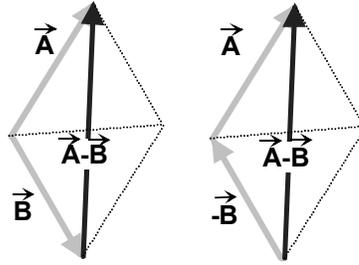


Figura 2.10: Resta de vectores.

Note que para realizar las operaciones descritas los vectores pueden desplazarse libremente a líneas paralelas, pues corresponden a la misma dirección, siendo necesario mantener su magnitud y su sentido. En el capítulo siguiente, cuando se trate de las fuerzas, se indicarán las formas de hacerlo pues en ese caso, el punto de aplicación de una fuerza es relevante y no puede ser cambiado arbitrariamente sin cambiar su efecto.

2.4.10. Producto escalar de vectores

Dados dos vectores \vec{a} , y \vec{b} , se define el producto escalar de ellos al número real

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = ab \cos \alpha, \quad (2.7)$$

siendo α el ángulo que forman las direcciones de ellos.

2.4.11. Producto vectorial de dos vectores

Se define el producto cruz o vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ de dos vectores \vec{a} y \vec{b} como un vector de magnitud

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = ab \sin \alpha, \quad (2.8)$$

que corresponde al área del paralelogramo que los dos vectores forman, de dirección perpendicular al plano de los dos vectores y de sentido dado por la regla de la mano derecha o del tornillo diestro, como se indica en la figura. El ángulo α es el ángulo que forman las direcciones de los dos vectores. (Note que $\sin \alpha = \sin(180 - \alpha)$). Puede verse que

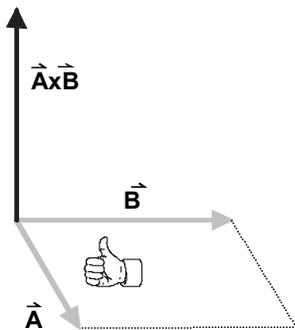


Figura 2.11: Producto cruz.

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \implies |\vec{a}| = 0, \text{ o } |\vec{b}| = 0, \text{ o } \vec{a} \parallel \vec{b}.$

2.4.12. Algunas propiedades

Pueden establecerse algunas propiedades básicas

$$\begin{aligned}
 \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}, \\
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}, \\
 \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\
 (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \\
 (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \\
 (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \\
 (-1)\vec{a} + \vec{a} &= \vec{0}, \\
 \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a}, \\
 \lambda \vec{0} &= \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Al vector $(-1)\vec{a}$ lo denotaremos simplemente $-\vec{a}$, es decir

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

2.4.13. Algunas operaciones en términos de las componentes

Puede establecerse que

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \\ \vec{a} \pm \vec{b} &= (a_x \pm b_x)\hat{i} + (a_y \pm b_y)\hat{j} + (a_z \pm b_z)\hat{k}, \\ \vec{a} \times \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned}$$

Note que la última relación corresponde al desarrollo del determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

2.4.14. Relación con geometría

Existen muchas relaciones geométricas que se demuestran en forma muy simple utilizando las propiedades de los vectores. Por ejemplo demostraremos algunos teoremas.

► TEOREMA 2.1

Teorema del coseno. Con respecto a la figura el teorema establece que

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma}.$$

DEMOSTRACION 1 Considere el triángulo de la figura ?? entonces tenemos que la magnitud del lado opuesto al ángulo $|\vec{A} - \vec{B}|$ estará dado por

$$\begin{aligned} |\vec{A} - \vec{B}| &= \sqrt{(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})}, \\ &= \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma}. \end{aligned}$$

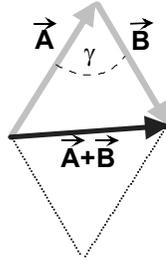


Figura 2.12: Teorema del coseno.

Forma alternativa. El mismo resultado se obtiene de considerar la figura pero ahora

$$\begin{aligned}
 |\vec{A} + \vec{B}| &= \sqrt{(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})}, \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(180 - \gamma)} \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma}.
 \end{aligned}$$

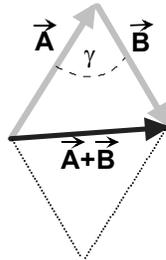


Figura 2.13: Teorema del coseno.

► **TEOREMA 2.2**

Teorema del seno. El teorema del seno establece que los senos de los ángulos de un triángulo son proporcionales a los lados opuestos a los ángulos.

DEMOSTRACION 2 *Considere entonces un triángulo*

Evidentemente

$$\vec{B} \times \vec{A} = \vec{C} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{C}$$

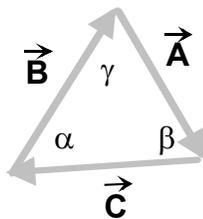


Figura 2.14: Teorema del seno.

pues tenemos en los tres casos la misma dirección, mismo sentido e igual magnitud, el doble del área del triángulo. Si tomamos las magnitudes entonces

$$AB \sin \gamma = AC \sin \beta = CB \sin \alpha,$$

que si la dividimos por ABC conduce al teorema del seno.

$$\frac{\sin \gamma}{C} = \frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \alpha}{A}.$$

Aquí $A = |\vec{A}|$, $B = |\vec{B}|$ y $C = |\vec{C}|$.

Cosenos directores

Considere un vector \hat{e} unitario que forma los ángulos α , β , γ con los ejes X , Y , Z , como se indica en la figura entonces

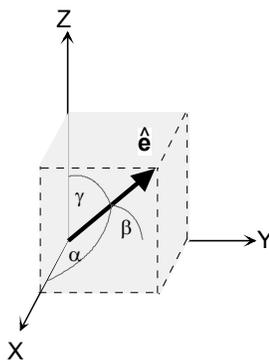


Figura 2.15: Cosenos directores.

$$\hat{e} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k},$$

si hacemos

$$\hat{e} \cdot \hat{e} = 1,$$

se obtiene

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

La relación fundamental que cumplen los cosenos directores de una dirección cualquiera.

Ecuación de un plano

De acuerdo a la figura (2.16), la ecuación de un plano que es perpendicular a una dirección \hat{n} y que pasa a una distancia d del origen puede escribirse

$$\vec{r} \cdot \hat{n} = d,$$

esto es, todos los puntos del plano, dan la misma proyección sobre la dirección

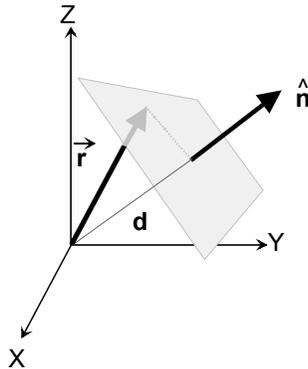


Figura 2.16: Un plano.

del vector unitario normal, la distancia d al origen.

Volumen de un paralelepípedo

Si un paralelepípedo tiene sus aristas de acuerdo a las direcciones y magnitudes de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} , su volumen está dado por

$$V = \left| \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} \right|,$$

el llamado producto triple o mixto. La razón es que $\vec{a} \times \vec{b}$ puede escribirse como el área A del paralelogramo basal por un vector unitario a lo largo de la dirección perpendicular a esa área

$$\vec{a} \times \vec{b} = A\hat{n},$$

entonces

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = A\hat{n} \cdot \vec{c} = \pm Ah,$$

la base por la altura. La razón de tomar el módulo es porque \hat{n} puede dar producto punto negativo con \vec{c} .

Ángulo que forman dos vectores \vec{a} , \vec{b}

De acuerdo a las dos versiones establecidas para el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

y

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = ab \cos \alpha,$$

se deduce que

$$\cos \alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (2.10)$$

2.5. Más sobre sistemas de referencia

Mediante la utilización de vectores, se definen vectores unitarios básicos de acuerdo a cada sistema de referencia, de manera que en primer lugar, la posición de los puntos se hace mediante un vector, llamado vector posición, que es expresado en términos de los vectores unitarios básicos, como explicaremos, y en segundo lugar ello permitirá en los próximos capítulos calcular con simplicidad la velocidad y aceleración de puntos. Los vectores unitarios básicos usualmente se eligen ortogonales entre sí.

2.5.1. Sistema cartesiano

Como ya se explicó se definen los vectores unitarios cartesianos básicos \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} paralelos y en el sentido de los ejes, como se ilustra en la figura, de manera que el vector posición del punto P está dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (2.11)$$

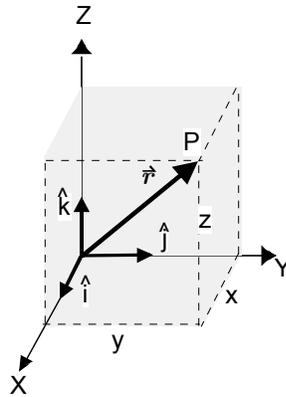


Figura 2.17: Vectores unitarios cartesianos.

2.5.2. Sistema esférico de coordenadas

En el sistema esférico de coordenadas, los vectores unitarios básicos denominados \hat{r} , $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ se indican en la figura de manera que el vector posición del punto P está dado por

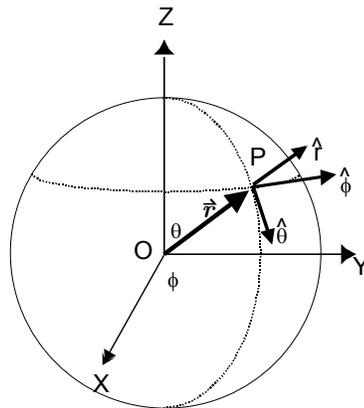


Figura 2.18: Vectores unitarios esféricos

$$\vec{r} = r\hat{r}. \quad (2.12)$$

2.5.3. Sistema cilíndrico de coordenadas

En el sistema cilíndrico de coordenadas, los vectores unitarios básicos denominados $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y \hat{k} se indican en la figura de manera que el vector posición del punto P está dado por

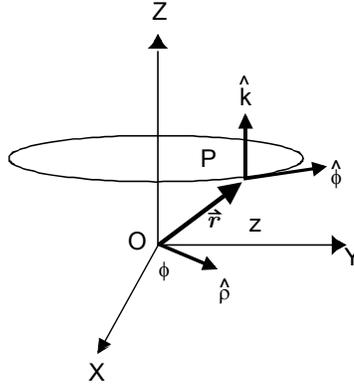


Figura 2.19: Vectores unitarios cilíndricos

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{k}. \quad (2.13)$$

2.5.4. Sistema polar de coordenadas

En el sistema polar de coordenadas, los vectores unitarios básicos denominados \hat{r} , $\hat{\theta}$ se indican en la figura de manera que el vector posición del punto P está dado por

$$\vec{r} = r \hat{r}. \quad (2.14)$$

2.5.5. Relaciones entre los vectores unitarios

Es tarea sencilla establecer las siguientes relaciones entre los vectores unitarios para los diversos sistemas recién descritos

- Cartesiano-esférico

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}, \\ \hat{\theta} &= \cos \theta (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) - \sin \theta \hat{k}, \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

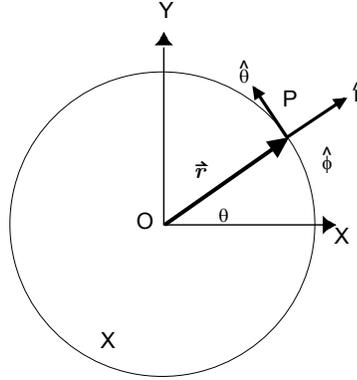


Figura 2.20: Vectores unitarios polares.

- Cartesiano-cilíndrico

$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}, \quad (2.16)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j},$$

$$\hat{k} = \hat{k}.$$

- Polar-cartesiano

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad (2.17)$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

2.5.6. Componentes de un vector

En general todo vector \vec{A} puede ser expresado en cualquier sistema de vectores unitarios ortogonales de modo que

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (2.18)$$

$$= A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

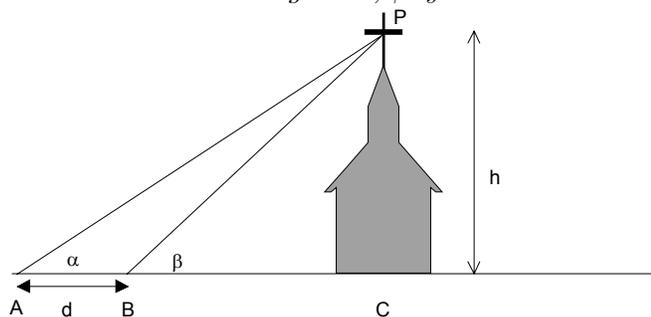
$$= A_\rho \hat{\rho} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{k}.$$

Las diversas componentes del vector \vec{A} están relacionadas y en general la forma de obtener una componente cualquiera es mediante la operación de proyección realizada mediante el producto escalar

$$A_n = \vec{A} \cdot \hat{n}. \quad (2.19)$$

2.6. Aplicaciones

EJEMPLO 2.6.1 Para la situación indicada en la figura, determine la altura del punto P en términos de los ángulo α , β y la distancia d .



Solución. Podemos escribir

$$\tan \alpha = \frac{h}{AC},$$

$$\tan \beta = \frac{h}{BC},$$

de donde

$$AC = \frac{h}{\tan \alpha},$$

$$BC = \frac{h}{\tan \beta},$$

y restando

$$d = AC - BC = \frac{h}{\tan \alpha} - \frac{h}{\tan \beta},$$

de donde sigue el resultado

$$h = \frac{d}{\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta}} = \frac{d \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}.$$



2.7. Ejercicios

NOTA 2.1 (1), (2), y (3) representan el grado de dificultad del problema. El (1) corresponde a problemas tipo prueba, el (2) corresponde a problemas discriminatorios y el (3) a problemas de tareas.

EJERCICIO 2.1 (2) *Demuestre las identidades*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a}.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

EJERCICIO 2.2 (1) *Si los lados de un triángulo son a, b, c determine los ángulos del triángulo,*

EJERCICIO 2.3 (1) *Considere los puntos cuyas coordenadas son $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 1)$, $C = (-1, 2, 0)$ determine*

- a) *El área del triángulo ABC .*
- b) *Los ángulos del triángulo ABC .*
- c) *Las magnitudes de los lados del triángulo ABC .*
- d) *Las alturas del triángulo ABC .*

EJERCICIO 2.4 (1) *Considere un paralelogramo donde se dan tres vértices $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 0)$.*

- a) *Determine el cuarto vértice.*
- b) *Determine el área del paralelogramo.*
- c) *Determine las longitudes de las diagonales.*

EJERCICIO 2.5 (2) *Escriba la ecuación de un plano que es perpendicular a la dirección $\hat{n} = (1, -1, 1)/\sqrt{3}$ y que pasa a distancia 3 del origen.*

EJERCICIO 2.6 Sea una recta

$$\begin{aligned}x &= 2t + 1, \\y &= -t + 2, \\z &= 3t - 1,\end{aligned}$$

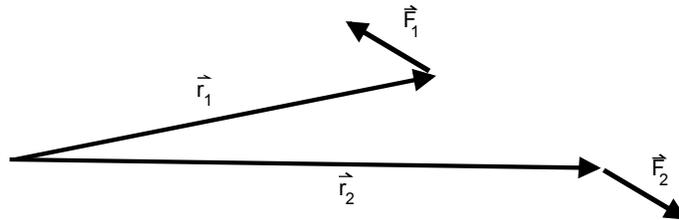
siendo t un parámetro. Determine su distancia al origen.

EJERCICIO 2.7 (2) Sean $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ dos vectores. Determine la ecuación de un plano que pase por el origen y que contenga los vectores \vec{a} y \vec{b} .

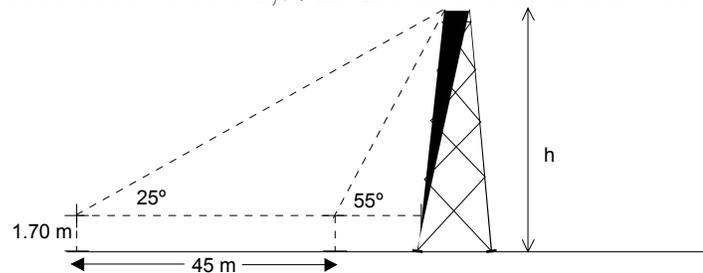
EJERCICIO 2.8 (1) Determine el área de un triángulo en función solamente de sus lados a , b y c .

EJERCICIO 2.9 (2) Con relación a la figura, demuestre que si $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ entonces:

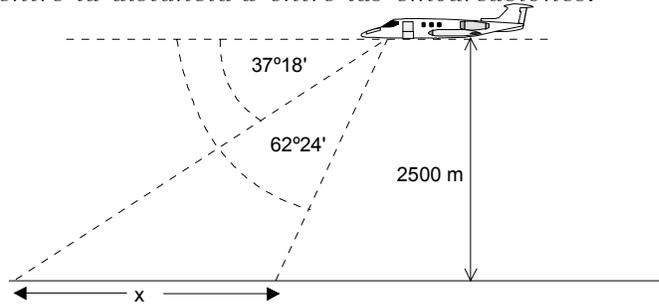
$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{0}.$$



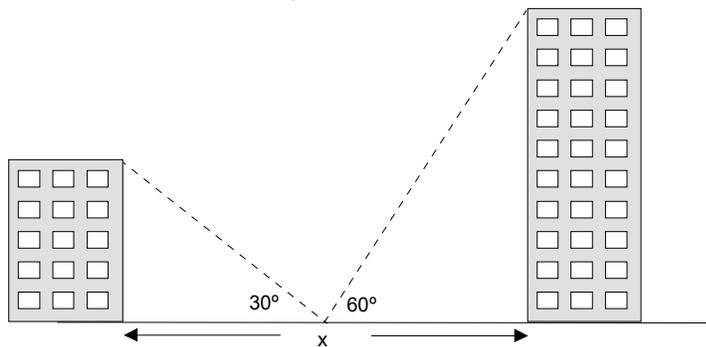
EJERCICIO 2.10 (1) Desde una determinada posición en un camino, una persona observa la parte más alta de una torre de alta tensión con un ángulo de elevación de 25° . Si avanza 45 m en línea recta hacia la base de la torre, divisa la parte más alta con un ángulo de elevación de 55° . Considerando que la vista del observador está a 1,70 m. Encuentre la altura h de la torre.



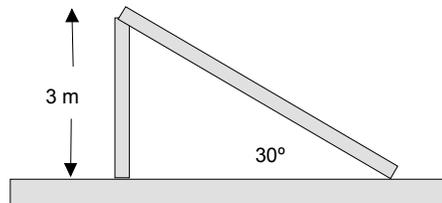
EJERCICIO 2.11 (1) Desde un avión de reconocimiento que vuela a una altura de 2500 m, el piloto observa dos embarcaciones que se encuentran en un mismo plano vertical con ángulos de depresión de $62^{\circ}24'$ y $37^{\circ}18'$ respectivamente. Encuentre la distancia x entre las embarcaciones.



EJERCICIO 2.12 (1) Una persona se encuentra en la mitad de la distancia que separa dos edificios y observa la parte más alta de éstos con ángulos de elevación de 30° y 60° respectivamente. Demuestre que las alturas de los edificios están en la relación 1 : 3.

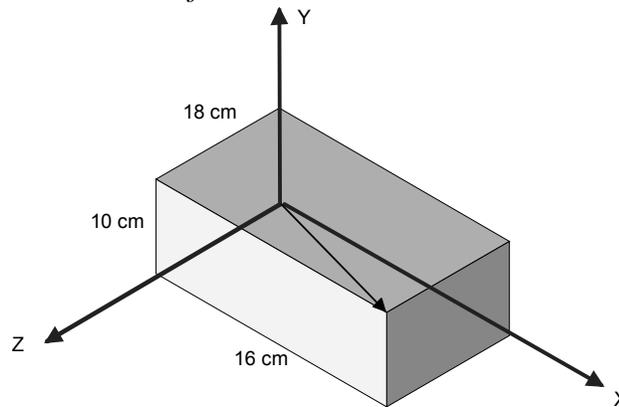


EJERCICIO 2.13 (1) Un mástil por efecto del viento se ha quebrado en dos partes, la parte que quedó vertical en el piso mide 3 m y la parte derribada quedó atada al extremo superior de la parte vertical, formando un ángulo de 30° con el piso. Encontrar la altura del mástil.



EJERCICIO 2.14 (1) Una persona en su trote diario, desde su casa, corre 7 km al Norte, 2 km al Oeste, 7 km al Norte y 11 km al Este. Encuentre la distancia a su casa a que se encuentra la persona .

EJERCICIO 2.15 (1) Una caja tiene 16 cm de largo, 18 cm de ancho y 10 cm de alto. Encuentre la longitud de la diagonal de la caja y el ángulo que ésta forma con cada uno de los ejes.



EJERCICIO 2.16 (1) Dados los vectores $\vec{r}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{r}_2 = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{r}_3 = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, hallar los módulos de:

- \vec{r}_3
- $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$
- $2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2 + 5\vec{r}_3$

Respuestas: (a) 3; (b) 5,66; (c) 5,48

EJERCICIO 2.17 (1) Hallar un vector unitario con la dirección y sentido de la resultante de $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$, con $\vec{r}_1 = 2\hat{i} + 42\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{r}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$,

Respuesta: $\frac{3}{7}\hat{i} + \frac{6}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}$.

EJERCICIO 2.18 (1) Demostrar que los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{C} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$, pueden ser los lados de un triángulo, y hallar las longitudes de las medianas de dicho triángulo.

EJERCICIO 2.19 (1) Hallar el ángulo formado por los vectores $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

EJERCICIO 2.20 (1) Demostrar que los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{C} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$, forman un triángulo rectángulo.

EJERCICIO 2.21 (1) Hallar el vector unitario perpendicular al plano formado por $\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$.

EJERCICIO 2.22 (1) Dados , $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ y $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ determinar

a) $\vec{A} \times \vec{B}$

b) $\vec{B} \times \vec{A}$

c) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

EJERCICIO 2.23 (1) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $P(1, 3, 2)$, $Q(2, -1, 1)$, $R(1, 2, 3)$.

EJERCICIO 2.24 (1) Hallar los ángulos agudos formados por la recta que une los puntos $(1, -3, 2)$ y $(3, -5, 1)$ con los ejes coordenados.

EJERCICIO 2.25 (1) Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos $(3, 2, -4)$ y $(1, -1, 2)$.

EJERCICIO 2.26 (1) Dos lados de un triángulo son los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ y $\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$. Hallar los ángulos del triángulo.

EJERCICIO 2.27 (1) Las diagonales de un paralelogramo son $\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$. Demostrar que dicho paralelogramo es un rombo y hallar sus ángulos y la longitud de sus lados.

EJERCICIO 2.28 (1) Hallar la proyección del vector $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ sobre el vector $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$.

EJERCICIO 2.29 (1) Hallar la proyección del vector $4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ sobre la recta que pasa por los puntos $(2, 3, -1)$ y $(-2, -4, 3)$.

EJERCICIO 2.30 (1) Si $\vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, hallar un vector unitario perpendicular al plano de \vec{A} y \vec{B} .

EJERCICIO 2.31 (1) Demostrar que $\vec{A} = \frac{2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}}{3}$, $\vec{B} = \frac{\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}}{3}$, y $\vec{C} = \frac{2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}}{3}$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares.

Fuerzas

3.1. Las Fuerzas

En mecánica, es generalmente suficiente clasificar las fuerzas que actúan sobre los cuerpos en dos tipos: de acción a distancia y de contacto. Del primer tipo las fuerzas se conocen generalmente como campos de fuerza. Así existen fuerzas de campos gravitacionales, de campos eléctricos, de campos magnéticos y otras. Es probable que usted se extrañe que un cuerpo pueda ejercer una acción sobre otro que está distante. Explicaciones formales existen, pero están fuera del alcance de estos apuntes.

3.1.1. Fuerza de acción a distancia

Del primer tipo, acción a distancia, la más importante para este curso es la fuerza gravitacional que se ejerce entre los cuerpos consecuencia de su masa. Ella es una fuerza atractiva, inversa al cuadrado de la distancia entre los cuerpos y proporcional al producto de las masas. Sin embargo entre cuerpos de masas no demasiado grandes, esa fuerza es normalmente despreciable en magnitud. En la Tierra sin embargo no se puede despreciar esa fuerza debido a la enorme masa de la Tierra. Cerca de la superficie terrestre todos los cuerpos son atraídos hacia la superficie terrestre (en realidad hacia el centro de la Tierra) con una fuerza que es proporcional a la masa del cuerpo. La constante de proporcionalidad es la aceleración de gravedad que en el sistema internacional de unidades es $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ de modo que la magnitud de la

fuerza peso de un cuerpo es

$$W = mg.$$

Claramente es reconocible que la fuerza peso tiene además dirección,

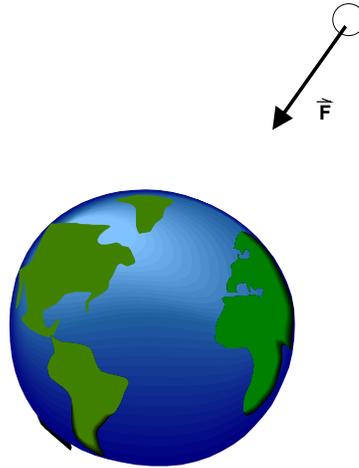


Figura 3.1: Fuerza gravitacional.

vertical y sentido, hacia abajo. Es decir esta fuerza parece tener las propiedades de un vector. Más adelante indicaremos qué es lo que falta para poder considerar a una fuerza un vector. La variación de la fuerza gravitacional peso puede despreciarse si los cuerpos permanecen cerca de la superficie terrestre.

NOTA 3.1 La fuerza peso en la Tierra en realidad depende de la altura sobre la superficie terrestre y además, como consecuencia de la rotación terrestre, depende de la latitud, efectos que serán despreciados aquí, para situaciones cerca de la superficie terrestre.

NOTA 3.2 La fuerza gravitacional, el análisis de ella y su genio, permitieron a Albert Einstein formular la teoría general de la relatividad, cuestión que no podemos explicar aquí pero, bien podría usted pensarlo. La cuestión es ¿cómo un cuerpo distante puede, sin mediar nada entre ellos, atraer a otro?

3.1.2. Fuerzas de contacto

Otra forma de ejercer una acción sobre un cuerpo, es haciendo contacto con él mediante otro cuerpo. Podemos empujar un cuerpo. Podemos también

tirar de un cuerpo mediante una cuerda, Podemos colocar el cuerpo sobre una superficie sólida. Igualmente es importante si el cuerpo se mueve dentro de fluidos, ya sean líquidos o gaseosos. es también claro que estas fuerzas tendrán alguna magnitud, alguna dirección y algún sentido.



Figura 3.2: Fuerza de contacto.

Este tipo de acción puede a primera vista parecer más natural que una acción a distancia. Sin embargo también caben algunas preguntas. Si la materia está formada por átomos o moléculas, existiendo gran cantidad de espacio vacío entre ellos, ¿qué significa realmente que un cuerpo esté en contacto con otro?

3.1.3. Tercera ley de Newton

Cuando dos cuerpos se colocan en contacto, la fuerza de contacto que se desarrolla es en realidad una pareja de fuerzas. Una de esas fuerzas actúa sobre el primer cuerpo y es causada por el segundo, y la otra fuerza actúa sobre el segundo cuerpo y es causada por el primero. Se las reconoce como fuerzas de acción y de reacción. Cual de ellas se llame acción o reacción es irrelevante. La tercera ley de Newton establece que esas dos fuerzas tienen la misma dirección, igual magnitud, sentido contrario y actúan sobre una misma línea.

En un esquema la situación es como la que se muestra

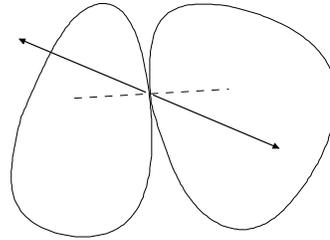


Figura 3.3: Acción y reacción.

3.1.4. Unidades de Fuerza

La unidad de fuerza en el sistema internacional de unidades es el Newton, simbolizado por N . A veces se usan otras unidades

La dina $\text{dyn} = 0,000\,01\, N$,

La libra fuerza $\text{lbf} = 4,448\, N$,

El kilogramo fuerza $\text{kgf} = 9,8\, N$

3.2. Tipos de fuerzas de contacto

Cuando dos cuerpos están en contacto, se manifiestan fuerzas de interacción que satisfacen la tercera ley de Newton, es decir la llamada ley de acción y reacción. Es conveniente clasificarlas en diversos tipos que explicaremos.

3.2.1. Fuerza normal

La componente de la fuerza de contacto perpendicular a la superficie en contacto, se denomina usualmente reacción normal N .

3.2.2. Fuerza de roce

La componente de la fuerza de contacto paralela a la superficie en contacto, se denomina fuerza de roce f .

3.2.3. Tensiones

Cuando un cuerpo es tirado mediante una cuerda, la cuerda ejerce una fuerza de tracción llamada la tensión de la cuerda T .

La figura siguiente (a), ilustra a un cuerpo de masa m que está apoyado sobre el suelo y tirado mediante una cuerda. La figura (b) ilustra el sistema de fuerzas que actúan sobre el cuerpo, en un diagrama llamado de cuerpo libre, donde los contactos se han sustituido por las respectivas fuerzas de acción, la normal N , la fuerza de roce f , la tensión T y la fuerza de acción a distancia, el peso del cuerpo de magnitud mg .

3.2.4. Superficies lisas o sin roce

Si las superficies son lisas o en otras palabras sin roce, la fuerza de roce es cero y entonces la acción es puramente normal.

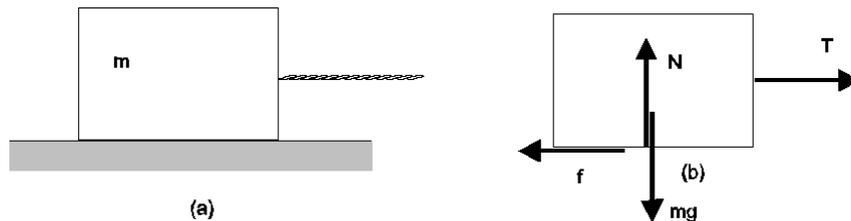


Figura 3.4:

3.3. Condiciones de equilibrio

Aunque el tema de los cuerpos en equilibrio será tratado con mayor profundidad en el capítulo siguiente, daremos algunos elementos aquí. Los cuerpos en equilibrio, es decir que permanecen en reposo bajo la acción de un determinado conjunto de fuerzas, permite investigar (en el laboratorio) cuando un sistema de fuerzas puede ser reemplazado por otro.

DEFINICION 3.3.1 *Diremos que dos sistemas de fuerzas son equivalentes cuando un mismo cuerpo permanece en equilibrio con ambos sistemas de fuerzas.*

Sin embargo seguiremos otra estrategia que consiste en analizar la posibilidad de cambiar el punto de aplicación de una fuerza, determinando en cada caso el efecto que ese cambio produce.

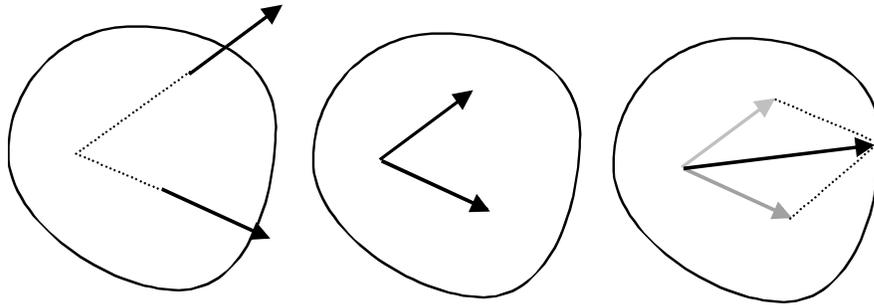


Figura 3.5: Fuerzas concurrentes

3.3.1. Línea de acción y punto de aplicación

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo sólido indeformable, se ha comprobado experimentalmente que la fuerza se puede desplazar libremente sobre su línea de acción. En otras palabras la fuerza puede ser aplicada indistintamente en cualquier punto de su línea de acción, siempre y cuando se mantenga su magnitud, dirección y sentido. Sin embargo no resulta lo mismo si se traslada la fuerza a otra línea paralela a su línea de acción. Para cuerpos reales deformables, no es posible cambiar el punto de aplicación de la fuerza sin que ello cambie su efecto, las deformaciones que ellas causan.

3.3.2. Fuerzas concurrentes

Cuando sobre un cuerpo sólido indeformable actúan dos fuerzas que no son paralelas y que están sobre un mismo plano, por lo dicho anteriormente, es posible trasladarlas al punto de intersección de sus líneas de acción. Se ha comprobado que esas dos fuerzas actuando en ese punto son equivalentes a una sola fuerza aplicada en ese mismo punto. Lo importante es que esa única fuerza es la suma vectorial de las dos fuerzas aplicadas.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

3.3.3. Par de Fuerzas

Dos fuerzas paralelas de igual magnitud y sentido contrario que no tienen la misma línea de acción, tienen una suma vectorial nula. Sin embargo su

efecto no es nulo, pues ese par de fuerzas tiende a hacer rotar el cuerpo. El par \vec{M} de ellas se define como

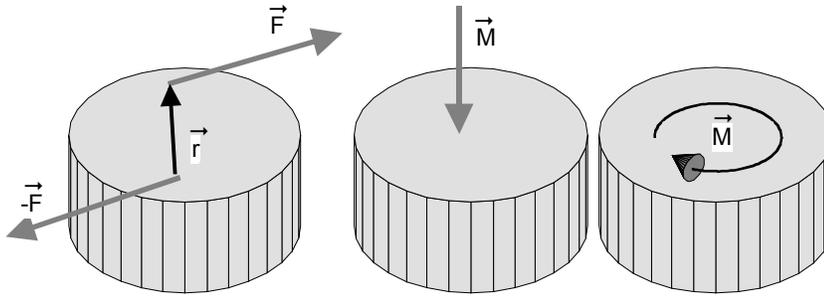
$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2, \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r} \times \vec{F},\end{aligned}\quad (3.1)$$

pues

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1.$$

El par \vec{M} resulta independiente del origen O puesto que sólo depende del vector posición relativo entre los dos puntos de aplicación. Tal vector que puede desplazarse libremente pues no depende del origen, se denomina el "par de las fuerzas". El par de fuerzas es perpendicular al plano que contiene las fuerzas y no es una fuerza, de hecho su unidad en el sistema SI es $[N\ m]$.

Las figuras siguientes muestran varias formas de representar un "par de las fuerzas":



La primera ilustra las dos fuerzas. La segunda, la representación vectorial del par y la última una representación simplificada donde se muestra en el plano de las fuerzas el efecto que el par produce.

3.3.4. Fuerzas no concurrentes

Como ya explicamos, una fuerza aplicada en un punto de un cuerpo rígido puede trasladarse libremente sobre su línea de acción. Para cambiarla a otra línea paralela debe tenerse cuidado. La figura (3.6) ilustra como se logra cambiar una fuerza \vec{F}_1 actuando en \vec{r}_1 a otro punto arbitrario \vec{r}_2 .

La manera de hacerlo es "agregando" en el punto \vec{r}_2 un vector nulo, que por supuesto no hace ni un efecto, es decir $\vec{F}_1 + (-\vec{F}_1)$, y como está ilustrado queda actuando la fuerza \vec{F}_1 aplicada en \vec{r}_2 más un par de fuerzas

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1. \quad (3.2)$$

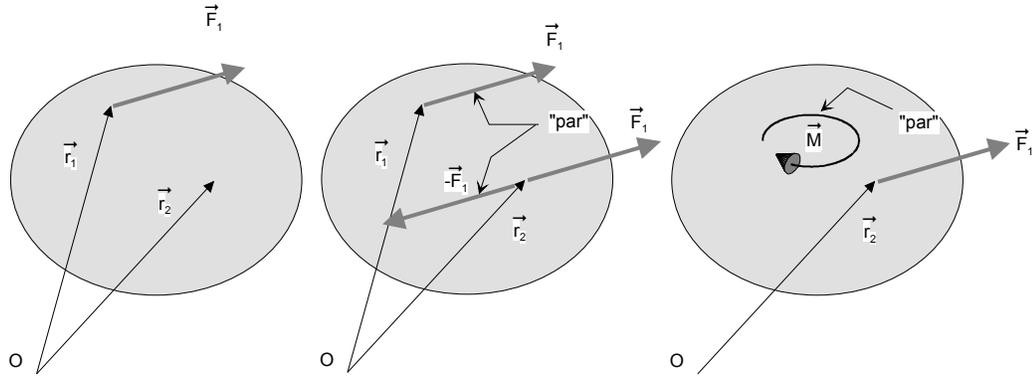


Figura 3.6:

Si se toma en cuenta que $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$ es el vector dirigido desde el punto donde se colocó la fuerza al punto donde estaba la fuerza, la receta es simplemente: cambie la fuerza \vec{F} manteniendo su magnitud, dirección y sentido a un punto arbitrario, considerando entonces que en el nuevo punto actúa la fuerza \vec{F} y además el par

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Como explicamos a continuación, este par es también el "torque" de la fuerza respecto al punto donde la fuerza se traslada.

3.3.5. Caso general

Si sobre un cuerpo actúan un conjunto de fuerzas \vec{F}_i aplicadas en \vec{r}_i , para sumarlas y obtener la fuerza resultante, de acuerdo a su suma vectorial, debemos hacerlas actuar en un mismo punto. Supongamos que las llevamos todas a un punto O arbitrario de posición \vec{r}_O . Generalizando lo anterior el cuerpo quedará sometido, además de la resultante en O ,

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i,$$

a una serie de pares de fuerzas dado por

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_O) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_O) \times \vec{F}_2 + \dots$$

Cada "par" no depende del origen pero si del punto al cual se trasladaron las fuerzas. Esta sumatoria que depende del punto O elegido (pero no del

origen) se denomina el torque resultante de las fuerzas respecto al punto O y se denota por

$$\vec{\tau}_O = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_i. \quad (3.3)$$

Si el origen del sistema de coordenadas se coloca precisamente en O , la expresión anterior se simplifica a

$$\vec{\tau}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (3.4)$$

Nuevamente expresamos este resultado en palabras: Si desea sumar vectorialmente las fuerzas en un punto arbitrario del cuerpo, lo puede hacer pero tenga en cuenta entonces que sobre el cuerpo actúa esa fuerza resultante (la suma vectorial de todas ellas) y un torque respecto a ese punto dado por

$$\vec{\tau}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (3.5)$$

La figura ilustra como se reduce un sistema de fuerzas arbitrario, donde se decidió sumar las fuerzas en el punto A , y luego se obtiene una fuerza resultante y un torque, lo que equivale a la situación de la figura (3.7):

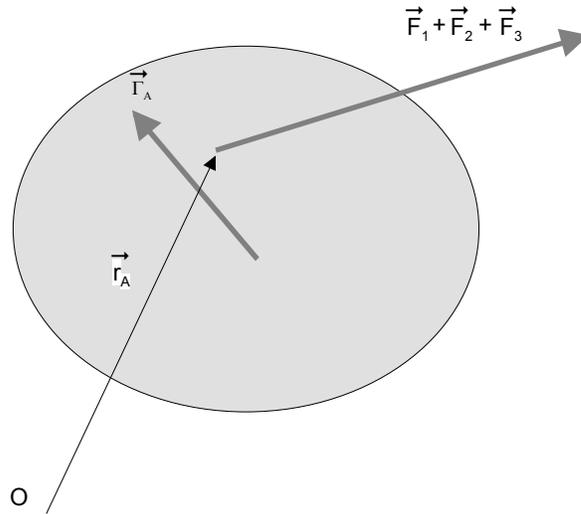


Figura 3.7:

siendo

$$\vec{\Gamma}_A = (\vec{r}_1 - \vec{r}_A) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_A) \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_A) \times \vec{F}_3.$$

3.4. Centro de masa

El centro de masa de un conjunto de partículas de masas m_i ubicadas en posiciones \vec{r}_i es un punto CM cuya posición se define mediante

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \quad (3.6)$$

3.4.1. Cuerpos continuos

Cuando el cuerpo es un continuo de masa, es necesario definir las densidades de masa, de las cuales hay tres tipos, dependiendo si el cuerpo es volumétrico, superficial o lineal. Consideraremos solo cuerpos homogéneos donde las densidades son constantes.

Si el cuerpo es homogéneo, con una densidad de masa constante, entonces para los tres casos señalados, se definen

$$\left\{ \begin{array}{lll} \rho = \frac{M}{V} & [\text{kg m}^{-3}] & \text{densidad volumétrica} \\ \sigma = \frac{M}{A} & [\text{kg m}^{-2}] & \text{densidad superficial} \\ \lambda = \frac{M}{L} & [\text{kg m}^{-1}] & \text{densidad lineal} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

las densidades volumétrica, superficial y lineal de masa: ρ , σ , y λ . M representa la masa total del cuerpo, V su volumen para el caso volumétrico, A su área para el caso superficial y L su longitud para el caso lineal.

3.5. Centroides

El concepto de centroide es bastante general y aplica a diversos conceptos. Por ejemplo existe el centroide de área, el centroide de volúmenes, el centroide de masas y otros más. En general se trata de un promedio ponderado de las cantidades involucradas. Por ejemplo considere un cuerpo plano que se ha subdividido en elementos infinitesimos de área dA ubicado en una posición especificada por un vector (variable) \vec{r} . El centroide de áreas se define como un punto C ubicado en la posición

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dA}{\int dA}. \quad (3.8)$$

Similarmente si un cuerpo tiene masa y se subdivide el cuerpo en elementos infinitesimos de volumen dV con masa dm ubicado en una posición

especificada por un vector (variable) \vec{r} , se define el centroide de masas, conocido simplemente como centro de masa CM , al punto cuya posición es

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}. \quad (3.9)$$

Cuando el cuerpo es homogéneo, entonces las masas contenidas en los elementos de volumen son

$$dm = \frac{M}{V} dV,$$

donde M es la masa total del cuerpo y V es el volumen total del cuerpo. Entonces en este caso

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} \frac{M}{V} dV}{\int \frac{M}{V} dV} = \frac{\int \vec{r} dV}{\int dV}, \quad (3.10)$$

que es también llamado centroide del volumen. Naturalmente si el cuerpo es una figura plana, la integral que resultará es de superficie

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \frac{M}{A} dA}{\int \frac{M}{A} dA} = \frac{\int \vec{r} dA}{\int dA}. \quad (3.11)$$

El centro de masa coincide con el centroide del área.

Las definiciones involucran el concepto de **integral** que usted probablemente no conoce, de modo que los centros de áreas de las figuras planas más importantes le serán dados. Es importante destacar que si la figura tiene un eje de simetría de rotación de 180° , entonces el centro de área debe estar sobre ese eje. Si hay dos ejes de simetría entonces el centro de área está donde se intersectan. Este es el caso del cuadrado, del rectángulo, del círculo y otras figuras con simetrías, como se indica en la figura

Para otras figuras importantes se dan resultados para la ubicación del centro de área y además de su área, por ser de importancia en algunos problemas de la estática.

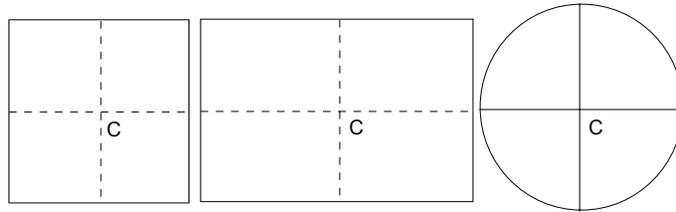


Figura 3.8: Centroides.

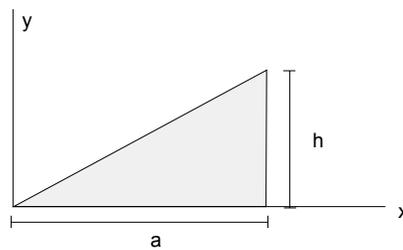


Figura 3.9: centroide triángulo.

3.5.1. Triángulo

$$x_C = \frac{2}{3}a,$$

$$y_C = \frac{1}{3}h,$$

$$A = \frac{1}{2}ah.$$

3.5.2. Triángulo

$$x_C = \frac{1}{3}(a + b),$$

$$y_C = \frac{1}{3}h,$$

$$A = \frac{1}{2}bh.$$

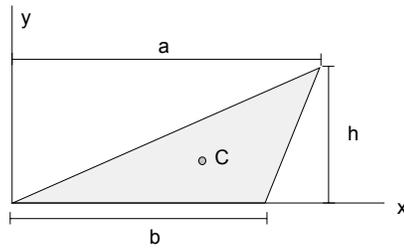


Figura 3.10: Centroide triángulo.

3.5.3. Semi disco

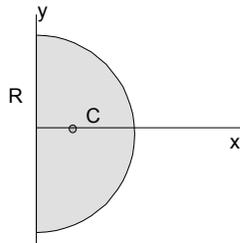


Figura 3.11: Centroide semi disco.

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{4R}{3\pi}, \\y_C &= 0, \\A &= \frac{1}{2}\pi R^2.\end{aligned}$$

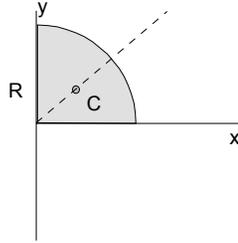


Figura 3.12: Cuarto disco.

3.5.4. Cuarto de disco

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{4R}{3\pi}, \\y_C &= \frac{4R}{3\pi}, \\A &= \frac{1}{4}\pi R^2.\end{aligned}$$

3.5.5. Combinación de áreas

De la expresión

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dA}{A},$$

si subdividimos el área en dos partes A_1 y A_2 , podemos escribir

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CM} &= \frac{\int_{A_1} \vec{r} dA + \int_{A_2} \vec{r} dA}{A_1 + A_2} \\&= \frac{A_1 \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \vec{r} dA + A_2 \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \vec{r} dA}{A_1 + A_2} \\&= \frac{A_1 \vec{r}_{CM_1} + A_2 \vec{r}_{CM_2}}{A_1 + A_2},\end{aligned}$$

expresión que permite obtener el centroide de área de combinación de figuras con centroides conocidos.

3.6. Resultante de fuerzas paralelas de igual magnitud

Cuando las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son todas paralelas, tal como es el caso de la fuerza peso que actúa sobre un conjunto de partículas, entonces la resultante la podemos colocar en cualquiera de esas líneas, siempre y cuando se agregue el correspondiente torque. Por ejemplo para el caso del peso, si \hat{j} indica la dirección vertical hacia arriba, la resultante del peso colocada en O será

$$\vec{W} = \sum_i m_i g(-\hat{j}) = -Mg\hat{j}, \quad (3.12)$$

donde M representa la masa total del sistema $M = \sum m_i$. Pero existe además un torque dado por

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_O &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times (-m_i g \hat{j}), \\ &= \left(\sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) m_i \right) \times (-g \hat{j}), \\ &= \sum_i \vec{r}_i m_i \times (-g \hat{j}) - \sum_i \vec{r}_O m_i \times (-g \hat{j}) \\ &= M(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O) \times (-g \hat{j}). \end{aligned}$$

Note que el torque es nulo si $\vec{r}_O = \vec{r}_{CM}$, es decir si la resultante de las fuerzas paralelas se coloca en el centro de masa. De allí que se acostumbra a decir que la resultante de los pesos de las partes de un cuerpo actúa en el centro de masa, pues en ese caso el torque debido a trasladar las fuerzas paralelamente al centro de masa es nulo.

3.6.1. Centro de Fuerzas paralelas

En general todo sistema de fuerzas paralelas actuando sobre un cuerpo rígido es equivalente a la pura resultante de ellas actuando en un punto A de una línea específica siempre que se agregue el torque de las fuerzas respecto a ese mismo punto, es decir

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \sum \vec{F}_i, \\ \vec{\Gamma}_A &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i = \vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F}. \end{aligned}$$

El punto A es arbitrario, pero puede ser conveniente escogerlo de manera que respecto a ese punto el torque de las fuerzas sea nulo. Ese punto, llamado centro de fuerzas, es un punto respecto al cual

$$\vec{\Gamma}_A = 0,$$

o sea

$$\vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{0}.$$

Si las fuerzas son paralelas, digamos respecto al eje OZ , entonces las podemos trasladar sobre su línea de acción de manera que queden todas actuando en puntos del plano OXY . Para determinar \vec{r}_A , es decir la ubicación de ese punto sobre el plano OXY , la última ecuación la multiplicamos vectorialmente por \vec{F} resultando

$$\vec{\Gamma}_O \times \vec{F} = (\vec{r}_A \times \vec{F}) \times \vec{F} = (\vec{r}_A \cdot \vec{F})\vec{F} - F^2\vec{r}_A,$$

pero \vec{r}_A está sobre el plano OXY y la fuerza sobre el eje OZ de manera que

$$\vec{r}_A \cdot \vec{F} = 0$$

y se logra despejar

$$\vec{r}_A = \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}_O}{F^2}, \quad (3.13)$$

que es la posición del centro de fuerzas, es decir donde se puede considerar actuando la fuerza resultante con torque nulo respecto a ese punto, es decir el sistema de fuerzas se reduce a la resultante de ellas en el centro de fuerzas y nada más. A ese punto lo llamaremos \vec{r}_F de ahora en adelante.

Debemos remarcar que existe un centro de fuerza exclusivamente si la magnitud de la fuerza resultante no es nula, es decir

$$F \neq 0.$$

y además de $\vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{0}$ se deduce que sólo hay solución para \vec{r}_A si el torque en O es perpendicular a la fuerza resultante \vec{F} . Sin embargo no estamos analizando el caso más general, sino cuando todas las fuerzas son paralelas, digamos a la dirección \hat{k} . Se tiene entonces que

$$\vec{F} = \left(\sum F_i \right) \hat{k},$$

y

$$\vec{\Gamma}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \left(\sum F_i \vec{r}_i \right) \times \hat{k},$$

entonces

$$\vec{r}_F = \frac{\hat{k} \times \sum F_i (\vec{r}_i \times \hat{k})}{F} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{F}. \quad (3.14)$$

Coordenadas del centro de fuerzas

Como todas las fuerzas son paralela a cierta dirección, digamos \hat{k} entonces la expresión anterior se simplifica si tomamos todos los \vec{r}_i en un plano perpendicular al eje OZ (los puntos de aplicación pueden cambiarse libremente en la dirección OZ)

$$\vec{r}_F = \frac{\hat{k} \times \sum F_i (\vec{r}_i \times \hat{k})}{F} = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{F},$$

que conduce a las coordenadas del centro de fuerza. Si tomamos las componentes x , y obtenemos

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}, \\ y_F &= \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Note que si las fuerzas F_i son constantes ($i = 1, 2, 3 \dots N$), lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{\sum x_i}{N}, \\ y_F &= \frac{\sum y_i}{N}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

EJEMPLO 3.6.1 *Considere una lámina cuadrada de arista a sobre el plano OXY , que está actuada en sus cuatro vértices por fuerzas iguales de magnitud F en la dirección del eje OZ . Determine la posición del centro de fuerza. (La respuesta es más que evidente, pero queremos probar la teoría elaborada)*

Solución. Si un vértice se coloca en el origen y los lados paralelos a los ejes OXY se tiene con $\vec{r}_1 = (0, 0)$, $\vec{r}_2 = (0, a)$, $\vec{r}_3 = (a, 0)$, $\vec{r}_4 = (a, a)$

$$\begin{aligned} x_F &= \frac{a + a}{4} = \frac{a}{2}, \\ y_F &= \frac{a + a}{4} = \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

es decir el centro del cuadrado.

EJEMPLO 3.6.2 Para la misma situación del problema anterior suponga ahora que las magnitudes son $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 4$, determine el centro de fuerza.

Solución. Ahora

$$x_F = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{3a + 4a}{10} = \frac{7a}{10}$$

$$y_F = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i} = \frac{2a + 4a}{10} = \frac{6a}{10}.$$

3.6.2. Centro de fuerzas distribuidas paralelas

Si se tienen fuerzas distribuidas en forma continua por unidad de longitud, supongamos que verticalmente hacia abajo y actuando sobre una línea horizontal, el eje OX , entonces la fuerza que actúa en un elemento de longitud dx en posición x es

$$dF = w(x)dx.$$

A $w(x)$ se le llama la densidad lineal de la fuerza y está expresada en N m^{-1} . En el caso de la figura 3.13, se ha supuesto una fuerza distribuida cuya

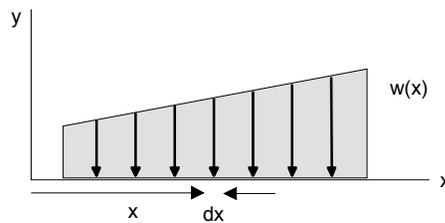


Figura 3.13: Fuerza distribuida.

densidad lineal varía linealmente con la posición. La fuerza total y su centro

de fuerza se puede entonces calcular de acuerdo a la sección anterior como

$$x_F = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} \rightarrow \frac{\int x w(x) dx}{\int w(x) dx} = \frac{1}{A} \int x dA = x_C, \quad (3.17)$$

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \rightarrow \int w(x) dx (-\hat{j}) = -A\hat{j}.$$

Donde A representa el "área" de la figura de la distribución de fuerza. Nuevamente nos encontramos con el concepto de integral, detalles que usted puede omitir, pero debe saber el resultado: el centro de fuerzas corresponde al centroide de la figura y la fuerza total es el "área" de la distribución de fuerza. En realidad se calcula como área, pero tiene unidades de fuerza:

$$A = \int w(x) dx.$$

EJEMPLO 3.6.3 *La figura siguiente ilustra una barra cargada con fuerzas distribuidas linealmente. Se pide un sistema de fuerza equivalente con torque nulo.*

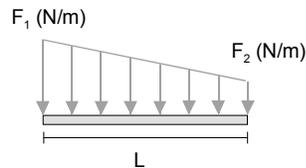


Figura 3.14:

Solución. El cálculo de la fuerza equivalente F y de la coordenada del

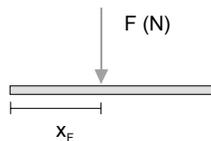


Figura 3.15:

centro de fuerza se hace a continuación. La fuerza resultante es el área de la

distribución de Fuerza, es decir

$$F = F_2L + \frac{1}{2}(F_1 - F_2)L = \frac{1}{2}L(F_2 + F_1).$$

El centroide de la figura lo determinamos según

$$\begin{aligned} x_C = x_F &= \frac{\frac{1}{2}L(F_2L) + \frac{1}{3}L(\frac{1}{2}(F_1 - F_2)L)}{(F_2L) + (\frac{1}{2}(F_1 - F_2)L)} \\ &= \frac{1}{3}L \frac{2F_2 + F_1}{F_2 + F_1}. \end{aligned}$$

Note que el caso de un triángulo es un caso particular con $F_1 = 0$ o $F_2 = 0$.



3.7. Trabajar con componentes

Aunque la mayor parte del trabajo de desarrollo ha sido hecho con los vectores, en la práctica prueba ser conveniente trabajar con las componentes de los vectores en algún sistema de referencia. Usualmente se utiliza un sistema cartesiano de referencia con ejes OX , OY y OZ . Aunque creemos que todo ha sido explicado en el capítulo de vectores, lo repetimos en parte para fuerzas y torques. Por ejemplo si una fuerza \vec{F} está en el plano OXY , y si α es el ángulo que ella forma con el eje OX entonces

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j},$$

siendo

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad F_x = |\vec{F}| \cos \alpha, \quad \text{y} \quad F_y = |\vec{F}| \sin \alpha \\ \vec{F} &= (F_x, F_y) = (|\vec{F}| \cos \alpha, |\vec{F}| \sin \alpha). \end{aligned}$$

Si el punto de aplicación de la fuerza es

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j},$$

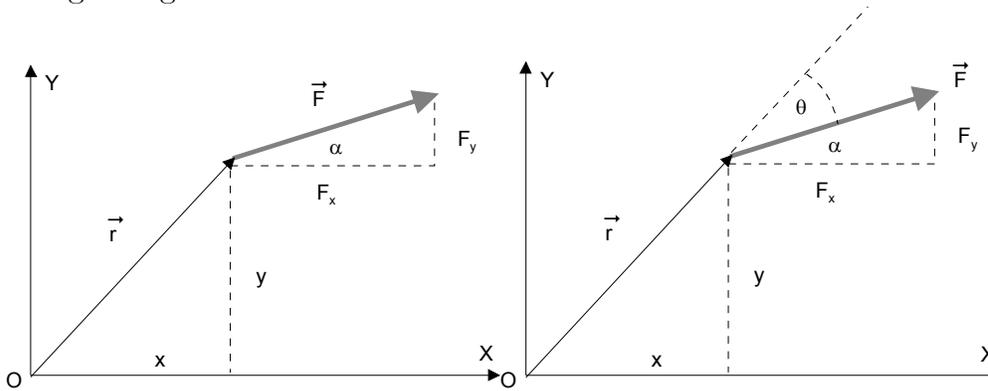
entonces el torque de ella respecto al origen será

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (xF_y - yF_x)\hat{k},$$

es decir

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_O &= (x |\vec{F}| \sin \alpha - y |\vec{F}| \cos \alpha) \hat{k} \\ &= |\vec{F}| (x \sin \alpha - y \cos \alpha) \hat{k}.\end{aligned}$$

La figura siguiente ilustra los diferentes términos involucrados.



De todas maneras el producto cruz es posible realizarlo más fácilmente si se conoce el ángulo θ entre el vector del punto de aplicación y la fuerza de la forma

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta (-\hat{k}),$$

donde el sentido se obtiene usando la regla de la mano derecha, es decir hacia adentro del papel.

3.7.1. Eje torsor

Como hemos visto, todo sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido es equivalente a la resultante vectorial de todas las fuerzas que actúan en un punto arbitrario O más el torque de todas las fuerzas respecto a ese punto. ¿Podemos elegir algún punto tal que la resultante de todas las fuerzas y el torque sean paralelos? Un caso simple que ilustra con claridad la existencia de un eje torsor es el que ilustra la figura, donde mediante una "llave" se aprieta una tuerca. Analicemos esta posibilidad de un punto de vista matemático. Sea en el origen o simplemente en un punto O

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum \vec{F}_i, \\ \vec{\Gamma}_O &= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i.\end{aligned}$$

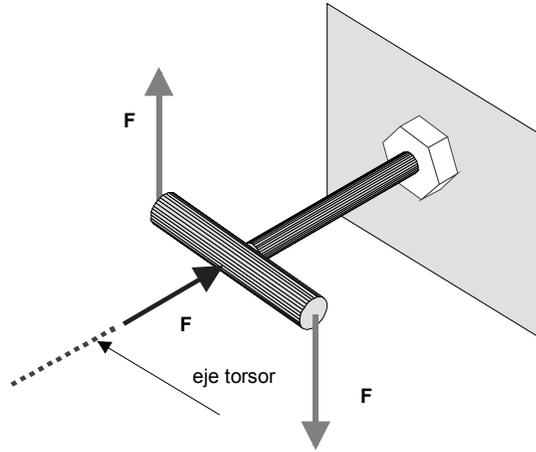


Figura 3.16:

Entonces en otro punto A

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_A &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i = \vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F}, \\ \vec{F} &= \sum \vec{F}_i.\end{aligned}$$

Para que el torque y la resultante sean paralelas debe ser

$$\vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F} = \lambda \vec{F},$$

Si esta igualdad la multiplicamos $\times \vec{F}$ resultará

$$\vec{\Gamma}_O \times \vec{F} - (\vec{r}_A \times \vec{F}) \times \vec{F} = \vec{0},$$

y haciendo uso de la identidad

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C},$$

podemos escribir

$$\vec{\Gamma}_O \times \vec{F} = (\vec{r}_A \cdot \vec{F})\vec{F} - |\vec{F}|^2 \vec{r}_A,$$

de donde, si $|\vec{F}| \neq 0$, podemos despejar una solución

$$\vec{r}_A = \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}_O}{|\vec{F}|^2}$$

Esto es, en el punto A el torque y la fuerza resultante son paralelas. La recta que pasa por A y es paralela a la fuerza resultante (y al torque) se denomina eje torsor. En algunas situaciones simples puede resultar que el torque en A sea nulo, pero no importa, un vector nulo es paralelo a cualquier vector. Como en estos casos el torque es nulo, el eje torsor pasa por lo que se denomina centro de fuerza.

EJEMPLO 3.7.1 *Considere un cuerpo sometido a fuerzas de manera que en el punto O la resultante de las fuerzas sea*

$$\vec{F} = F\hat{k},$$

y el torque respecto al punto O sea

$$\vec{\Gamma}_O = \tau\hat{i} + \tau\hat{k},$$

que evidentemente no son paralelos. Según nuestra fórmula, la posición del eje torsor resulta ser

$$\vec{r}_A = \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}_O}{F^2} = \frac{\hat{k} \times \tau\hat{i}}{F} = \frac{\tau}{F}\hat{j}.$$

Si creemos en el resultado, en ese punto deben ser la fuerza resultante y el torque paralelos. Si aún no lo cree, verifiquemos. El en punto A actuará la fuerza

$$\vec{F} = F\hat{k},$$

y al torque en O hay que agregarle el torque producido al correr la fuerza, es decir

$$\vec{\Gamma}_A = \vec{\Gamma}_O + (-\vec{r}_A \times \vec{F}),$$

que se calcula y resulta

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_A &= \tau\hat{i} + \tau\hat{k} + \left(-\frac{\tau}{F}\hat{j}\right) \times F\hat{k} \\ &= \tau\hat{i} + \tau\hat{k} - \tau\hat{i} = \tau\hat{k}, \end{aligned}$$

justamente paralelo a la fuerza.

Notemos que a pesar de que las ecuaciones que determinan el centro de fuerza y el eje torsor son idénticas, hay una diferencia. Para la determinación del centro de fuerzas las fuerzas \vec{F}_i son todas paralelas, a diferencia del caso en que se calcula el eje torsor, donde se consideran el torque y la fuerza resultante dadas arbitrariamente en un punto. Para clarificar este punto considere el ejemplo:

EJEMPLO 3.7.2 Considere dos fuerzas iguales de magnitud F actuando perpendicularmente en los extremos de una barra de longitud $2a$. Determine el centro de fuerza y el eje torsor.

Solución. Sea OZ la dirección de la fuerza, OY la dirección de la barra, tenemos entonces que

$$\vec{F} = 2F\hat{k},$$

y si el origen está en un extremo

$$\vec{\Gamma}_O = 2a\hat{j} \times F\hat{k} = 2aF\hat{i},$$

de donde

$$\vec{r}_F = \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}_O}{F^2} = \frac{2F\hat{k} \times 2aF\hat{i}}{4F^2} = a\hat{j},$$

el centro de la barra. Si se calcula la posición del eje torsor, obtenemos la misma respuesta. Evidentemente como el torque es nulo respecto al centro de fuerza, él es paralelo a la fuerza. En el caso en que la fuerza resultante y el torque sean dados en un punto, podremos calcular el eje torsor solamente pero no el centro de fuerza, porque no hay razón para suponer que las fuerzas eran todas paralelas.

EJEMPLO 3.7.3 Considere una fuerza $\vec{F}_1 = F(-1, 0, 0)$ actuando en el punto $(0, 0, 0)$ y otra fuerza $\vec{F}_2 = F(0, 0, -1)$ actuando en el punto $A = (a, a, 0)$, determine el eje torsor

Solución. Aquí, llamaremos T al punto por donde pasa el eje torsor

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F(-1, 0, -1),$$

calculando resulta

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_O &= aF(1, 1, 0) \times (0, 0, -1) = aF(-1, 1, 0) \\ \vec{r}_T &= \frac{\vec{F} \times \vec{\Gamma}_O}{F^2} = \frac{a}{2}(1, 1, -1)\end{aligned}$$

Para verificar calculamos el torque de las fuerzas respecto al punto T resultará

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_T &= -\frac{aF}{2}(1, 1, -1) \times (-1, 0, 0) + aF\left((1, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, -1)\right) \times (0, 0, -1) \\ &= aF\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) = \frac{aF}{2}(-1, 0, -1),\end{aligned}$$

paralelo a la fuerza resultante. Si buscamos el centro de fuerza ahora no podemos utilizar la relación establecida anteriormente porque las fuerzas no son paralelas. Deberíamos resolver la ecuación

$$\vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{0},$$

pero evidentemente esta ecuación sólo puede tener solución para \vec{r}_A si el torque y la fuerza son perpendiculares, lo cual en este caso no se cumple de porque $\vec{\Gamma}_O = aF(-1, 1, 0)$ y $\vec{F} = F(-1, 0, -1)$ de manera que

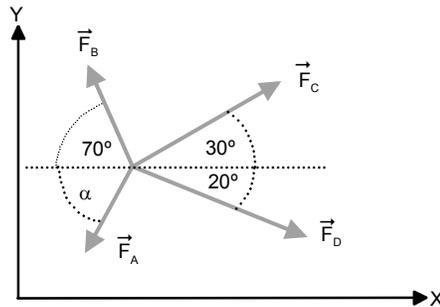
$$\vec{\Gamma}_O \cdot \vec{F} = aF^2(-1, 1, 0) \cdot (-1, 0, -1) = aF^2 \neq 0.$$

Es decir este sistema de dos fuerzas no tiene centro de fuerza.

3.8. Ejercicios

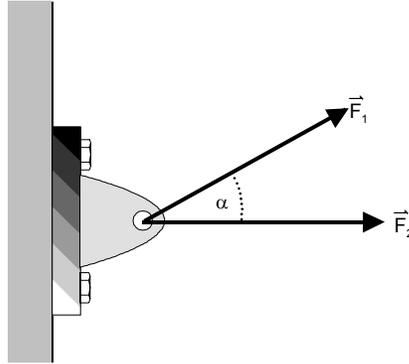
NOTA 3.3 (1), (2), y (3) representan el grado de dificultad del problema. El (1) corresponde a problemas tipo prueba, el (2) corresponde a problemas discriminatorios y el (3) a problemas de tareas.

EJERCICIO 3.1 (1) Las cuatro fuerzas concurrentes mostradas en la figura tienen una resultante igual a cero. Si $|\vec{F}_B| = 800 \text{ N}$, $|\vec{F}_C| = 1000 \text{ N}$ y $|\vec{F}_D| = 800 \text{ N}$ determine la magnitud de \vec{F}_A y el ángulo α .

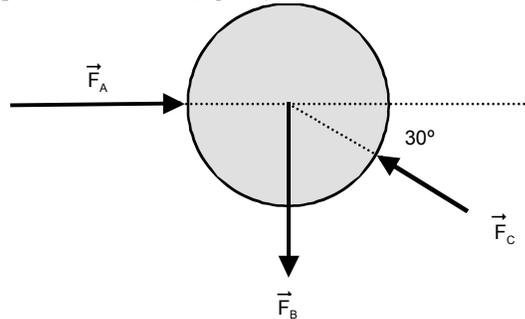


EJERCICIO 3.2 (1) Las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre el soporte son, figura, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 100 \text{ N}$. El soporte fallará si la magnitud de la

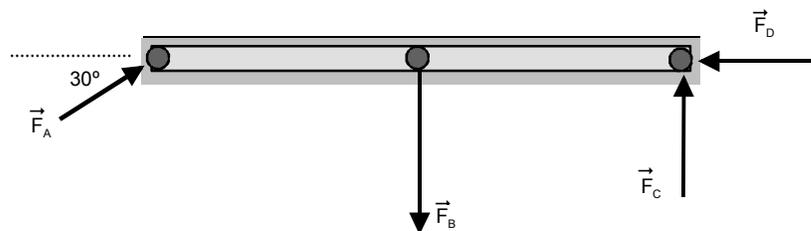
fuerza resultante que actúa sobre él excede 150 N. Determine el intervalo de valores aceptables para el ángulo α .



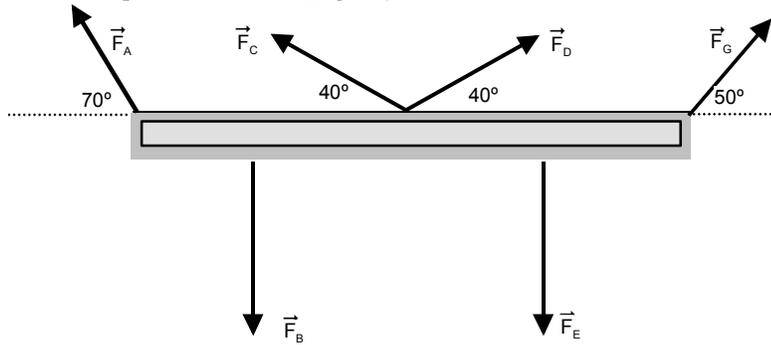
EJERCICIO 3.3 (1) Tres fuerzas actúan sobre la esfera mostrada en la figura. La magnitud de \vec{F}_B es de 60 N y la resultante de las tres es igual a cero. Determine las magnitudes de \vec{F}_A y \vec{F}_C .



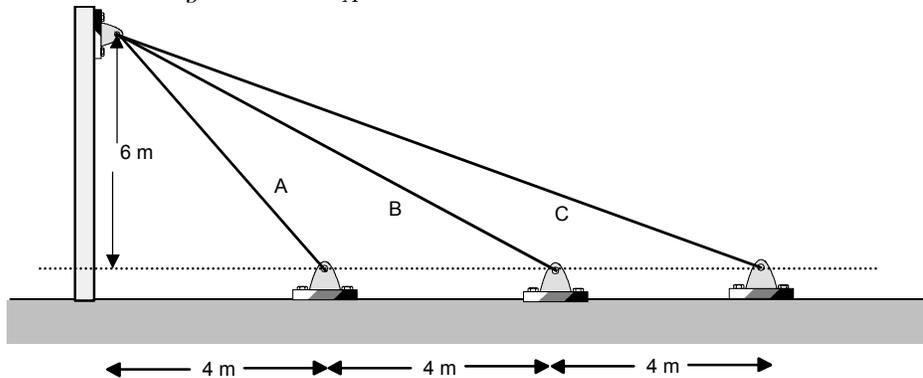
EJERCICIO 3.4 (1) Cuatro fuerzas actúan sobre una viga como se indica en la figura. La resultante de las cuatro fuerzas es cero y además $|\vec{F}_B| = 10000$ N, $|\vec{F}_C| = 5000$ N. Determine las magnitudes de \vec{F}_A y \vec{F}_D .



EJERCICIO 3.5 (1) Seis fuerzas actúan sobre una viga que forma parte de la estructura de un edificio, como se indica en la figura, en los extremos, punto medio y a un cuarto de la longitud de la viga. Se sabe que la resultante de todas ellas es cero y que $|\vec{F}_B| = |\vec{F}_E| = 5 \text{ kN}$, $|\vec{F}_C| = 4 \text{ kN}$, $|\vec{F}_D| = 2 \text{ kN}$. Determine las magnitudes de \vec{F}_A y \vec{F}_G .

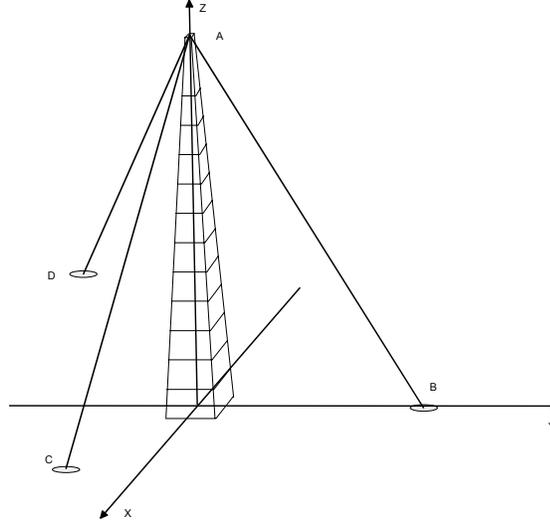


EJERCICIO 3.6 (1) Los cables A, B y C, figura, ayudan a soportar una columna de una estructura. Las magnitudes por los cables son iguales $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_E| = |\vec{F}_C|$ y se sabe además que la magnitud de la resultantes es 200 kN. Determine la magnitud de \vec{F}_A .

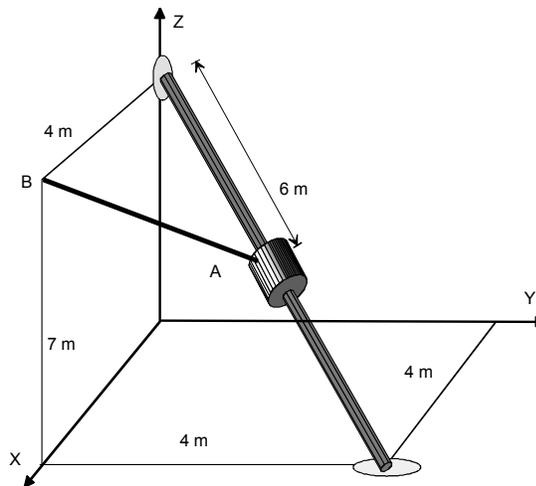


EJERCICIO 3.7 (1) Se tiene una fuerza $\vec{F} = 600\hat{i} - 700\hat{j} + 600\hat{k} \text{ N}$. Determine los ángulos entre el vector \vec{F} y los ejes coordenados positivos.

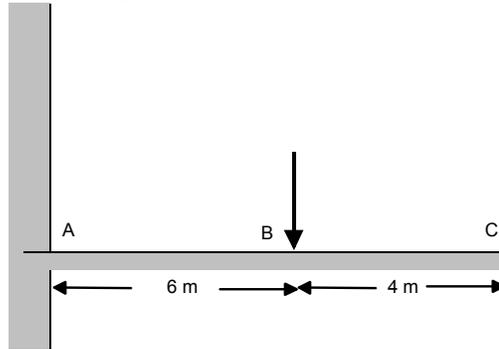
EJERCICIO 3.8 (1) La torre de 70 m de altura que se muestra en la figura está soportada por tres cables que ejercen sobre ella las fuerzas \vec{F}_{AB} , \vec{F}_{AC} y \vec{F}_{AD} . La magnitud de cada una de esas fuerzas es de 2 kN. Exprese vectorialmente la fuerza resultante ejercida por los cables sobre la torre. Las coordenadas de los apoyos son $C = (40, -40)$, $B = (0, 40)$ y $D = (-60, -60)$.



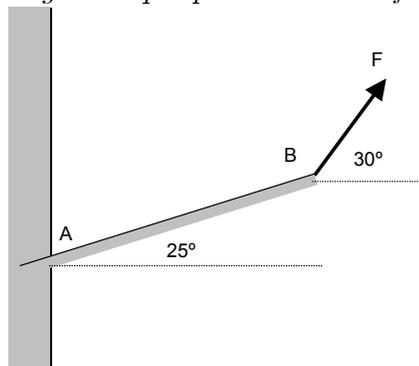
EJERCICIO 3.9 (1) El cable AB mostrado en la figura ejerce una tensión de magnitud 32 N sobre el collarín en A. Exprese vectorialmente la fuerza de tensión \vec{T} .



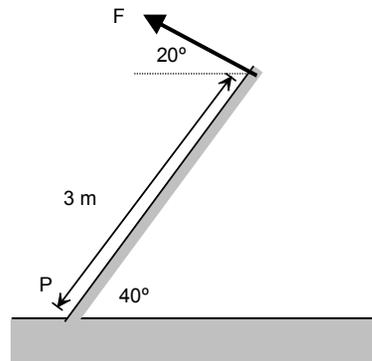
EJERCICIO 3.10 (1) *Determine el torque de la fuerza de 50 kgf respecto a los puntos A, B y C de la figura.*



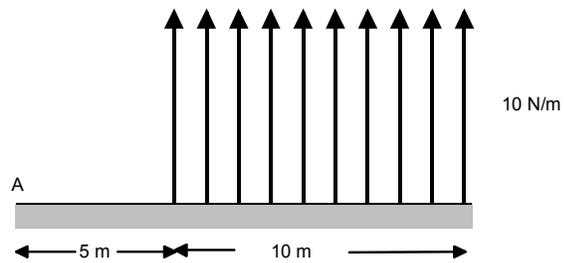
EJERCICIO 3.11 (1) *En la figura, la viga AB de 5 m de longitud fallará si el torque de la fuerza respecto al punto A excede de 10 N·m. Con esa condición determine la máxima magnitud que puede tener la fuerza.*



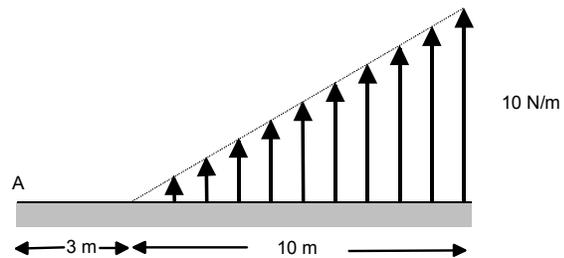
EJERCICIO 3.12 (1) *De acuerdo a la figura, determine el torque de la fuerza de 80 N respecto al punto P.*



EJERCICIO 3.13 (1) *Determine la magnitud del torque de la fuerza distribuida indicada en la figura respecto al punto A y la posición de su centro de fuerza.*



EJERCICIO 3.14 (1) *Determine la magnitud del torque de la fuerza distribuida indicada en la figura respecto al punto A y la posición de su centro de fuerza.*



Fuerzas y equilibrio

La estática determina las condiciones bajo las cuales un cuerpo actuado por diversas fuerzas permanece en equilibrio, es decir en reposo. El desarrollo de la estática viene desde mucho tiempo atrás, mucho antes del desarrollo de la dinámica. Algunos de sus principios fueron formulados por los egipcios y los babilónicos en problemas relacionados con la construcción de las pirámides y de templos. Entre los más antiguos escritos sobre este tema se puede mencionar a Arquímedes quién formuló los principios del equilibrio de fuerzas actuando en palancas y algunos principios de la hidrostática. Por estas razones no creemos conveniente considerar a la estática como un caso particular de la dinámica.

La principal razón para que desarrollo de la dinámica fuera posterior, está directamente relacionada con el desarrollo de los métodos para medir el tiempo, es decir del desarrollo de los relojes.

Generalmente ocurre algo similar. Un avance en una teoría permite la construcción de nuevos aparatos de medición que a su vez ayudan a perfeccionar la teoría y así sucesivamente. El desarrollo de nuevas tecnologías permite el avance en las teorías y recíprocamente. ¿Qué fue primero?. Nuestra posición es que lo primero es la observación del mundo natural mediante los instrumentos naturales básicos, nuestros sentidos.

4.1. Condiciones de equilibrio. Leyes de la estática

4.1.1. Equilibrio de una partícula

La condición necesaria y suficiente para que una partícula permanezca en equilibrio (en reposo) es que la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella sea cero

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (4.1)$$

Naturalmente con esta condición la partícula podría también moverse con velocidad constante, pero si está inicialmente en reposo la anterior es una condición necesaria y suficiente.

4.1.2. De un sistema de partículas

Para que un sistema de partículas permanezca en equilibrio, cada una de sus partículas debe permanecer en equilibrio. Ahora las fuerzas que actúan sobre cada partícula son, en parte de interacción \vec{f}_{ij} con las otras partículas del sistema y en parte proveniente del exterior \vec{F}_i^{ext} , es decir

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}. \quad (4.2)$$

Aquí \vec{f}_{ij} representa la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula i . Pero las fuerzas de interacción satisfacen la tercera ley de Newton, ley llamada de acción y reacción que dice

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}, \quad (4.3)$$

además que \vec{f}_{ij} es paralela a la línea que une las partículas i con j

$$\vec{f}_{ij} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{0}. \quad (4.4)$$

De este modo un sistema de partículas está en equilibrio si

$$\vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{0}, \text{ para todo } i.$$

En otras palabras la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada partícula debe ser nula.

4.1.3. Cuerpo rígido

En el desarrollo de la estática consideraremos situaciones de equilibrio de cuerpos rígidos, es decir que no se deforman. En rigor no existen cuerpos indeformables, de manera que la aplicación de las leyes de la estática es una aproximación que es buena si las deformaciones son despreciables frente a otras dimensiones del problema. El tema de la estática de cuerpos deformable es el tema de otros cursos

Si el cuerpo rígido permanece en equilibrio con el sistema de fuerzas exteriores aplicado, entonces para que todas las partículas estén en equilibrio es suficiente que tres de sus partículas no colineales estén en equilibrio. Las demás no pueden moverse por tratarse de un cuerpo rígido. Las condiciones bajo las cuales un cuerpo rígido permanece en equilibrio son que la fuerza externa resultante y el torque externo resultante respecto a un origen arbitrario son nulos, es decir

$$\vec{F}^{ext} = \sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}, \quad (4.5)$$

$$\vec{\Gamma}_O^{ext} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}, \quad (4.6)$$

siendo O un punto arbitrario. De acuerdo a

$$\vec{\Gamma}_A = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i = \vec{\Gamma}_O - \vec{r}_A \times \vec{F}, \quad (4.7)$$

se constata que entonces el torque resultante es cero respecto a cualquier punto.

4.1.4. La fuerza de roce estática

Cuando los cuerpos están en equilibrio, la fuerza de roce se denomina fuerza de roce estática f_s . En la figura siguiente se ilustra lo que acontece cuando un cuerpo permanece en equilibrio bajo el sistema de fuerzas indicado. La resultante de las fuerzas en el sentido horizontal y vertical debe ser nula, entonces

$$\begin{aligned} T - f_s &= 0, \\ N - mg &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} f_s &= T, \\ N &= mg. \end{aligned} \quad (4.8)$$

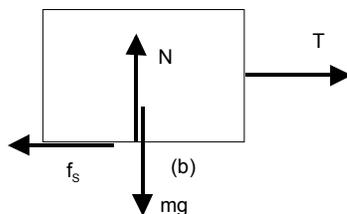


Figura 4.1:

Es decir, la fuerza de roce permanece igual a la fuerza aplicada de tensión. Pero eso tiene un límite, La fuerza de roce estática puede aumentar hasta un límite, el cual depende de la naturaleza de las superficies en contacto a través de un coeficiente μ_S llamado coeficiente de roce estático, y del grado en que las superficies estén apretadas entre sí, esto es ese valor máximo es proporcional a la componente normal de la fuerza N . En este modelo entonces

$$f_S^{\text{máx}} = \mu_S N, \quad (4.9)$$

siendo entonces

$$f_S \leq \mu_S N. \quad (4.10)$$

Si la fuerza aplicada T iguala a ese valor máximo se dice que el cuerpo está en equilibrio límite o bien a punto de resbalar. Para fuerzas aplicadas mayores el cuerpo se pondrá en movimiento acelerado, tema que será estudiado en el capítulo de dinámica.

4.1.5. Fuerzas causadas por ciertos soportes

Es conveniente analizar en forma más o menos sistemática las fuerzas que causadas por ciertos tipos de soportes, cuerdas, resortes, empotradas, articulaciones y otros, donde en las figuras que siguen se ilustran las componentes de fuerzas y pares que ellos causan.

El origen del par se puede explicar de acuerdo a la figura que sigue donde en general se puede pensar que las reacciones verticales en la empotrada son dos, de diferente magnitud y, lo que es más importante, no están sobre la misma línea. Para sumarlas, es necesario trasladar una a la línea de acción de la otra y eso causa el denominado par de la fuerza.

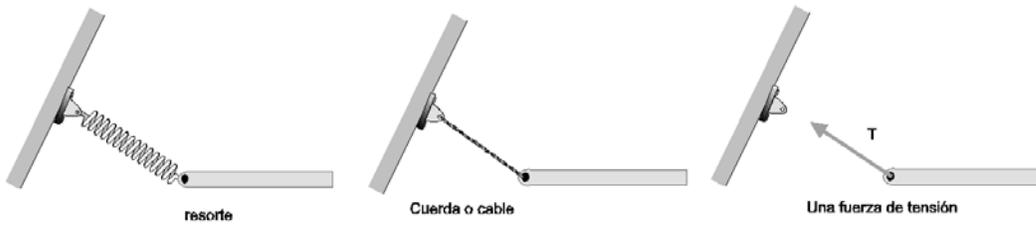


Figura 4.2:

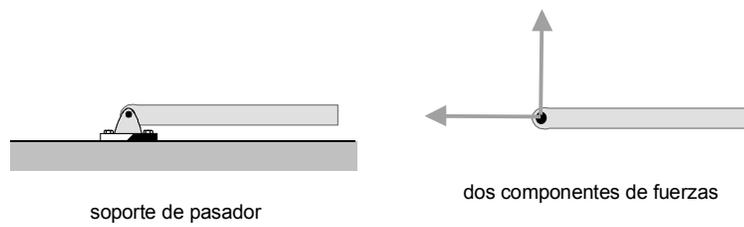


Figura 4.3:

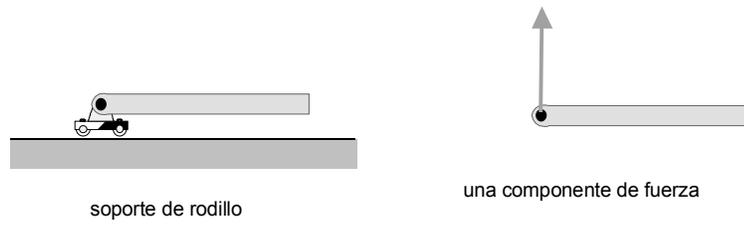


Figura 4.4:

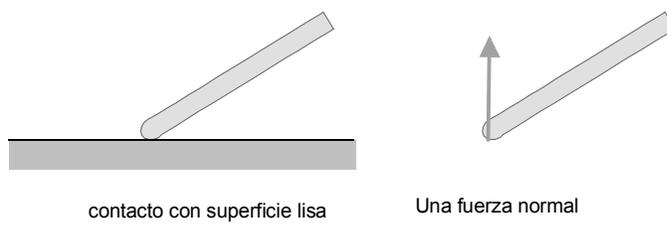


Figura 4.5:

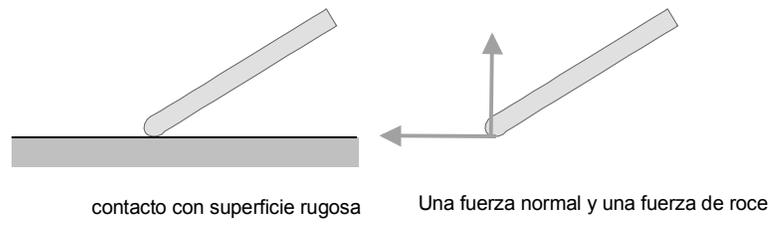


Figura 4.6:

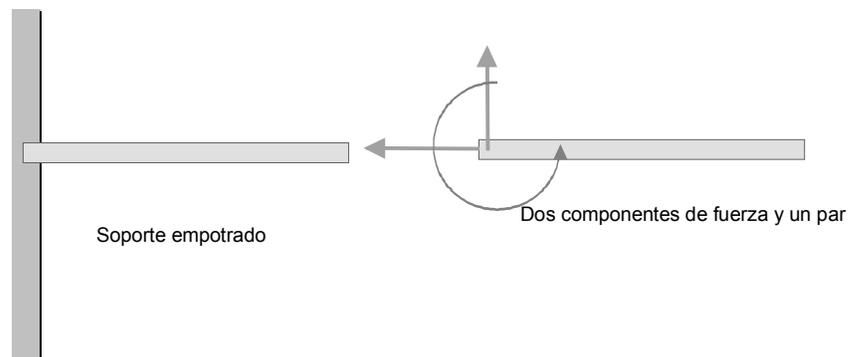


Figura 4.7:

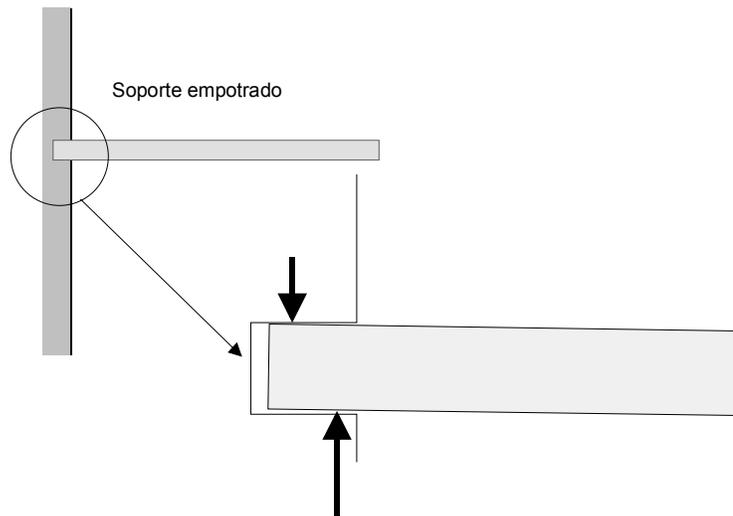
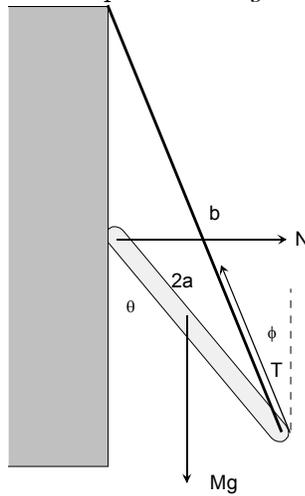


Figura 4.8:

4.2. Ejemplos

EJEMPLO 4.2.1 La barra de la figura de masa M y largo $2a$ está en equilibrio apoyada sobre una pared vertical lisa y sostenida por un extremo mediante un hilo de largo b . Determine los posibles ángulos θ de equilibrio.



Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} N - T \sin \phi &= 0, \\ T \cos \phi - Mg &= 0, \\ Mga \sin \theta - T2a \sin(\theta - \phi) &= 0, \end{aligned}$$

además de una relación geométrica

$$\sin \phi = \frac{2a}{b} \sin \theta.$$

De la segunda y la tercera

$$\sin \theta - 2 \frac{\sin(\theta - \phi)}{\cos \phi} = 0,$$

$$\begin{aligned} -\sin \theta \cos \phi + 2 \cos \theta \sin \phi &= 0, \\ \sin \theta \cos \phi &= 2 \cos \theta \frac{2a}{b} \sin \theta \end{aligned}$$

de donde una solución es $\sin \theta = 0 \rightarrow \theta = 0, \theta = \pi$. La otra sigue de

$$\cos \phi = \frac{4a}{b} \cos \theta,$$

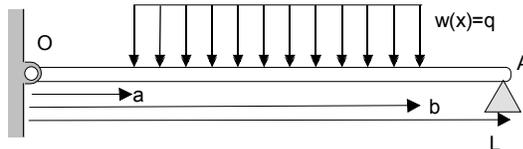
eliminando ϕ

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4a^2}{b^2} \sin^2 \theta + \frac{16a^2}{b^2} \cos^2 \theta, \\ 1 - \frac{4a^2}{b^2} &= \frac{12a^2}{b^2} \cos^2 \theta, \\ \cos \theta &= \sqrt{\frac{b^2 - 4a^2}{12a^2}}, \end{aligned}$$

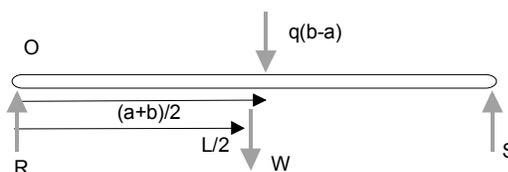
esta solución existe si $b > 2a$ y

$$\begin{aligned} b^2 - 4a^2 &< 12a^2, \\ b &< 4a. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4.2.2 La barra de la figura de longitud L está articulada en O , apoyada en A , tiene un peso total W y está cargada por una fuerza distribuida uniforme de magnitud $w(x) = q \text{ N m}^{-1}$ desde a hasta b . Determine las reacciones en O y en A .



Solución. El sistema equivalente de fuerzas es como en la figura siguiente



de modo que tenemos

$$\sum F_y = R + S - W - q(b - a) = 0$$

y momentando respecto a O

$$SL - W\frac{L}{2} - q(b-a)\frac{a+b}{2} = 0,$$

de donde despejamos

$$S = \frac{W}{2} + q(b-a)\frac{a+b}{2L},$$

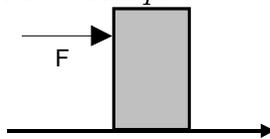
y de la primera

$$\begin{aligned} R &= W + q(b-a) - \left(\frac{W}{2} + q(b-a)\frac{a+b}{2L}\right), \\ &= \frac{W}{2} + q(b-a)\left(1 - \frac{a+b}{2L}\right). \end{aligned}$$

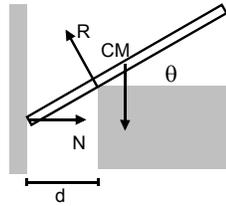
4.3. Ejercicios

NOTA 4.1 (1), (2), y (3) representan el grado de dificultad del problema. El (1) corresponde a problemas tipo prueba, el (2) corresponde a problemas discriminatorios y el (3) a problemas de tareas.

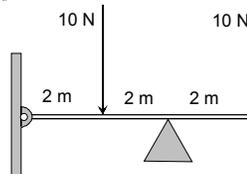
EJERCICIO 4.1 (3) *Un cuerpo homogéneo de masa M altura H y base de largo $2a$, es empujado por una fuerza horizontal F aplicada en un costado a la altura h del suelo. Si el coeficiente de roce estático entre el suelo y el cuerpo es μ_S , determine la condición para que al romperse el equilibrio debido al aumento de F el cuerpo deslice o vuelque.*



EJERCICIO 4.2 (1) *Una barra de masa M y de largo L se equilibra como se indica en la figura. No hay roce. Determine el ángulo que hace la barra con la horizontal cuando hay equilibrio.*

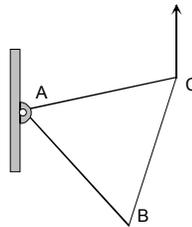


EJERCICIO 4.3 (1) Una barra de largo $L = 6\text{ m}$ y de peso $W = 20\text{ N}$ está articulada en su extremo izquierdo a un punto fijo O , apoyada en un soporte liso en A y cargada por dos fuerzas como se indica en la figura

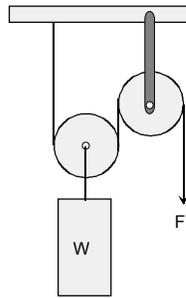


- Determine la reacción vertical en la articulación.
- Determine la reacción vertical en el soporte.

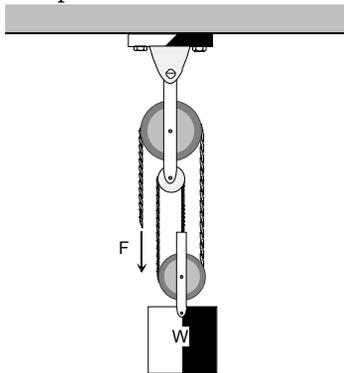
EJERCICIO 4.4 (2) Una lámina de peso W en forma de triángulo equilátero de lado a , puede moverse en un plano vertical estando el vértice A articulado a un punto fijo. Si al vértice C se le aplica una fuerza vertical hacia arriba de magnitud F , determine el ángulo que hace la arista AC con la vertical en la situación de equilibrio.



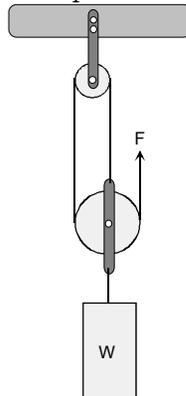
EJERCICIO 4.5 (1) Considere el sistema de la figura sin roce, determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W .



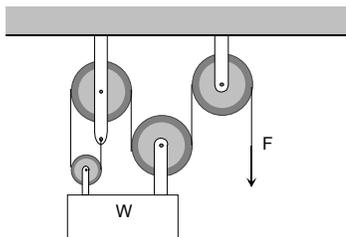
EJERCICIO 4.6 (1) *Para el sistema de la figura sin roce, determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W .*



EJERCICIO 4.7 (1) *Para el sistema de la figura, no hay roce. Determine la fuerza F necesaria para sostener el peso W .*

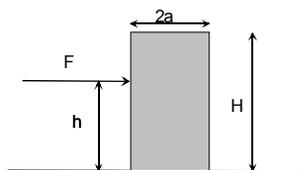


EJERCICIO 4.8 (1) *En el sistema indicado en la figura, no hay roce y las poleas son livianas. Determine la magnitud de la fuerza F necesaria para sostener el peso W .*

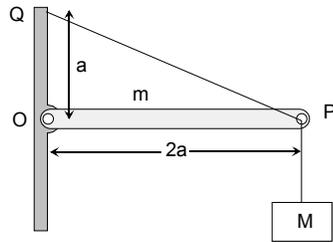


EJERCICIO 4.9 (1) *Tres esferas iguales de radio R están sobre un plano horizontal suave, en contacto entre ellas de modo que sus centros forman un triángulo equilátero de arista $2R$. A la altura de un radio, el conjunto se abraza por una cuerda inextensible que las sostiene. Una cuarta esfera se coloca sobre el centro del conjunto. Determine la tensión que se desarrolla en la cuerda.*

EJERCICIO 4.10 (2) *El bloque de la figura tiene masa M y el coeficiente de roce estático con el suelo es $\mu_s = 0,5$, las longitudes indicadas son $2a = 1$ m, $H = 2$ m, $h = 1,5$ m. Determine qué sucede al aumentar la fuerza aplicada F .*

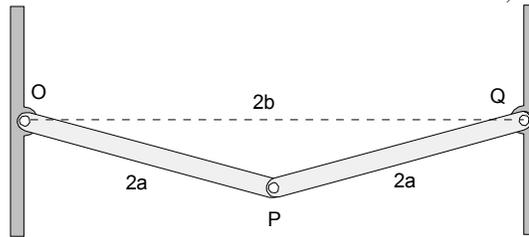


EJERCICIO 4.11 (1) *La barra OP de masa m y largo $2a$ está articulada en un punto fijo O , sostenida por una cuerda amarrada al punto fijo Q a distancia a de O , y al extremo P de la barra, como se indica en la figura. En el extremo P , cuelga una masa M .*

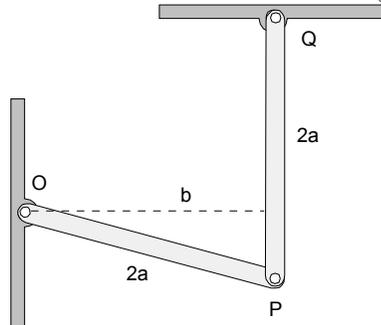


Determine la tensión en la cuerda QP y la reacción en O .

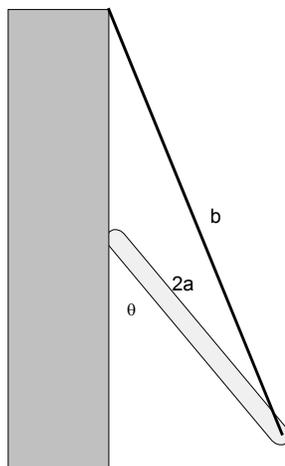
EJERCICIO 4.12 (1) Dos barras de masa M y largo $2a$ están articuladas en puntos fijos O y Q separados una distancia $2b$ a la vez que están articuladas en P . Determine las reacciones en las articulaciones O , P y Q .



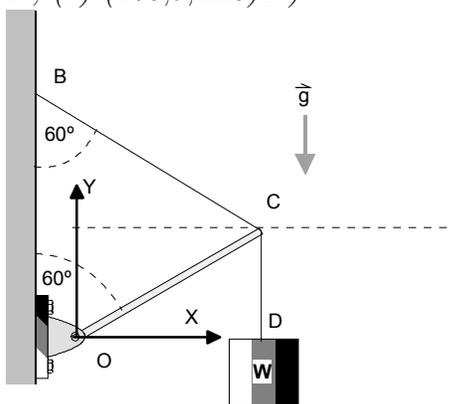
EJERCICIO 4.13 (1) Dos barras de masa M y largo $2a$ están articuladas en puntos fijos O y Q a la vez que están articuladas entre sí en P , como se indica en la figura. Determine las reacciones en O y en Q .



EJERCICIO 4.14 (2) La barra de la figura de masa M y largo $2a$ está en equilibrio apoyada sobre una pared vertical lisa y sostenida por un extremo mediante un hilo de largo b . Determine los posibles ángulos θ de equilibrio.

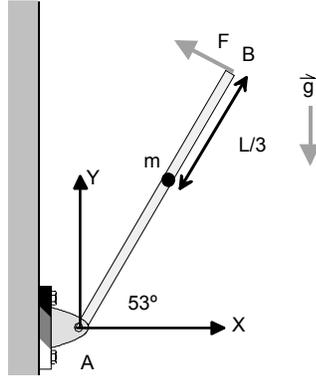


EJERCICIO 4.15 (1) La figura muestra una barra homogénea OC de largo $L = 1\text{ m}$ y masa $M = 12\text{ kg}$, pivoteada en O y en el otro extremo ligada a una cuerda BC . En el extremo C de la barra cuelga un peso $W = 60\text{ N}$ por medio de una cuerda CD . Determinar (a) La tensión en la cuerda CD . (b) La tensión en la cuerda BC . (c) La reacción \vec{R} en el extremo O de la barra. (R: (a) 60 N , (b) 120 N , (c) $(103,9; 120)\text{ N}$)

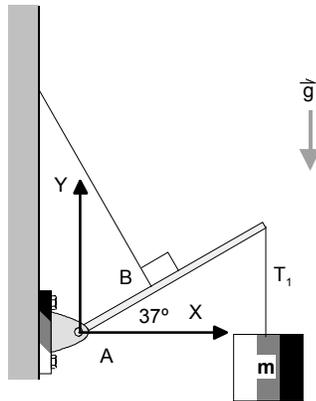


EJERCICIO 4.16 (1) La figura muestra una barra delgada y homogénea AB de largo $L = 2\text{ m}$ y de masa $M = 12\text{ kg}$, la cual se encuentra pivoteada (articulada) en el extremo A . Sobre la barra en el punto C , se encuentra adherida una partícula de masa $m = 1\text{ kg}$. La barra se encuentra en equilibrio estático cuando se le aplica una fuerza de magnitud F en el extremo B perpendicular

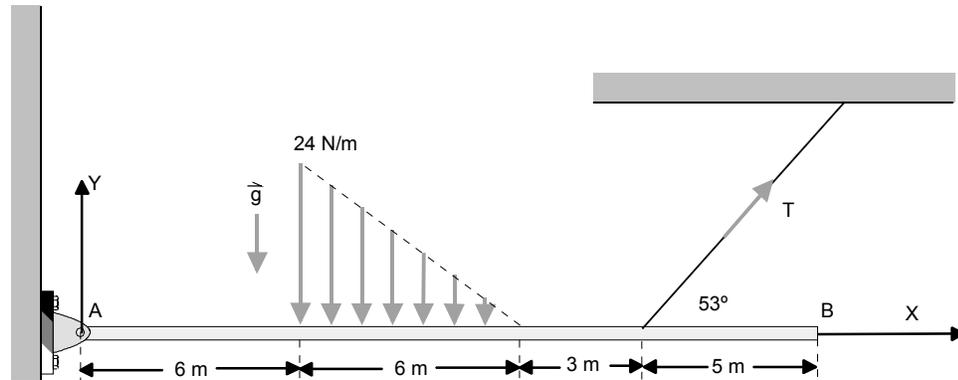
a la barra. Determine (a) La magnitud de la fuerza aplicada. (b) La reacción que ejerce la articulación sobre la barra. (c) La reacción que ejerce la barra sobre la articulación. (R: (a) 13 N, (b) (10,4; 32,2) N, (c) (-10,4; -32,2) N)



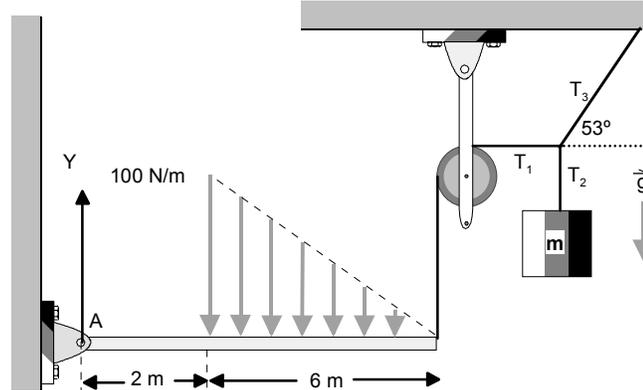
EJERCICIO 4.17 (1) El sistema de la figura está en equilibrio. Si la barra es de longitud L , de masa $M = 8 \text{ kg}$ y la masa m es $m = 10 \text{ kg}$ y $AB = L/3$ determine (a) La tensión T . (b) La tensión T_1 . (c) La reacción en el pivote A.



EJERCICIO 4.18 (1) Una viga de masa $m = 6 \text{ kg}$ y largo $L = 20 \text{ m}$ está sometida a una carga distribuida y a una tensión como se indica en la figura. La distribución de carga es lineal con un máximo de 24 N m^{-1} . Determine (a) La reacción en A. (b) La tensión en la cuerda. (R: (a) (-58,8; 53,6) N. (b) 98 N.)

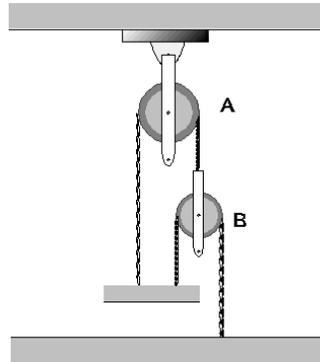


EJERCICIO 4.19 (1) *La figura muestra un sistema en equilibrio, donde la barra tiene masa despreciable, la distribución de carga aplicada es lineal con un máximo de 100 N m^{-1} . Determine la masa del cuerpo colgante. (R: 20 kg)*

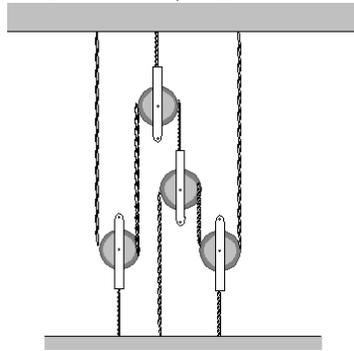


EJERCICIO 4.20 (1) *La placa de la figura pesa 90 N y está sostenida por el sistema de cables y poleas ideales. (sin masa y sin roce). Si la placa está en equilibrio en forma horizontal, determine*

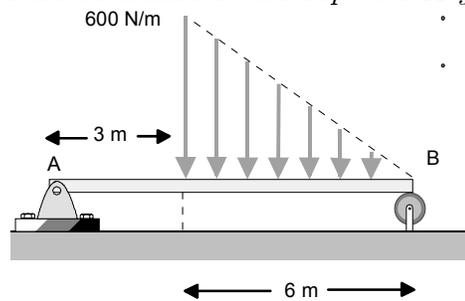
- La tensión en el cable que pasa por la polea A.*
- La tensión en el cable que pasa por la polea B.*



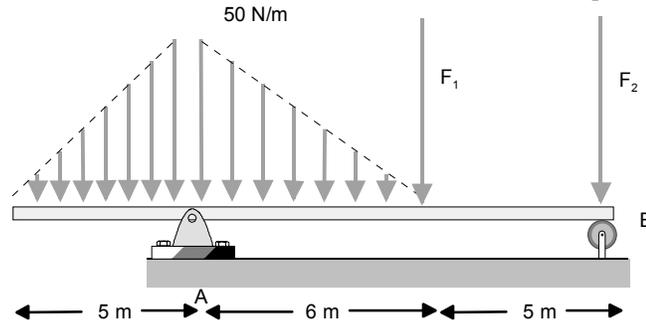
EJERCICIO 4.21 (1) Las cinco cuerdas del sistema de la figura pueden soportar una tensión máxima de 1500 N sin cortarse. Determine el peso máximo de la placa que puede ser soportada. (respuesta $W = 2625 \text{ N}$)



EJERCICIO 4.22 (1) La placa liviana de la figura de longitud 9 m está soportando una fuerza distribuida en forma lineal con un máximo de 600 N m^{-1} . Determine las reacciones verticales en los soportes A y B.

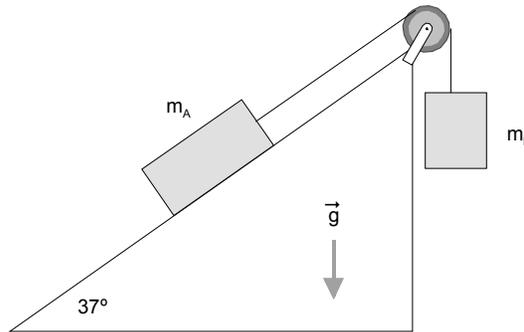


EJERCICIO 4.23 (1) La placa de la figura de longitud 16 m y de masa 2 kg está soportando dos fuerzas distribuidas en forma lineal con máximos de 50 N m^{-1} además de dos fuerzas hacia abajo de magnitudes $F_1 = 600 \text{ N}$ y $F_2 = 400 \text{ N}$. Determine las reacciones verticales en los soportes A y B.

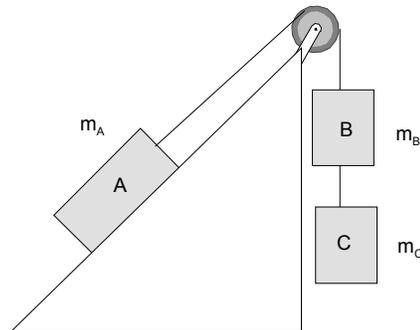


EJERCICIO 4.24 (1) La figura muestra un plano inclinado rugoso que forma un ángulo de 37° con la horizontal y dos bloques A y B en reposo, unidos por una cuerda inextensible y de masa despreciable. Si la masa del cuerpo A es $m_A = 3 \text{ kg}$ y el coeficiente de roce estático es $\mu_S = 0,2$, determine

- Los valores máximos y mínimos de m_B compatibles con el equilibrio.
- El valor de la tensión de la cuerda en los dos casos anteriores.

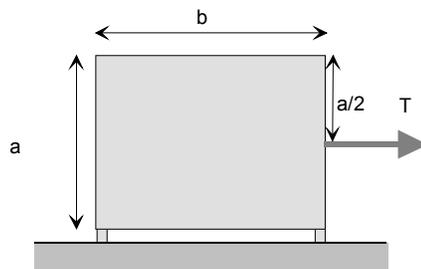


EJERCICIO 4.25 (1) Tres cuerpos de masa $m_A = 3 \text{ kg}$, $m_B = 2 \text{ kg}$ y $m_C = 1 \text{ kg}$ se encuentran en reposo como muestra la figura, de tal forma que cualquier pequeña perturbación haría que el cuerpo A subiera por el plano. Las cuerdas que unen los cuerpos son inextensibles y de masa despreciable. Se pide

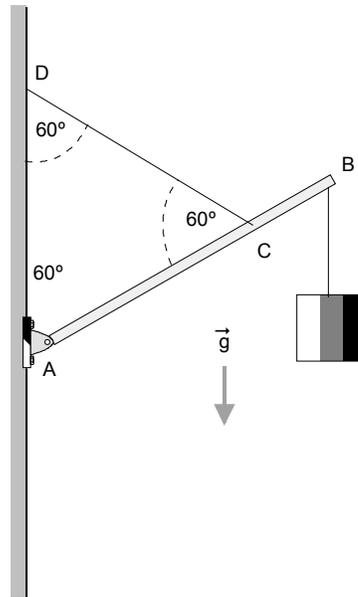


- El diagrama de fuerzas que actúan sobre m_A .
- El coeficiente de roce estático entre m_A y la superficie.
- Las tensiones en las cuerdas.

EJERCICIO 4.26 (2) Un objeto homogéneo en forma de paralelepípedo de altura a y de ancho b está en reposo soportado por dos patitas de masa despreciable en uno y otro extremo como se indica en la figura. Si se aplica una fuerza horizontal T a altura $a/2$ determine el valor máximo de μ_S tal que al romperse el equilibrio aumentando T , el cuerpo deslice sin volcar. (respuesta: $\mu_S = b/a$)

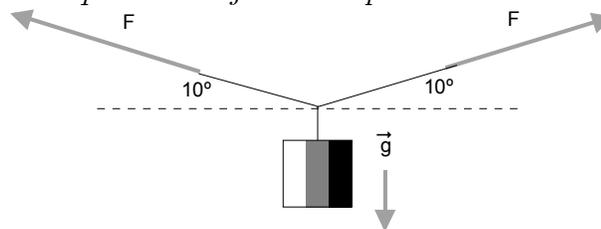


EJERCICIO 4.27 (1) Se tiene un sistema formado por una barra uniforme de 6 m de longitud, de masa 100 kg articulada en el punto A a un mástil vertical. En el extremo B de la barra cuelga un cuerpo de masa 400 kg. La barra está sostenida por un cable inextensible atado a los puntos C sobre la barra a distancia 1,5 m del extremo B y D sobre el mástil, de tal modo que el triángulo ACD es equilátero. Determine



- La magnitud de la tensión del cable.
- Las componentes de la fuerza que hace el pivote en A sobre la barra.
- El torque ejercido por la tensión del cable sobre el mástil, respecto al punto A.

EJERCICIO 4.28 (1) Se ata un cuerpo de 200 N de peso al punto medio de una cuerda y dos personas tiran de la misma manera de sus extremos de tal modo que el cuerpo queda suspendido como se indica en la figura. Determine la fuerza de tensión que deben ejercer las personas.



Hidrostática

5.1. Fluidos

El término hidrostática se refiere al estudio de los fluidos en reposo. Los fluidos son sustancias, idealizadamente un continuo de masa, donde su forma puede cambiar fácilmente por escurrimiento, debido a la acción de fuerzas pequeñas. Son fluidos tanto los líquidos como los gases. Si se analizan las fuerzas que pueden actuar sobre una porción de fluido, ellas son de dos tipos: causada por agentes exteriores, típicamente el peso de él, y las causadas por el fluido que está en su exterior. Es conveniente distinguir la parte de esa última fuerza que actúa normal a la superficie, llamadas fuerzas debidas a la presión, de las fuerzas tangenciales o de viscosidad. Estas fuerzas tangenciales actuando sobre la superficie del elemento de fluido, no pueden ser equilibradas por fuerzas interiores, de modo que ellas causan escurrimiento del fluido. Si nos limitamos a fluidos en reposo, las fuerzas tangenciales no pueden existir. Ellas son relevantes en los casos donde los fluidos no están en equilibrio.

5.2. Concepto de Presión

Si sobre una superficie actúan fuerzas normales distribuidas en forma continua, como se indica en la figura (5.1) la presión actuando sobre algún punto de ella, se define como la fuerza por unidad de área que actúa sobre la superficie y puede ser variable o constante de punto en punto de la superficie. Por ello que su definición involucra un elemento infinitésimo de área.

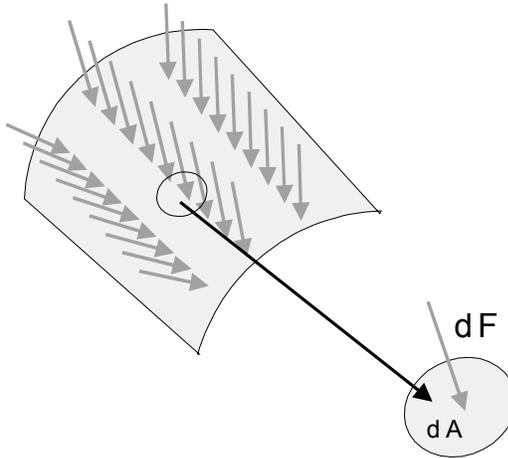


Figura 5.1: Fuerza distribuida sobre un área.

De ese modo la presión en el punto donde se ubica el elemento de área (infinitésimo) dA se define por

$$P = \frac{dF}{dA}. \quad (5.1)$$

Si la fuerza total F está distribuida en forma uniforme sobre el total de un área A como se indica en la figura (5.2), la presión en cualquier punto de esa área será

$$P = \frac{F}{A}. \quad (5.2)$$

5.2.1. Unidades de Presión

La unidad SI de presión es el Pascal, simbolizado Pa

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$$

pero existen varias otras de uso corriente:

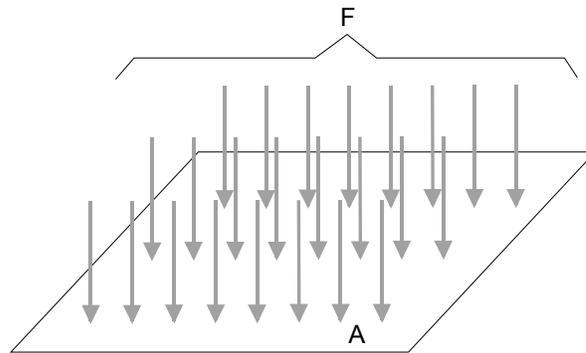


Figura 5.2: Fuerza distribuida uniforme.

Unidad		Símbolo	equivalencia
bar	1	bar	$1,0 \times 10^5$ Pa
atmósfera	1	atm	101 325 Pa
milímetros de mercurio	1	mmHg	133. 322 Pa
Torr	1	torr	133. 322 Pa
lbf in ⁻²	1	psi	0,068 0 atm
kgf cm ⁻²	1		0,9678 atm
	1	atm	760. 0 mmHg
	1	psi	6894. 75 Pa

5.2.2. Propiedades de la presión

La presión en un punto de un fluido en reposo es igual en todas direcciones, esto es que la fuerza que experimenta un elemento de área dentro de un fluido, no depende de la orientación de ese elemento de área. Además la presión en un mismo plano horizontal en el interior de un fluido en reposo, es la misma. Estas propiedades fueron enunciadas como “principios” por Pascal, pero ahora pueden ser demostradas de modo muy simple usando las leyes de la estática, demostración que omitiremos aquí.

5.3. Densidad o masa específica

En un fluido, es importante la densidad o masa específica ella permite calcular el peso del elemento de volumen que se considere, que es una posible

fuerza exterior actuando sobre cada elemento de fluido. Para un elemento de volumen dV ubicado en algún punto del fluido y que contenga una masa dM , la densidad ρ en ese punto se define mediante

$$\rho = \frac{dM}{dV}, \quad (5.3)$$

en consecuencia la unidad *SI* de densidad será kg m^{-3} pero es usual especificar densidades en g cm^{-3} , existiendo la equivalencia

$$1 \text{ g cm}^{-3} = 1000 \text{ kg m}^{-3}.$$

5.3.1. Densidad relativa

Es posible utilizar una escala de densidades relativas a la de alguna sustancia específica, por ejemplo existen las densidades de los fluidos respecto al agua, es decir

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}, \quad (5.4)$$

que es en consecuencia adimensional, es decir sin unidades.

5.4. Peso específico

El peso específico denotado por γ se define como el peso por unidad de volumen del fluido, es decir

$$\gamma = \rho g, \quad (5.5)$$

donde la unidad *SI* será N m^{-3} .

5.5. Presión atmosférica

La atmósfera está constituida por aire, una mezcla en ciertas proporciones de Nitrógeno y Oxígeno principalmente, que como toda sustancia es atraída por el campo gravitacional terrestre, es decir la atmósfera tiene peso. La atmósfera es un fluido de varios kilómetros de altura, que producto de su peso, ejerce presión sobre todos los objetos sumergidos en ella. Esta presión se denomina presión atmosférica y como veremos, ella disminuye con

la altura. El famoso experimento de Torricelli, determinó por primera vez su valor. Considere un tubo de vidrio de alrededor de 1 m de longitud, cerrado en un extremo, lleno de mercurio, un fluido el cual tiene una densidad de alrededor $13,6 \text{ g cm}^{-3}$. Tapando con un dedo el extremo abierto del tubo se invierte el tubo y se sumerge el extremo abierto en un recipiente que también contiene mercurio. Si este experimento es realizado al nivel del mar, se logra una situación de equilibrio como se indica en la figura, donde una altura de 76 cm de mercurio (760 mm) permanece equilibrada con vacío en su parte superior. Un pequeño análisis de las fuerzas involucradas en el equilibrio de

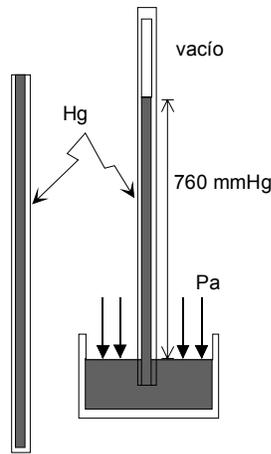


Figura 5.3:

la columna suspendida de mercurio, nos da el valor de la presión atmosférica P_a . Si A denota el área basal de esa columna, la fuerza que actúa por abajo es

$$P_a A$$

la cual equilibra el peso de la columna de mercurio el cual es

$$\rho_{Hg} g h A$$

de modo que

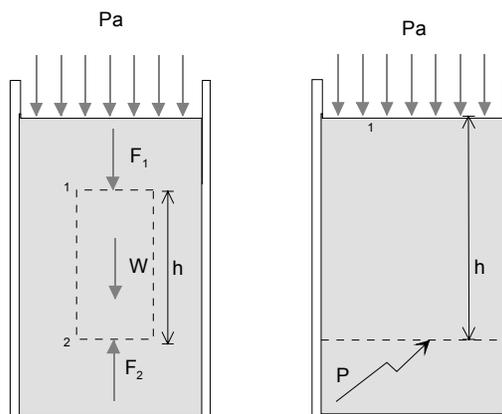
$$P_a = \rho_{Hg} g h = 760 \text{ mmHg},$$

puesto que la altura suspendida es precisamente 760 mmHg. Este experimento da origen al aparato llamado barómetro de mercurio y también a la

unidad de presión llamada mmHg. Si la presión atmosférica varía por cualquier razón, también lo hará la altura de la columna de mercurio, constituyendo entonces este dispositivo, un aparato para medir la presión atmosférica, directamente en mmHg.

5.6. Variación de la presión con la profundidad

Así como la presión atmosférica disminuye con la altura, es de esperar que la presión en el interior de un líquido, aumente con la profundidad. Recordando que la presión es la misma en todos los puntos al mismo nivel de un fluido en reposo, considere la primera figura, el elemento de fluido marcado, está en equilibrio sometido a fuerzas externas verticales, debidas a la presión en las secciones (1) y (2), y a su peso W , de manera que la condición de equilibrio es



Variación de la presión con la profundidad.

$$F_2 - F_1 - W = 0,$$

y si A denota la sección transversal, la ecuación anterior se puede escribir

$$p_2 A - p_1 A = \rho g h A,$$

o bien

$$p_2 = p_1 + \rho g h.$$

Entonces, considerando la segunda figura, la presión a una profundidad h , desde la superficie del fluido que está a la presión atmosférica, será

$$p = p_a + \rho gh. \quad (5.6)$$

5.7. Medidores de presión

Existen diversos aparatos para medir la presión pero nos limitaremos a describir aquellos que están basados en propiedades muy simples del equilibrio de columnas de fluidos. Los aparatos para medir la presión atmosférica se llaman barómetros, y los que miden presión en general, se llaman manómetros.

5.7.1. Barómetro de mercurio en U

Considere la figura donde se muestra un tubo cerrado en un extremo, doblado en forma de U, abierto por el otro extremo donde actúa la presión atmosférica que se desea medir. El mercurio alcanza una cierta posición de equilibrio, donde por el extremo cerrado por existir vacío, la presión es nula. Al nivel indicado, la presión debe ser la misma, de modo que podemos igualar

$$P_a = h \text{ mmHg} = h \text{ torr.}$$

5.7.2. Manómetro en U de líquido, para presiones relativas de gases

La columna en U contiene un líquido (líquido manométrico), por ejemplo agua, de modo que en la situación de equilibrio, cuando la presión p en el recipiente que contiene un gas es mayor que la atmosférica, la condición de equilibrio indicada en la figura da

$$p = p_a + \rho_L gh,$$

de modo que si se mide la altura h , la presión relativa (a la atmosférica) será

$$p - p_a = \rho_L gh.$$

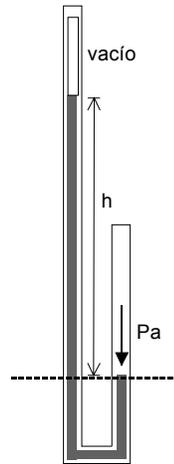


Figura 5.4:

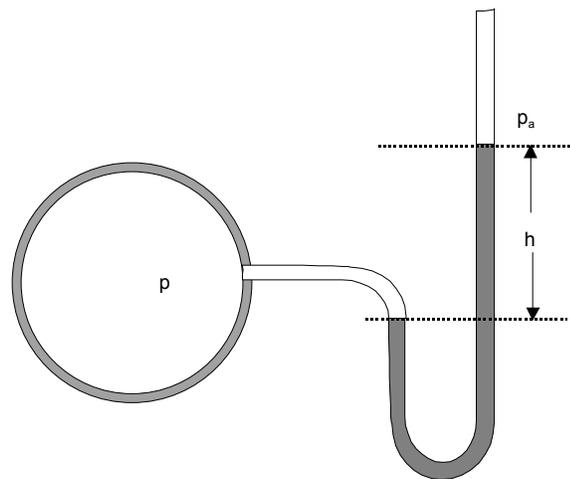


Figura 5.5:

La presión absoluta p puede también calcularse de allí si se conoce o se mide la presión atmosférica mediante un barómetro.

Si la presión en el recipiente que contiene el gas es menor que la atmosférica, la situación de equilibrio será como se indica en la figura siguiente

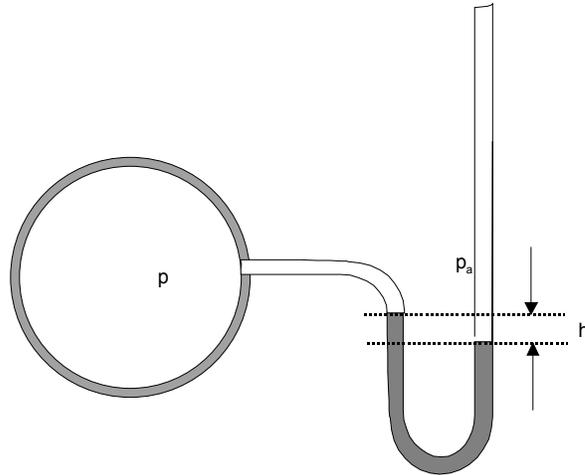


Figura 5.6:

de modo que la condición de equilibrio será

$$p + \rho_L g h = p_a,$$

dando para la presión relativa

$$p - p_a = -\rho_L g h,$$

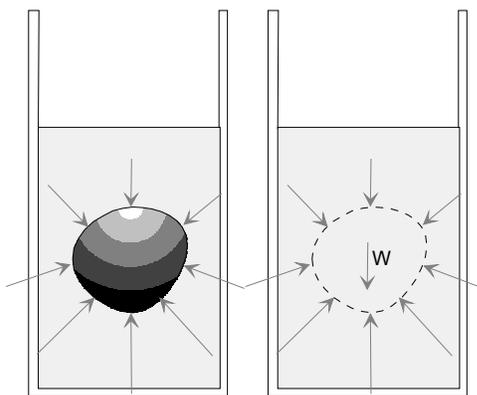
un valor negativo que refleja que la presión en el interior del recipiente es menor que la atmosférica. Igualmente se puede calcular la presión (absoluta) si la presión atmosférica es conocida

$$p = p_a - \rho_L g h.$$

Otras situaciones simples como estas se dejan como ejercicios planteados al final.

5.8. Principio de Arquímedes

Cuando un cuerpo sólido está en equilibrio en el interior de un fluido, él estará sometido a fuerzas exteriores de dos tipos: su peso u otras fuerzas aplicadas, y además las fuerzas distribuidas sobre su superficie causadas por la presión dentro del fluido. Esas últimas actúan normalmente a la superficie del cuerpo y su resultante vertical puede ser fácilmente calculada. En efecto, si se considera la segunda de las figuras donde el cuerpo no está presente, pero se ha marcado la región donde el cuerpo estaba, las fuerzas sobre esa superficie imaginaria son naturalmente las mismas que actuaban sobre el cuerpo. Pero ahora, ellas equilibran verticalmente al fluido encerrado por esa superficie, de modo que la resultante vertical hacia arriba, debe igualar al peso del fluido encerrado por dicha superficie. Se tiene entonces el llamado principio de Arquímedes.



Cuando un cuerpo se sumerge en un fluido, él experimenta una fuerza ascendente, llamada fuerza de empuje, que es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo.

En términos matemáticos, si V denota el volumen sumergido, ρ_L la densidad del líquido y E el empuje, entonces

$$E = \rho_L V g. \quad (5.7)$$

5.9. Fuerza de Flotación

La fuerza de empuje, que es igual al peso del fluido desplazado, tiene como punto de aplicación el centro de gravedad del volumen de fluido que es desplazado por el cuerpo. Si suponemos que el fluido es homogéneo, entonces ese punto coincide con el centroide de la región del cuerpo que ha desplazado al fluido. Ese punto se denomina centro de flotación y en las figuras lo denotaremos por B . Por otro lado, el peso del cuerpo actúa equivalentemente en el centro de masa del cuerpo G el cual puede o no coincidir con el centro de flotación, dando origen a la necesidad de analizar las estabilidad de cuerpos sumergidos en equilibrio.

5.9.1. Cuerpo totalmente sumergido

Cuando un cuerpo está totalmente sumergido, pueden ocurrir tres casos según el centroide del líquido desplazado, punto B , esté sobre, coincida o esté más abajo que el centro de masa del cuerpo, punto G . La figura siguiente ilustra esos tres casos. En el primero, la fuerza de empuje actúa más arriba

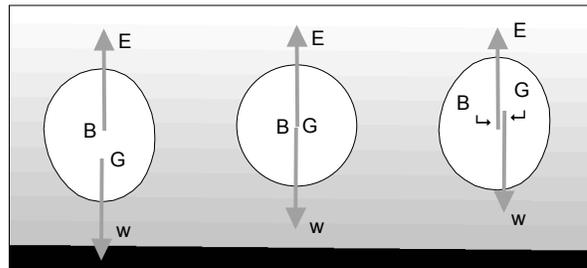


Figura 5.7:

del peso, luego para una rotación del cuerpo, aparece un par que tiende a restaurar la posición original, en consecuencia este equilibrio es estable. En el segundo caso, no aparece par al girar el cuerpo, luego el equilibrio es indiferente y en el último, el par que se origina tiende a alejar el cuerpo de la posición de equilibrio, la cual es en consecuencia, inestable.

5.9.2. Cuerpo parcialmente sumergido

La figura siguiente ilustra dos casos para cuerpos parcialmente sumergidos.

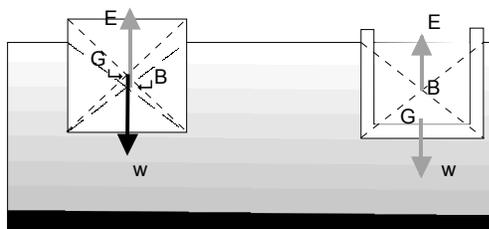


Figura 5.8:

En el primer caso, se trata de un cuerpo homogéneo parcialmente sumergido. El centro de masa G está en el centro del cuerpo, sin embargo el centro de flotación B , correspondiente al centroide de la parte sumergida, está más abajo. Entonces en la situación de equilibrio $E = W$ pero hay aparentemente problemas con la estabilidad. La cuestión de qué ocurre si el cuerpo se inclina levemente la analizaremos en la sección siguiente. A primera vista parecería que si el cuerpo se inclina algo hacia la derecha, el torque del par de las dos fuerzas paralelas pero no colineales, tendería a inclinarlo aún más. Ya se explicará que ocurre.

En segundo caso se trata de un cuerpo inhomogéneo que flota, y para el caso de la figura G está más abajo que B y el equilibrio es evidentemente estable, porque al inclinar el cuerpo, el par de fuerzas tiende a restaurar la posición original.

5.9.3. Estabilidad de un cuerpo prismático inhomogéneo

Considere un cuerpo prismático inhomogéneo, de modo que su centro de masa está más arriba del centroide, como se ilustra en la figura. Si el cuerpo está parcialmente sumergido, de modo que el centro de flotación B está más abajo que G , hay problemas con la estabilidad. Analizaremos lo que ocurre con el par de las fuerzas para variaciones pequeñas de la inclinación del cuerpo. La figura de la izquierda representa la situación de equilibrio,

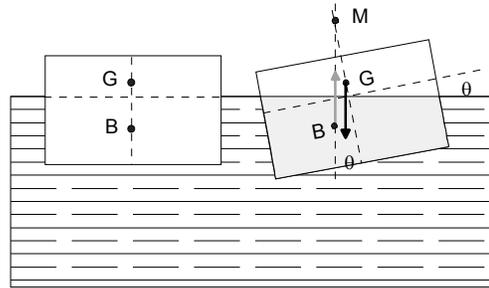


Figura 5.9: Altura metacéntrica.

aparentemente inestable por estar G arriba del centro de flotación B . Sin embargo, si la figura se inclina un ángulo pequeño θ como se muestra en la figura derecha, el centro de gravedad cambia relativamente poco, pero el centro de flotación, el centroide de la zona marcada gris, puede cambiar bastante como se ilustra en la figura. La vertical que pasa por B , la línea de acción del empuje, corta a la línea central donde está G en un punto M que se denomina metacentro. Si ese punto queda más arriba de G el par de las fuerzas es restaurador y el equilibrio es estable, que es el caso de la figura. La distancia MG se denomina altura metacéntrica y el par restaurador está dado por

$$MG \cdot W \sin \theta,$$

donde W es el peso del cuerpo. Si M está abajo de G el equilibrio es inestable y si coinciden indiferente.

5.10. Fuerzas sobre las paredes o compuertas

Las fuerzas horizontales causadas por la presión sobre superficies que encierran al fluido, aumentan linealmente con la profundidad, de modo que se tienen fuerzas distribuidas no uniformes actuando sobre ellas. Como se explicó en el capítulo de Estática, la resultante de ese sistema de fuerzas paralelas es en general una fuerza paralela aplicada en un punto arbitrario, más el torque de todas esas fuerzas distribuidas respecto a ese mismo punto. Es sin embargo conveniente calcular la resultante de esas fuerzas en un cierto punto, llamado centro de presión, respecto al cual el torque de las fuerzas distribuidas es nulo. Explicaremos entonces la forma de hacerlo. Esto requiere

sin embargo de elementos de cálculo integral que trataremos de omitir. Para el caso de compuertas y situaciones similares, la fuerza debido a la presión atmosférica actúa por ambos lados, y entonces la omitiremos del análisis por no contribuir en forma neta a la fuerza horizontal actuando sobre la superficie. La figura siguiente ilustra una situación típica, donde por el interior de una superficie hay un fluido y por el exterior está la atmósfera.

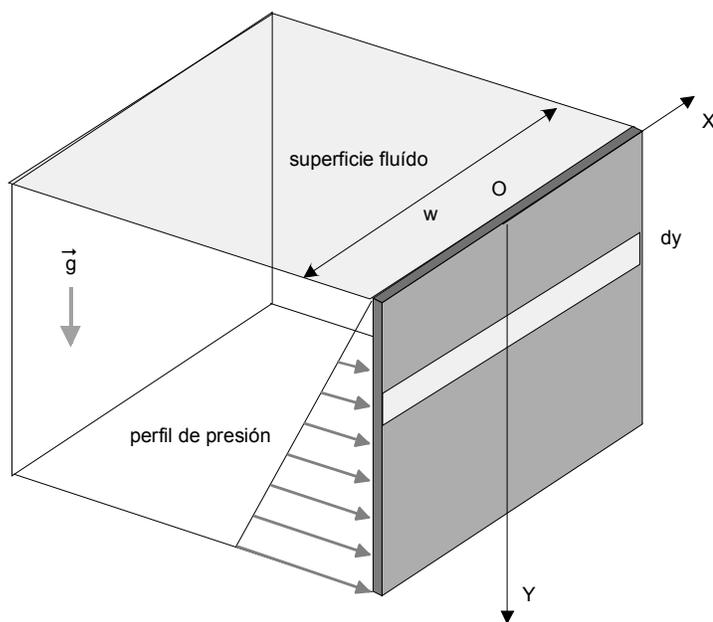


Figura 5.10:

En términos de la profundidad y la fuerza neta que actúa a esa profundidad sobre el elemento de área de ancho w y altura dy es

$$\begin{aligned} dF &= p w dy, \\ &= \rho g y w dy. \end{aligned}$$

Entonces se tiene una fuerza distribuida cuya magnitud por unidad de longitud varía linealmente de la forma

$$\frac{dF}{dy} = \rho w g y \quad \text{N m}^{-1}.$$

El cálculo de la fuerza resultante dependerá de la forma de la superficie que se considere.

5.10.1. Superficie rectangular

El caso más simple es si la superficie es rectangular como se indica en la figura que sigue donde se desea evaluar la fuerza resultante de las fuerzas

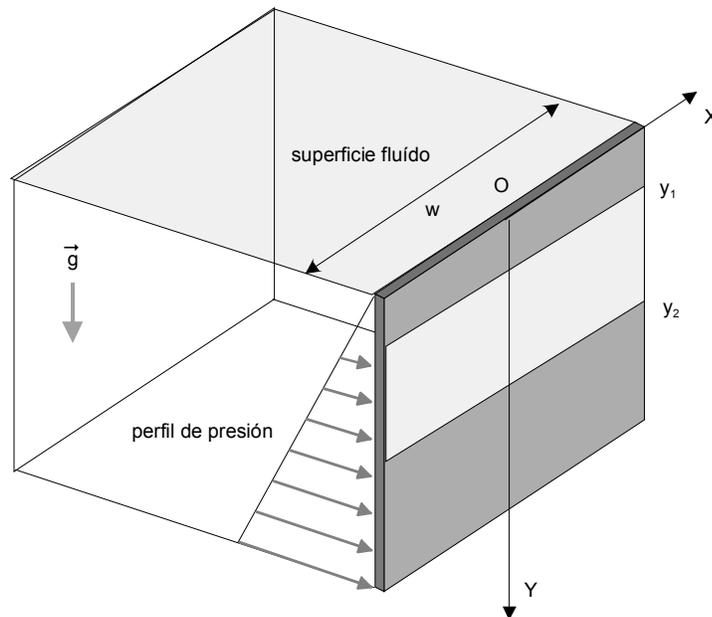


Figura 5.11:

distribuidas entre y_1 e y_2 . Como vimos en el capítulo de fuerzas, la resultante y el punto de aplicación corresponden al área y al centroide de la figura correspondiente a la fuerza distribuida entre y_1 e y_2 .

Como sabemos el área es

$$\frac{1}{2}(a + b)(y_2 - y_1)$$

y el centroide está (medido desde y_1 hacia abajo)

$$\frac{1}{3} \frac{(a + 2b)}{a + b} (y_2 - y_1)$$

donde a y b son las fuerzas por unidad de longitud en y_1 e y_2

$$a = \rho w g y_1,$$

$$b = \rho w g y_2,$$

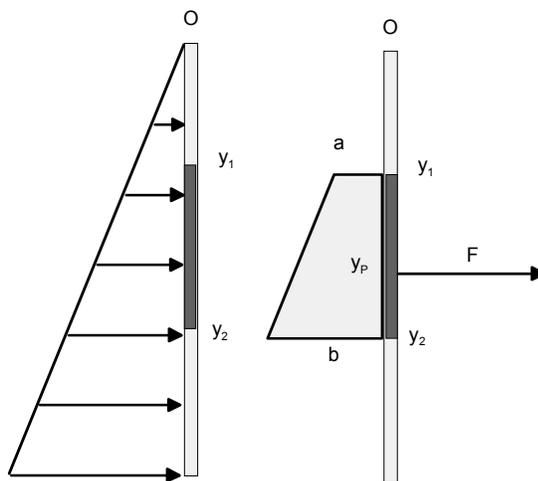


Figura 5.12:

así entonces la fuerza resultante es

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} (\rho w g y_1 + \rho w g y_2) (y_2 - y_1) \\ &= \frac{1}{2} \rho w g (y_2^2 - y_1^2) \end{aligned}$$

y su punto de aplicación será

$$\begin{aligned} y_P &= y_1 + \frac{1}{3} \frac{(a + 2b)}{a + b} (y_2 - y_1) \\ &= \frac{2 y_1^2 + y_2 y_1 + y_2^2}{3 (y_1 + y_2)}. \end{aligned}$$

En particular si la superficie está entre $y_1 = 0$ e $y_2 = h$ resultará

$$y_P = \frac{2}{3} h. \quad (5.8)$$

5.10.2. Superficie de forma arbitraria

Si la superficie no es rectangular, como se ilustra en la figura que sigue es necesario recurrir al cálculo integral. La fuerza actuando sobre el elemento de área $dA = dx dy$ indicado en la figura será

$$dF = \rho g y dA = \rho g y dx dy$$

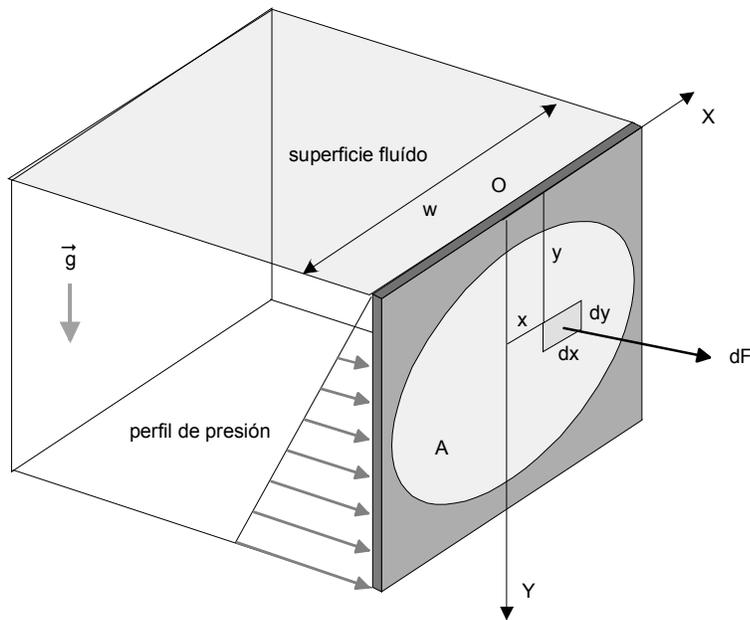


Figura 5.13:

de modo que la fuerza resultante será

$$F = \rho g \int_A y dx dy$$

y la posición del centro de fuerza estará dada por sus coordenadas

$$x_P = \frac{\int_A x dF}{F}, \quad (5.9)$$

$$y_P = \frac{\int_A y dF}{F}, \quad (5.10)$$

que pueden escribirse

$$x_P = \frac{\int_A xy dx dy}{\int_A y dx dy},$$

$$y_P = \frac{\int_A y^2 dx dy}{\int_A y dx dy},$$

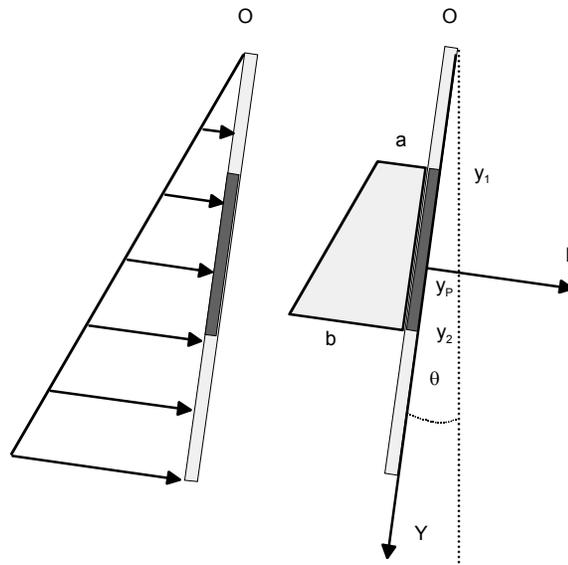


Figura 5.14:

integrales que podrían hacerse si se conoce la forma del área. Como usted no domina aún el tema de las integrales, no se preocupe demasiado por esta sección.

5.11. Fuerza sobre una superficie de forma rectangular inclinada

En una sección anterior se calculó la fuerza resultante y centro de la fuerza para un área vertical de sección rectangular. Para una sección rectangular inclinada un ángulo θ con la vertical, el cálculo es muy parecido. pero ahora, el eje OY está inclinado luego debemos tomar

$$a = \rho w g y_1 \cos \theta,$$

$$b = \rho w g y_2 \cos \theta,$$

y luego resultarán

$$F = \frac{1}{2} \rho w g (y_2^2 - y_1^2) \cos \theta,$$

y su punto de aplicación será

$$y_P = \frac{2y_1^2 + y_2y_1 + y_2^2}{3(y_1 + y_2)}.$$

Note que la expresión para el centro de fuerza es la misma.

5.12. Ejemplos

Los siguientes valores numéricos de densidades pueden ser necesarios para algunos problemas y ejemplos ($p_a = 1 \text{ atm}$, $t = 0^\circ\text{C}$)

Substancia	$\rho \text{ kg m}^{-3}$	Substancia	$\rho \text{ kg m}^{-3}$
Hielo	$0,917 \times 10^3$	Agua	$1,000 \times 10^3$
Aluminio	$2,70 \times 10^3$	Agua de mar	$1,03 \times 10^3$
Hierro	$7,86 \times 10^3$	Alcohol etílico	$0,806 \times 10^3$
Cobre	$8,92 \times 10^3$	Benceno	$0,879 \times 10^3$
Plata	$10,5 \times 10^3$	Mercurio	$13,6 \times 10^3$
Plomo	$11,3 \times 10^3$	Aire	1,29
Oro	$19,3 \times 10^3$	Oxígeno	1,43
Platino	$21,4 \times 10^3$	Hidrógeno	$8,99 \times 10^{-2}$
Glicerina	$1,26 \times 10^3$	Helio	$1,79 \times 10^{-1}$

EJEMPLO 5.12.1 *Un pedazo de aluminio se suspende de una cuerda y se sumerge completamente en un recipiente con agua. La masa del trozo de aluminio es de 1 kg. Calcule la tensión de la cuerda antes y después de sumergir el trozo de aluminio.*

Solución. La tensión antes es simplemente el peso del trozo de aluminio es decir

$$W = mg = 1 \times 9,8 = 9,8 \text{ N}.$$

Cuando se sumerge la fuerza de empuje es

$$E = \rho_{H_2O} V_{Al} g,$$

pero el volumen del aluminio es

$$V_{Al} = \frac{m}{\rho_{Al}}$$

de modo que la fuerza de empuje será

$$\begin{aligned} E &= \rho_{H_2O} \frac{m}{\rho_{Al}} g \\ &= 10^3 \frac{1}{2,70 \times 10^3} 9,8 \\ &= 3.6 \text{ N} \end{aligned}$$

y finalmente la tensión en la cuerda será la diferencia

$$\begin{aligned} T &= 9,8 - 3.6 \\ &= 6.2 \text{ N} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.12.2 *Un cubo de Hielo flota en agua. Determine la fracción del hielo que queda sobre la superficie del agua.*

Solución. Sea m la masa de hielo. Su peso será

$$W = mg.$$

Su volumen total será

$$V = \frac{m}{\rho_{Hielo}},$$

de modo que podemos escribir el peso en términos del volumen como

$$W = \rho_{Hielo} V g$$

Cuando una fracción V_S del volumen queda sumergido, la fuerza de empuje es

$$E = \rho_{H_2O} g V_S.$$

En la situación de equilibrio el peso iguala al empuje de modo que

$$\rho_{Hielo} V g = \rho_{H_2O} g V_S,$$

de donde

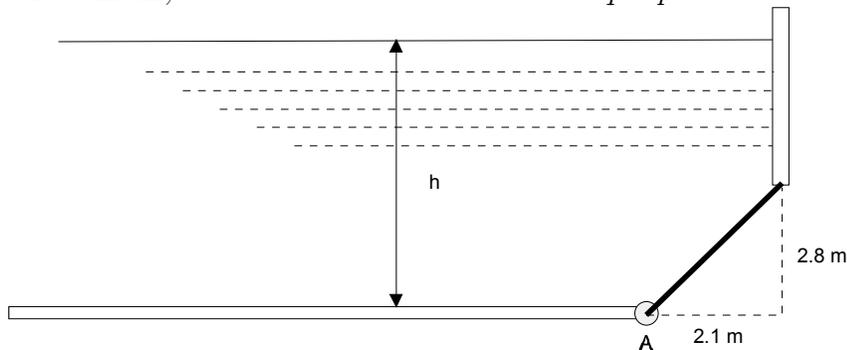
$$\frac{V_S}{V} = \frac{\rho_{Hielo}}{\rho_{H_2O}} = 0,917$$

o sea hay un 91,7 % sumergido y por lo tanto 8,3 % sobre el nivel del agua.

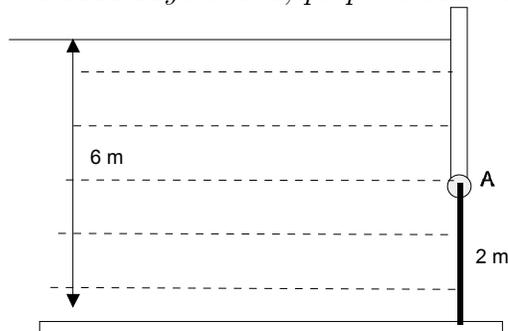
5.13. Ejercicios

NOTA 5.1 (1), (2), y (3) representan el grado de dificultad del problema. El (1) corresponde a problemas tipo prueba, el (2) corresponde a problemas discriminatorios y el (3) a problemas de tareas.

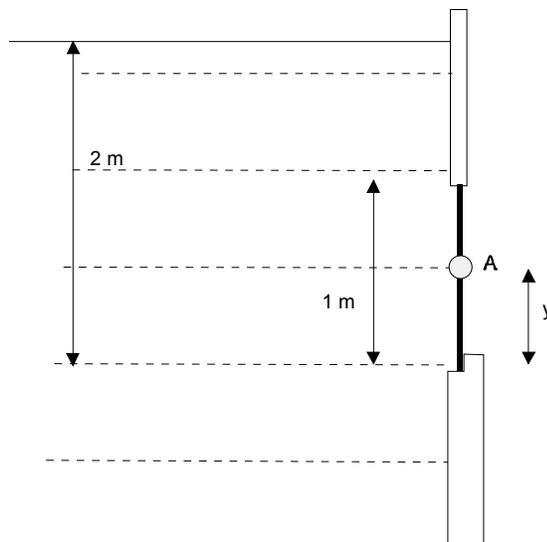
EJERCICIO 5.1 (1) *La compuerta de la figura tiene 2 m de ancho y contiene agua. Si el eje que soporta la compuerta que pasa por A soporta un par máximo de 150 kN m, determine la máxima altura h que puede tener el agua.*



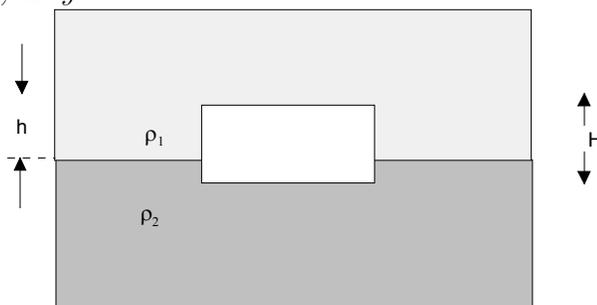
EJERCICIO 5.2 (1) *Determinése el par que se requiere hacer en A para sostener la compuerta indicada cuyo ancho, perpendicular al papel es $w = 2$ m.*



EJERCICIO 5.3 (1) *Determine la ubicación "y" del pivote fijo A de manera que justo se abra cuando el agua está como se indica en la figura.*



EJERCICIO 5.4 (1) *Un bloque con una sección transversal de área A , altura H y densidad ρ , está en equilibrio entre dos fluidos de densidades ρ_1 y ρ_2 , con $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Suponga que los fluidos no se mezclan. Determine la fuerza de empuje sobre el bloque y encuentre la densidad del bloque en función de ρ_1 , ρ_2 , H y h .*



EJERCICIO 5.5 (1) *Un cuerpo de material desconocido pesa 4 N en el aire y 2,52 N sumergido en agua. Encuentre la densidad específica del material.*

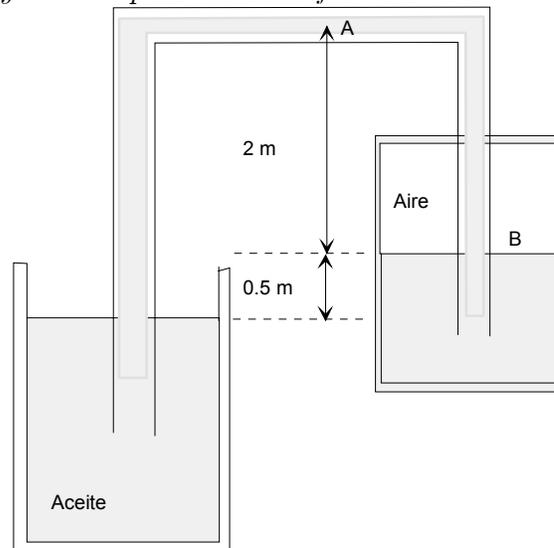
EJERCICIO 5.6 (1) *Una balsa de área A , espesor h y masa 400 kg flota en aguas tranquilas con una inmersión de 5 cm. Cuando se le coloca una carga sobre ella, la inmersión es de 7,2 cm. Encuentre la masa de la carga.*

EJERCICIO 5.7 (1) *Un cuerpo homogéneo prismático de 20 cm de espesor 20 cm de ancho y 40 cm de longitud se mantiene en reposo sumergido en agua a 50 cm de profundidad a aplicar sobre él una tensión de 50 N . ¿Cuánto pesa en aire y cuál es su densidad relativa?*

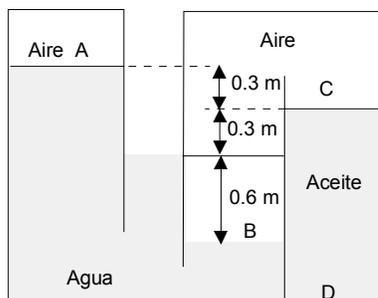
EJERCICIO 5.8 (1) *¿Qué fracción del volumen de una pieza sólida de metal de densidad relativa al agua 7,25 flotará sobre un mercurio de densidad relativa 13,57?*

EJERCICIO 5.9 (1) *Un tarro cilíndrico de 20 cm de diámetro flota en agua con 10 cm de su altura por encima del nivel del agua cuando se suspende un bloque de hierro de 100 N de peso de su fondo. Si el bloque se coloca ahora dentro del cilindro ¿qué parte de la altura del cilindro se encontrará por encima de la superficie del agua? Considere la densidad del hierro $7,8 \text{ g cm}^{-3}$.*

EJERCICIO 5.10 (1) *Considere el sistema de la figura donde el tubo está lleno de aceite de densidad $\rho = 0,85 \text{ g cm}^{-3}$. Uno de los recipientes está abierto a la atmósfera y el otro está cerrado y contiene aire. Determine la presión en los puntos A y B si la presión atmosférica es 1 atm.*



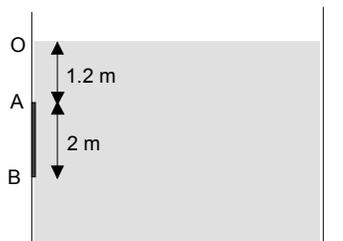
EJERCICIO 5.11 (1) *Con respecto a la figura, determine la presión en los puntos A y B de la figura donde el aceite tiene densidad $0,90 \text{ g cm}^{-3}$ y el agua $1,00 \text{ g cm}^{-3}$.*



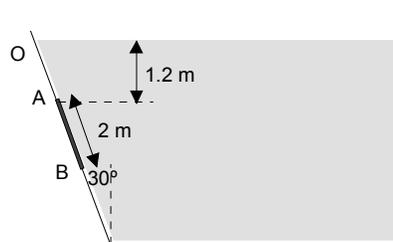
EJERCICIO 5.12 (1) *En una piscina se encuentra flotando una balsa que tiene forma de un paralelepípedo de densidad relativa (al agua) de 0,3 y cuyas dimensiones son 120 cm de largo, 100 cm de ancho y 25 cm de alto. Determine*

- La fuerza de empuje.*
- La altura medida desde el fondo de la balsa a la que se encuentra la línea de flotación.*
- El peso que debería colocarse sobre la balsa para que esta se hundiera 6 cm más.*

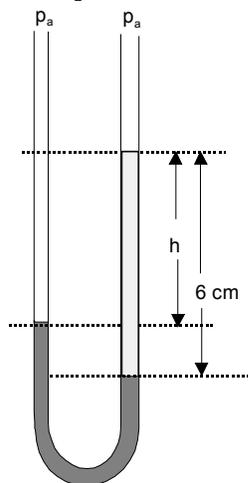
EJERCICIO 5.13 (1) *Determine la fuerza resultante y su punto de aplicación debida a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular de altura $AB = 2\text{ m}$ y de ancho 1 m (hacia adentro del papel), donde el punto A está a profundidad de 1,2 m.*



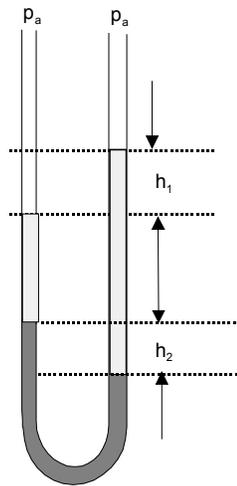
EJERCICIO 5.14 (1) *Repita el problema anterior si la línea OAB forma un ángulo de 30° respecto a la vertical.*



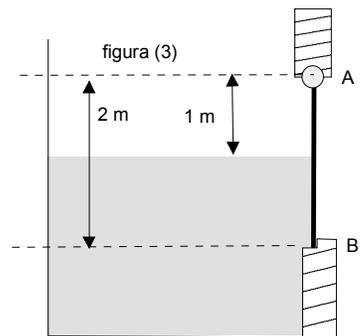
EJERCICIO 5.15 (1) *Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con agua. Después se vierte keroseno de densidad $0,82 \text{ g cm}^{-3}$ en uno de los lados que forma una columna de 6 cm de altura. Determine la diferencia de altura h entre las superficies de los dos líquidos.*



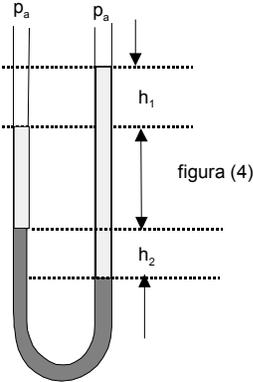
EJERCICIO 5.16 (1) *Un tubo en U que está abierto en ambos extremos se llena parcialmente con mercurio. Después se vierte agua en ambos lados obteniéndose una situación de equilibrio ilustrada en la figura, donde $h_2 = 1 \text{ cm}$. Determine la diferencia de altura h_1 entre las superficies de los dos niveles de agua.*



EJERCICIO 5.17 (1) *La compuerta de la figura tiene una altura de 2 m un ancho de 2 m, está articulada en A y apoyada en B como se indica en la figura. Si el fluido es agua de densidad $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ y su nivel llega hasta la mitad de la compuerta, determine las reacciones horizontales en los puntos A y B.*



EJERCICIO 5.18 (1) *El tubo en U de la figura está abierto a la presión atmosférica en ambos extremos y contiene dos líquidos (1) y (2) que no se mezclan como se indica en la figura. Determine la razón de las densidades $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.*



Cinemática

6.1. Introducción

La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar sus causas. Como se explicó en el primer capítulo, muchos años han pasado para llegar a la descripción actual de las características del movimiento. El estudio lo separaremos en los casos en que el movimiento es en una línea recta, caso llamado unidimensional, y cuando el movimiento es en el espacio, en dos o tres dimensiones. Este estudio requiere de elementos de matemáticas, del cálculo diferencial, que quizás usted aún no conozca. Tenga confianza en los resultados y deje por último las demostraciones para una comprensión futura.

6.2. Movimiento rectilíneo

Cuando una partícula se mueve en una línea recta, su posición está descrita por una sola coordenada. Los desplazamientos son entonces todos sobre una misma línea, y no es entonces necesario considerar el carácter vectorial de ellos, lo cual simplifica el estudio del movimiento. Es en dos o tres dimensiones donde los vectores son realmente necesarios para la descripción del movimiento.

Si usamos coordenadas cartesianas, la posición de un punto móvil estará determinada por su coordenada x la cual, si el punto se mueve, será alguna función del tiempo

$$x = x(t) \text{ m.} \quad (6.1)$$

6.2.1. Desplazamientos

El desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo entre los instantes t_1 y t_2 se define por la diferencia entre sus coordenadas final e inicial

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) \text{ m.} \quad (6.2)$$

Este desplazamiento no dice nada realmente de que le ocurrió al móvil durante el intervalo de tiempo ni del espacio que la partícula recorrió durante ese intervalo.

6.2.2. Espacio recorrido

El espacio recorrido por el móvil que será denotado por s y que se expresa en metros (m) es la magnitud del desplazamiento si acaso el móvil no cambia el sentido del movimiento. Si el móvil cambia el sentido del movimiento, el espacio recorrido es la suma de las magnitudes de los desplazamientos que ocurren entre sucesivos cambios de sentido del movimiento. Por ejemplo si un móvil avanza una distancia L y luego se devuelve esa misma distancia, el desplazamiento será cero pero el espacio recorrido será $s = 2L$.

6.2.3. Velocidad media

La velocidad media en ese intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se define mediante

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ m s}^{-1}. \quad (6.3)$$

6.2.4. Velocidad instantánea

La velocidad instantánea o simplemente la llamada velocidad $v(t)$ se define como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, es decir

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1}, \quad (6.4)$$

que es la derivada de $x(t)$ respecto al tiempo

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (6.5)$$

Más adelante, cuando se considere movimientos en el espacio, esta velocidad será denominada v_x y llamada componente x de la velocidad.

6.2.5. Rapidez

La rapidez de una partícula en el instante de tiempo t se define como la magnitud de la velocidad, en el caso unidimensional esto simplemente

$$|v(t)| \text{ m s}^{-1}$$

6.2.6. Aceleración media

La aceleración de la partícula en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 se define mediante

$$a_m = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \text{ m s}^{-2},$$

o bien

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (6.6)$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$ y $\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$

6.2.7. Aceleración instantánea

La aceleración instantánea de la partícula en el instante t se define como el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, es decir

$$a(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{v(t) - v(t_1)}{t - t_1} = \frac{dv(t)}{dt}, \quad (6.7)$$

esto es la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (6.8)$$

Las unidades *SI* de posición, velocidad y aceleración son respectivamente m , m s^{-1} , m s^{-2} .

En las figuras que siguen se ilustran los gráficos $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ para un ejemplo donde $x(t) = t^2$.

La velocidad resulta $v(t) = dx/dt = 2t$ es decir una línea recta y la aceleración $a = dv/dt = 2$ es constante

Este es un caso particular, un movimiento con aceleración constante, con velocidad inicial nula y posición inicial nula.

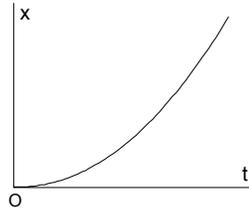


Figura 6.1: Posición vs tiempo.

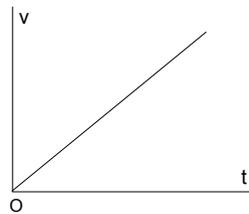


Figura 6.2: Velocidad vs tiempo.

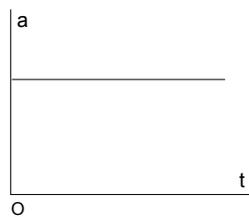


Figura 6.3: Aceleración vs tiempo.

6.2.8. Interpretación gráfica

Algunos de los conceptos descritos en las secciones anteriores admiten una interpretación gráfica.

- En un gráfico x versus t la velocidad por ser la derivada dx/dt es en-

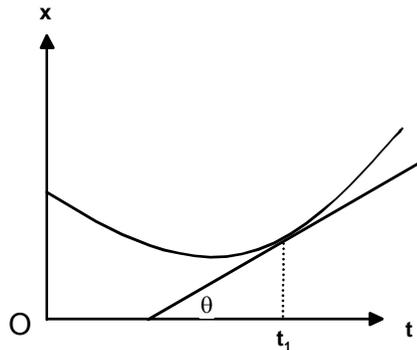


Figura 6.4:

tonces la pendiente de la curva, o sea como se indica en la figura (6.4) es la tangente del ángulo θ .

$$v(t_1) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} = \tan \theta.$$

De ese modo a simple vista puede deducirse donde la velocidad es positiva, negativa o cero, lo cual es de utilidad para decidir el sentido del movimiento del móvil.

- En un gráfico v_x versus t , figura (6.5) el área entre dos tiempos es

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt} dt = x(t_2) - x(t_1),$$

y esto corresponde al desplazamiento entre esos dos tiempos. El desplazamiento no corresponde en general al espacio recorrido por el móvil. Para determinar el espacio recorrido por un móvil hay que ser cuidadoso como se explica en la situación siguiente. En la figura (6.6), el

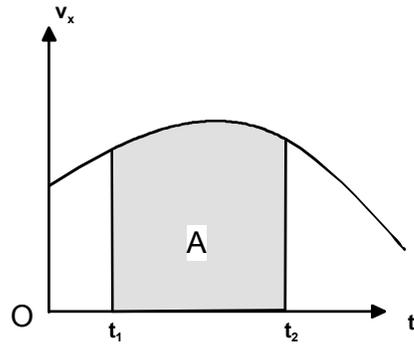


Figura 6.5:

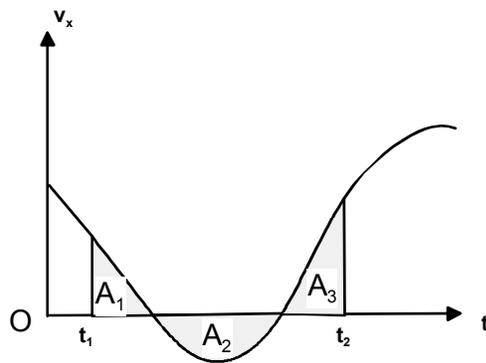


Figura 6.6:

desplazamiento entre t_1 y t_2 sigue siendo el área bajo la curva, esto es

$$A_1 + A_2 + A_3 = x(t_2) - x(t_1),$$

pero si se calcula el área A_2 mediante integración esta resulta negativa, lo que significa que v_x es negativa o sea el móvil se está devolviendo. El espacio recorrido es la suma de las magnitudes de las áreas, esto es

$$s = |A_1| + |A_2| + |A_3|,$$

que en general será mayor o igual al desplazamiento.

NOTA 6.1 El área bajo una curva es calculable mediante integrales, materia que usted quizás aún no conozca. Para situaciones simples donde la velocidad varía linealmente con el tiempo, dichas áreas podrán ser calculadas geométricamente.

6.2.9. Movimiento uniformemente acelerado

Se dice que un movimiento es uniformemente acelerado si la aceleración del móvil es constante. En general, si la aceleración a es constante se tiene que

$$\frac{dv(t)}{dt} = a,$$

expresión que podemos integrar dos veces obteniendo

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a dt,$$

o sea

$$v(t) = v(0) + at, \quad (6.9)$$

e integrando de nuevo

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (v(0) + at) dt,$$

luego, realizando la integral resulta

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2. \quad (6.10)$$

Aquí $x(0)$ representa la posición inicial y $v(0)$ la velocidad inicial. Si despejamos el tiempo de la primera y reemplazamos en la segunda se obtiene

$$x(t) - x(0) = \frac{v^2(t) - v^2(0)}{2a}, \quad (6.11)$$

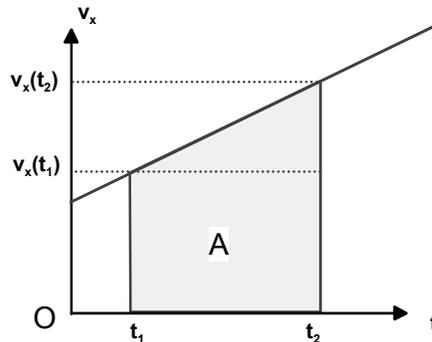
que tiene importancia en ciertas situaciones. Por ejemplo si la aceleración es negativa (movimiento desacelerado), el espacio recorrido hasta detenerse será

$$x(t) - x(0) = \frac{-v^2(0)}{2a}.$$

NOTA 6.2 Se habla de movimiento desacelerado cuando la aceleración tiene signo contrario a la velocidad. En movimientos más generales se dice que el movimiento es desacelerado cuando la aceleración tiene sentido contrario a la velocidad.

6.2.10. Solución gráfica

Para estos casos simples la integral no es necesaria. Si la aceleración es constante, entonces el gráfico velocidad tiempo es una línea recta. La figura siguiente lo ilustra



La aceleración es

$$a = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1},$$

de donde

$$v(t_2) - v(t_1) = a(t_2 - t_1),$$

y el desplazamiento que es el área será (área de un rectángulo más área de un triángulo)

$$\begin{aligned} A &= x(t_2) - x(t_1) = v(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}(v(t_2) - v(t_1))(t_2 - t_1) \\ x(t_2) - x(t_1) &= v(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2, \\ x(t_2) &= x(t_1) + v(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2, \end{aligned}$$

que generaliza el resultado anterior. Además podemos obtener otro resultado respecto a la velocidad media. La velocidad media en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es

$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Utilizando los resultados anteriores la podemos escribir

$$\begin{aligned} v_m &= v(t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1), \\ v_m &= v(t_1) + \frac{1}{2}(v(t_2) - v(t_1)), \\ v_m &= \frac{1}{2}(v(t_1) + v(t_2)), \end{aligned}$$

resultado válido cuando la aceleración es constante

6.3. Movimiento en el espacio

6.3.1. En coordenadas cartesianas

Los desplazamientos en el espacio se combinan como vectores, de modo que debemos aquí usar vectores. El vector posición del punto móvil en términos de las coordenadas cartesianas del punto será

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (6.12)$$

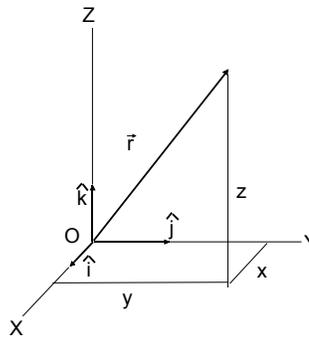
Aquí, los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ son constantes y sólo varían las coordenadas de modo que la velocidad y aceleración que se definen por

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt}, \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

resultan ser

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}, \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}\end{aligned}\tag{6.14}$$

esto es hay que sumar vectorialmente velocidades y aceleraciones en los distintos ejes.



Hemos usado la notación común en Física de representar derivadas, cuando ello sea claro, mediante "puntos", por ejemplo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt}, \\ \ddot{x} &= \frac{d^2x}{dt^2}.\end{aligned}$$

Rapidez

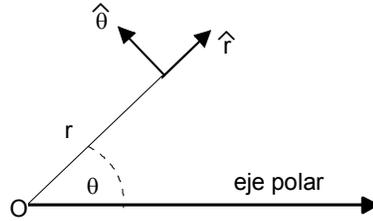
La rapidez de la partícula se define como la magnitud del vector velocidad, es decir

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

que es siempre no negativa.

6.3.2. En coordenadas polares

Es posible utilizar muchos sistemas de coordenadas para describir un movimiento. En particular si el movimiento tiene lugar en un plano, las coordenadas polares pueden ser apropiadas.



Las coordenadas polares del punto son la distancia al origen r y el ángulo θ respecto al eje polar. Los vectores unitarios son el vector unitario radial \hat{r} y el vector unitario transversal $\hat{\theta}$ cuyo sentido se elige de acuerdo al sentido de crecimiento del ángulo, como se indica en la figura. El eje polar puede estar orientado arbitrariamente pero en la práctica conviene elegirlo hacia donde esté la partícula inicialmente de manera de tener $\theta(0) = 0$. Si una partícula se mueve, entonces serán variables sus coordenadas polares r y θ . Esto es

$$\begin{aligned} r &= r(t), \\ \theta &= \theta(t), \end{aligned}$$

Siendo $r(t)$ y $\theta(t)$ funciones del tiempo. Además, a diferencia del sistema cartesiano, ahora son también variables los vectores unitarios \hat{r} y $\hat{\theta}$. Ellos pueden expresarse en términos de los vectores unitarios cartesianos constantes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \end{aligned}$$

De aquí derivando respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \dot{\theta} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \dot{\theta} \hat{\theta}, \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\dot{\theta} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = -\dot{\theta} \hat{r}. \end{aligned}$$

De estas expresiones es posible obtener

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{k} \times \hat{r},$$

resultado que será usado en la sección siguiente para calcular derivadas de vectores unitarios en casos más complicados. En definitiva, el vector posición

y la velocidad pueden expresarse de la siguiente forma

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad (6.15)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (6.16)$$

La aceleración será

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}, \\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r}), \end{aligned}$$

o sea

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}. \quad (6.17)$$

Las componentes polares de la aceleración son en consecuencia

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad (6.18)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}, \quad (6.19)$$

componentes polares que llamaremos componentes radial y transversal respectivamente. Hay casos particulares importantes que analizamos a continuación.

Movimiento circular

En particular, si la partícula describe una circunferencia de radio R con centro en el origen, y como R es constante ($r = R$, $\dot{r} = 0$) se obtiene

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad (6.20)$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}. \quad (6.21)$$

Las direcciones de los vectores unitarios son ahora: \hat{r} normal a la circunferencia y $\hat{\theta}$ tangencial a la circunferencia. Entonces la velocidad es tangente a la circunferencia y la aceleración siempre tiene una parte de la aceleración dirigida hacia el centro de la circunferencia, la aceleración centrípeta, y en general otra parte tangente a la circunferencia, la aceleración tangencial.

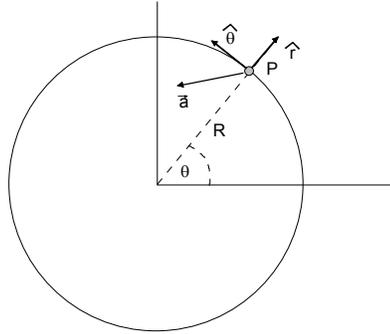


Figura 6.7: Movimiento circular.

A la primera derivada del ángulo respecto al tiempo se la denomina velocidad angular ω y a la segunda derivada del ángulo respecto al tiempo, se la denomina aceleración angular α es decir

$$\begin{aligned}\omega &= \dot{\theta}, \\ \alpha &= \ddot{\theta},\end{aligned}$$

y en términos de estas se tiene

$$\vec{v} = R\omega\hat{\theta}, \quad (6.22)$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\hat{r} + R\alpha\hat{\theta}. \quad (6.23)$$

Caso particular. Movimiento circular uniforme.

Este caso ocurre si la rapidez es constante. Se tiene entonces que $\alpha = 0$ y luego

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} = v\hat{\theta}, \quad (6.24)$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} = -\frac{v^2}{R}\hat{r}. \quad (6.25)$$

Además, como $\dot{\theta}$ es constante

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0), \quad (6.26)$$

y por integración se obtiene

$$\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)t, \quad (6.27)$$

es decir el ángulo crece linealmente con el tiempo.

Caso particular. Aceleración angular constante

Este caso ocurre si la aceleración angular es constante. En general, si la aceleración angular es constante (no nula) se obtendría por integración

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0) + \alpha t, \quad (6.28)$$

y además

$$\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad (6.29)$$

que muestran que la rapidez angular $\dot{\theta}$ varía linealmente con el tiempo y el ángulo varía cuadráticamente con el tiempo.

Notación alternativa

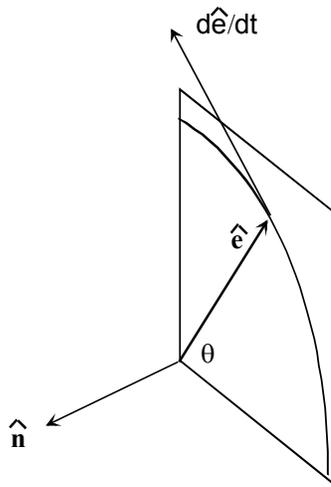
Algunos prefieren la notación $\dot{\theta}(t) = \omega$ y $\ddot{\theta} = \alpha$, de manera que las relaciones anteriores pueden escribirse

$$\omega(t) = \omega(0) + \alpha t, \quad (6.30)$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2. \quad (6.31)$$

Derivadas de los vectores unitarios

En muchos sistemas de coordenadas si el punto se mueve, los vectores unitarios cambian de dirección y son por lo tanto vectores variables.



Si un vector unitario \hat{e} como el de la figura varía con el tiempo porque el ángulo θ varía con el tiempo, entonces su derivada es la velocidad de su punta. Si recuerda la última nota de la sección anterior, la derivada puede ser obtenida mediante el producto cruz $\dot{\theta}\hat{n} \times \hat{e}$ o sea

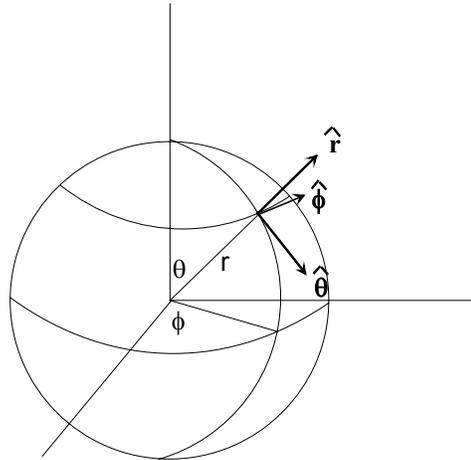
$$\frac{d\hat{e}}{dt} = (\dot{\theta}\hat{n}) \times \hat{e}$$

Si hay más ángulos variables debemos sumar vectorialmente los cambios obteniendo

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = (\dot{\theta}\hat{n} + \dot{\phi}\hat{m} + \dots) \times \hat{e} = \vec{\omega} \times \hat{e} \quad (6.32)$$

Donde $\vec{\omega}$ se denomina la velocidad angular del movimiento de \hat{e} . Los vectores unitarios \hat{n} , \hat{m} son perpendiculares a los planos donde se definen los ángulos.

6.3.3. Velocidad y aceleración en coordenadas esféricas



Las coordenadas esféricas son: r la distancia al origen, θ el ángulo polar y ϕ el ángulo azimutal. Como el vector posición es

$$\vec{r} = r\hat{r},$$

el cálculo de la velocidad y de la aceleración requiere derivar los vectores unitarios, lo cual es más fácil realizar con lo explicado anteriormente, ecuación (6.32).

En efecto para coordenadas esféricas

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{\phi}$$

y como

$$\hat{k} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}$$

tenemos que

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + \dot{\theta}\hat{\phi} \quad (6.33)$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \left(\dot{\phi}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + \dot{\theta}\hat{\phi} \right) \times \hat{r} \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \left(\dot{\phi}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + \dot{\theta}\hat{\phi} \right) \times \hat{\theta} \\ \frac{d\hat{\phi}}{dt} &= \left(\dot{\phi}(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}) + \dot{\theta}\hat{\phi} \right) \times \hat{\phi} \end{aligned} \quad (6.34)$$

y haciendo los productos cruz se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}\hat{\theta} \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \dot{\phi}\cos\theta\hat{\phi} - \dot{\theta}\hat{r} \\ \frac{d\hat{\phi}}{dt} &= -\dot{\phi}(\cos\theta\hat{\theta} + \sin\theta\hat{r}) \end{aligned}$$

Velocidad

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}r\hat{r} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r(\dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}\hat{\theta}) \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + r\dot{\theta}\hat{\theta} \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \quad (6.36)$$

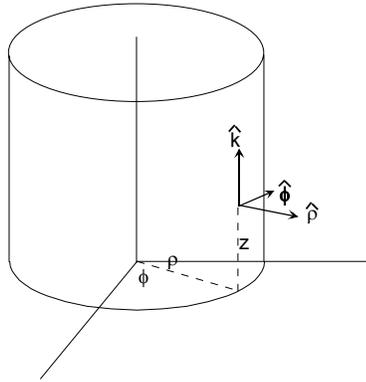
Aceleración

Omitimos los detalles, pero los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\phi &= 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta \end{aligned} \quad (6.37)$$

6.3.4. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son: la altura z sobre el plano OXY , la distancia ρ de la proyección del punto en el plano OXY al origen y el ángulo que forma la línea del origen a la proyección con el eje OX .



Como hay un sólo ángulo variable, la velocidad angular resulta

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{k},$$

y el vector posición es

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{k}.$$

Calculemos las derivadas de los vectores unitarios

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}}{dt} &= \dot{\phi} \hat{k} \times \hat{\rho} = \dot{\phi} \hat{\phi}, \\ \frac{d\hat{\phi}}{dt} &= \dot{\phi} \hat{k} \times \hat{\phi} = -\dot{\phi} \hat{\rho}, \end{aligned}$$

de modo que derivando el vector posición resulta

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \frac{d}{dt}(\rho\hat{\rho} + z\hat{k}), \\
 &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\frac{d}{dt}\hat{\rho} + \dot{z}\hat{k}, \\
 &= \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k},
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

y derivando el vector velocidad resulta para la aceleración

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}) \\
 &= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{d}{dt}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\frac{d}{dt}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \\
 &= \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{k} \\
 &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}.
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

En resumen

$$\begin{aligned}
 v_\rho &= \dot{\rho} \\
 v_\phi &= \rho\dot{\phi} \\
 v_z &= \dot{z} \\
 a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \\
 a_\phi &= 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} \\
 a_z &= \ddot{z}
 \end{aligned}$$

6.3.5. Coordenadas intrínsecas

Si una partícula se mueve sobre una curva dada, la posición del punto será una función de la longitud de arco s medida desde un origen arbitrario en la curva hasta la posición del punto en tiempo t , es decir

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t)). \tag{6.40}$$

En el apéndice se muestra que si

- $\hat{T}(s)$ representa al vector unitario tangente a la trayectoria en el lugar donde está la partícula móvil y

- $\hat{N}(s)$ representa al vector unitario normal a la trayectoria y hacia el centro de curvatura, en el lugar donde está la partícula móvil

Entonces la velocidad y aceleración están dadas por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s}\hat{T} = v\hat{T}.$$

y

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{s}\hat{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{N} \\ &= \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N}, \end{aligned}$$

y para movimientos planos, es suficiente considerar

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v},$$

y

$$\hat{N} = \pm \hat{k} \times \hat{T},$$

donde \hat{k} es perpendicular al plano del movimiento y el signo debe elegirse de modo que \hat{N} resulte hacia el centro de curvatura. La aceleración es

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N},$$

donde el radio de curvatura puede calcularse si se conoce la trayectoria $y = y(x)$ de la forma

$$\rho = \frac{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}{|y''(x)|}.$$

6.4. Resumen

Por su utilidad se presentan resumidamente los resultados para las componentes de la velocidad y aceleración en los sistemas estudiados en la sección anterior

cartesianas		
$v_x = \dot{x}$	$v_y = \dot{y}$	$v_z = \dot{z}$
$a_x = \ddot{x}$	$a_y = \ddot{y}$	$a_z = \ddot{z}$
polares		
$v_r = \dot{r}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$	$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$	
cilíndricas		
$v_\rho = \dot{\rho}$	$v_\phi = \rho\dot{\phi}$	$v_z = \dot{z}$
$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2$	$a_\phi = 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}$	$a_z = \ddot{z}$
esféricas		
$v_r = \dot{r}$	$v_\theta = r\dot{\theta}$	$v_\phi = r\dot{\phi}\sin\theta$
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$	$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta$
$-r\dot{\phi}^2\sin^2\theta$	$-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta$	$+r\ddot{\phi}\sin\theta$
intrínsecas		
$v_T = \vec{v} = v$	$v_N = 0$	
$a_T = \dot{v}$	$a_N = v^2/\rho$	

6.5. Movimiento de proyectiles

El movimiento de proyectiles en la vecindad de la superficie terrestre, es un caso de movimiento con aceleración constante. La aceleración de gravedad es de magnitud constante $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, vertical y dirigida hacia abajo. Entonces se tiene que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} = -g\hat{j}, \quad (6.41)$$

donde el eje OY es vertical hacia arriba.

NOTA 6.3 Se despreciarán efectos causados por el roce con el aire y los efectos que producen la rotación terrestre.

6.5.1. Análisis del movimiento

Si un objeto es lanzado desde una altura h del eje y con rapidez inicial v_0 formando un ángulo α con la horizontal, ver figura 6.8, entonces se tiene

que la aceleración del objeto está verticalmente dirigida hacia abajo. Si el eje Ox es horizontal y el eje Oy es vertical dirigido hacia arriba, entonces en componentes se tiene que

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= -g,\end{aligned}$$

de modo que por integración se tiene que las componentes de velocidad y posición son

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v_0 \cos \alpha, \\ x(t) &= v_0 t \cos \alpha, \\ \dot{y}(t) &= v_0 \sin \alpha - gt, \\ y(t) &= h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2,\end{aligned}\tag{6.42}$$

Ecuación de la trayectoria

Eliminando el tiempo entre las coordenadas de posición se obtiene

$$y = h + x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.\tag{6.43}$$

Angulo de disparo

Aquí responderemos la siguiente pregunta. Si un proyectil es disparado desde un punto $(0, h)$ con rapidez inicial dada v_0 ¿es posible pasar por un punto de coordenadas (x, y) ? Para dar en un blanco a un punto (x, y) debemos averiguar si existe un ángulo de disparo adecuado. Este puede despejarse de la trayectoria, escrita en la forma

$$y = h + x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha),\tag{6.44}$$

que constituye una ecuación de segundo grado para $\tan \alpha$ y cuya solución es

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{(v_0^4 - 2gyv_0^2 + 2ghv_0^2 - g^2x^2)}}{gx}.\tag{6.45}$$

Parábola de seguridad

La existencia del ángulo de disparo depende del signo de la cantidad subradical. Si ella es positiva, hay dos ángulos. Si ella es negativa el punto (x, y) no es alcanzable. Si la cantidad subradical en la expresión anterior es justo cero, estamos en la frontera de la región alcanzable por los disparos puesto que para puntos más lejanos la cantidad subradical es negativa. Entonces la ecuación de esa curva frontera será

$$v_0^4 - 2gyv_0^2 + 2ghv_0^2 - g^2x^2 = 0,$$

de donde despejamos

$$y = h + \frac{1}{2g}v_0^2 - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2}x^2. \quad (6.46)$$

Para llegar a puntos en el límite, o sea sobre la parábola de seguridad, el ángulo de disparo estará dado por

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx}. \quad (6.47)$$

Los conceptos de esta sección son especialmente útiles cuando se trata de

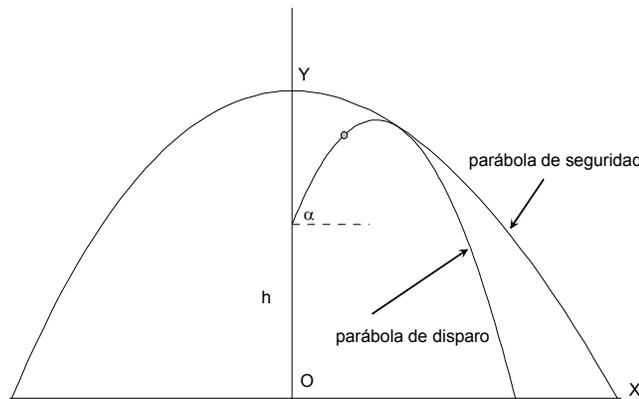


Figura 6.8:

maximizar el alcance de un proyectil en cualquier dirección. Por ejemplo para maximizar el alcance al nivel del suelo de un proyectil disparado desde una altura h , basta hacer $y = 0$ en la parábola de seguridad

$$h + \frac{1}{2g}v_0^2 - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2}x^2 = 0,$$

de aquí el alcance máximo será

$$x = \sqrt{(v_0^2 + 2gh)} \frac{v_0}{g},$$

y el ángulo para lograrlo será

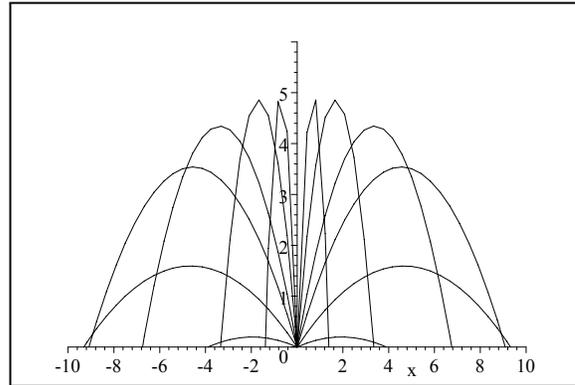
$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}, \quad (6.48)$$

menor de 45° a menos que $h = 0$.

Formulación alternativa (requiere más matemáticas)

Para una dada posición inicial del disparo y una dada rapidez, si variamos los ángulos de disparo, tenemos una familia de trayectorias, las cuales se muestran en la figura que sigue para varios ángulos de disparo

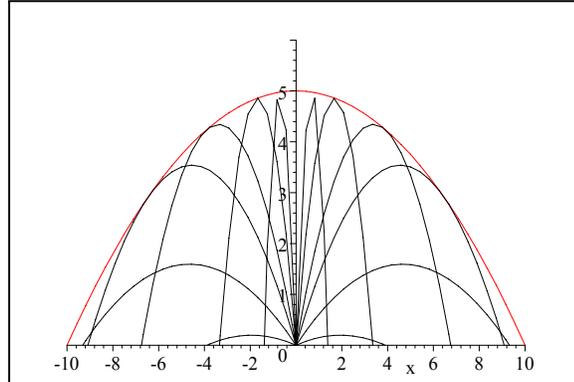
$$y(x, \alpha) = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$



Hemos tomado $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ y $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$

La envolvente de esa familia de curvas, que es tangente a todas las curvas de la familia, es la parábola de seguridad

$$f(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$



La condición matemática es que donde se tocan la envolvente con alguna curva de la familia, ellas son tangentes, es decir

$$\begin{aligned} y(x, \alpha) &= f(x), \\ y(x + dx, \alpha + d\alpha) &= f(x + dx) \\ \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial x} &= \frac{df(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Desarrollando la segunda

$$y(x, \alpha) + \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial x} dx + \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha = f(x) + \frac{df(x)}{dx} dx.$$

Se cancelan dos términos quedando

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Para nuestro caso

$$\begin{aligned} y &= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \\ 0 &= x \sec^2 \alpha - \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^3 \alpha} \sin \alpha, \end{aligned}$$

debemos eliminar α . De la segunda

$$0 = 1 - \frac{gx}{v_0^2} \tan \alpha \rightarrow \tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx},$$

reemplazamos obteniendo

$$\begin{aligned} y &= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha) \\ &= \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + \frac{v_0^4}{g^2x^2}\right), \end{aligned}$$

esto es

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (6.49)$$

Parábola de seguridad en forma polar

Si colocamos el origen donde está el cañón y elegimos al eje OX como eje polar, tendremos en coordenadas polares

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

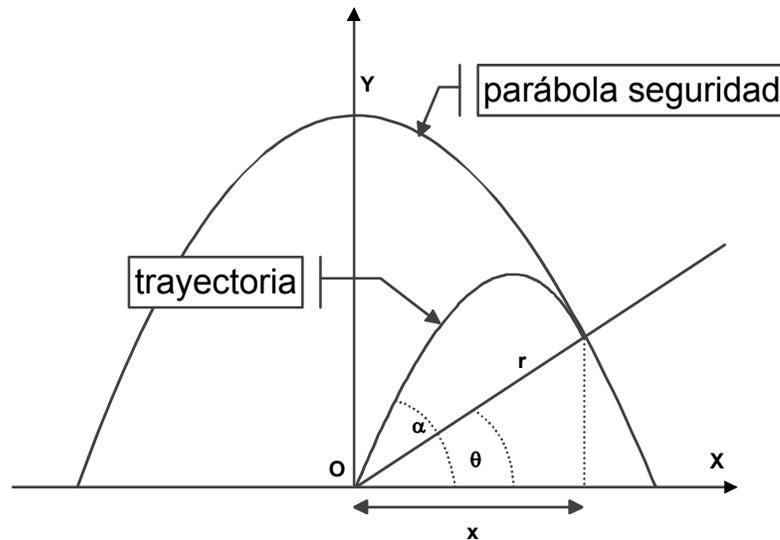
y si reemplazamos en (6.49) se obtiene

$$r \sin \theta = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gr^2 \cos^2 \theta}{2v_0^2},$$

de donde podemos despejar r obteniendo (algo de álgebra)

$$r = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin \theta)}, \quad (6.50)$$

la forma polar de la parábola de seguridad. Esta forma es particularmente útil para encontrar el alcance máximo r en una determinada dirección θ .



Por ejemplo podemos relacionar el ángulo de disparo α con el ángulo θ para el alcance máximo r . Recuerde que

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{v_0^2}{gx}, \\ x &= r \cos \theta,\end{aligned}$$

entonces

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{v_0^2}{gr \cos \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}.$$

Esta expresión puede simplificarse porque existe la identidad

$$\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \tan \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta \right),$$

luego

$$\alpha = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta.$$

Esta expresión da los ángulos de disparo α para maximizar el alcance en una dirección arbitraria θ . Si $\theta = 0$ entonces $\alpha = \frac{\pi}{4}$, si $\theta = \frac{\pi}{2}$ entonces $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

6.6. Movimiento relativo

Desde hace bastante tiempo (mucho antes de la teoría de la relatividad) se ha reconocido que el movimiento es relativo. Si hay dos sistemas de referencia

que se mueven uno respecto al otro, entonces los observadores en ambos sistemas determinarán posiciones relativas distintas y velocidades relativas distintas y relacionadas entre sí según cual sea el movimiento de un sistema respecto al otro. Primero analizaremos que ocurre si un sistema se considera fijo, y el otro se traslada sin rotaciones respecto al primero.

6.6.1. Traslación de un sistema

La figura ilustra como están relacionadas las posiciones para sistemas dos sistemas, figura (8.1), que se trasladan, uno respecto de otro, con velocidad relativa \vec{v}

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t. \quad (6.51)$$

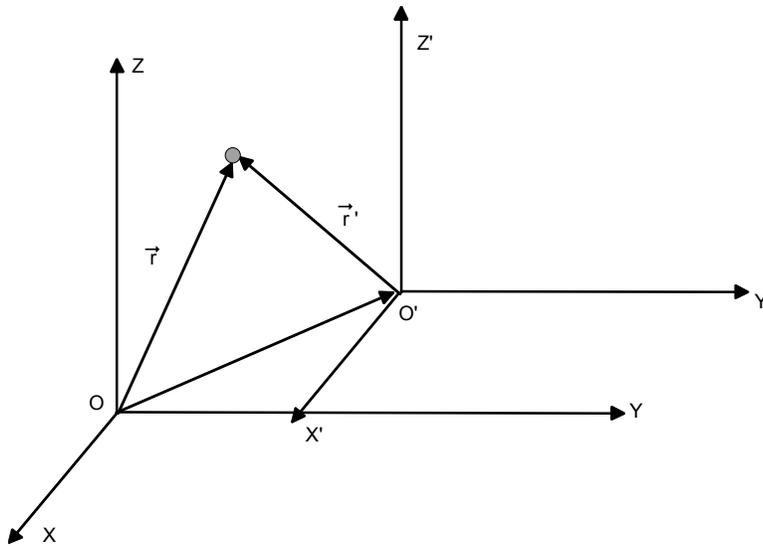


Figura 6.9: Transformación de Galileo.

De la relación entre posiciones, derivando respecto al tiempo se obtiene

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}', \quad (6.52)$$

la llamada transformación de Galileo de velocidades. En el apéndice se discute porqué esta transformación ha debido modificarse si las velocidades se acercan a la velocidad de la luz.

6.6.2. Movimiento general de un sistema

En general para sistemas de referencia arbitrarios, admitiendo aceleraciones y rotaciones de ellos respecto a uno supuesto fijo, las relaciones entre velocidades y aceleraciones de partículas son más complicadas. En el apéndice se demuestra que

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}', \quad (6.53)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}', \quad (6.54)$$

siendo $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$. Debe observarse que la velocidad y aceleración relativas son las derivadas de los vectores posición y velocidad relativos manteniendo fijas las direcciones de los ejes móviles, lo cual en algunos textos se indica por

$$\vec{v}^{rel} = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}, \quad \vec{a}^{rel} = \frac{\partial \vec{v}^{rel}}{\partial t}.$$

Estas son las expresiones necesarias para realizar el estudio dinámico de los movimientos en sistemas de referencia que rotan. De hecho, nuestro propio sistema de referencia, la Tierra, tiene una rotación, respecto a su eje, prácticamente constante y afortunadamente no muy alta. Una vuelta por día.

6.7. Ejercicios

NOTA 6.4 (1), (2), y (3) representan el grado de dificultad del problema. El (1) corresponde a problemas tipo prueba, el (2) corresponde a problemas discriminatorios y el (3) a problemas de tareas.

EJERCICIO 6.1 (1) *La posición de una partícula que se mueve sobre el eje OX de un sistema de coordenadas está dada*

$$x(t) = 1 + 8t - 2t^2,$$

donde la posición está en metros y el tiempo en segundos. Determine

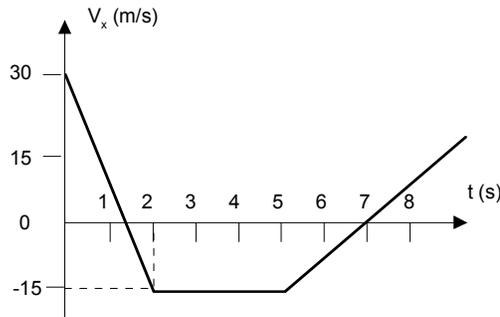
- a) *La velocidad en $t = 5$ s.*
- b) *La aceleración en $t = 2$ s.*
- c) *El instante en que la partícula cambia su sentido de movimiento.*
- d) *El desplazamiento de la partícula entre $t = 0$ y $t = 4$ s.*

- e) El espacio recorrido entre $t = 0$ y $t = 4$ s.
- f) El espacio recorrido entre $t = 0$ y $t = 5$ s.

EJERCICIO 6.2 (1) Una partícula se mueve a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas con aceleración constante. En el instante inicial pasa por la posición $x(0) = -10$ m con una velocidad $v(0) = -20$ m s⁻¹ y en $t = 3$ s su posición es $x(3) = -52$ m. Determine

- a) La posición de la partícula en función del tiempo $x(t)$. (o ecuación itinerario)
- b) El espacio recorrido por la partícula entre $t = 3$ s y $t = 6$ s.
- c) La velocidad media entre $t = 4$ s y $t = 7$ s.
- d) Los intervalos de tiempo en que la partícula se aleja del origen.

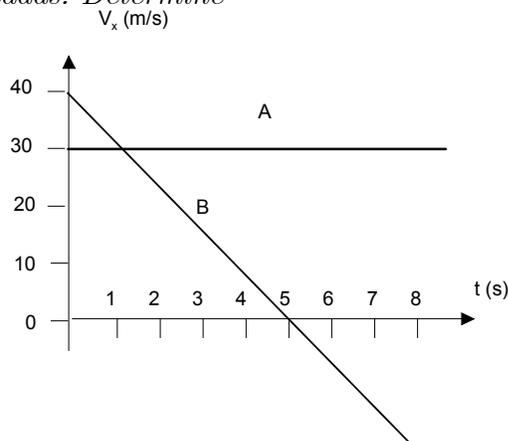
EJERCICIO 6.3 (1) El gráfico siguiente ilustra la variación de la velocidad $v(t)$ de una partícula que se mueve sobre el eje OX de un sistema de coordenadas con el tiempo. Si en $t = 0$ la partícula está en el origen del sistema, determine



- a) La aceleración de la partícula en $t = 1$ s.
- b) El desplazamiento de la partícula entre $t = 0$ s y $t = 3$ s.
- c) La velocidad media de la partícula entre $t = 4$ s y $t = 9$ s.
- d) La posición de la partícula en función del tiempo $x(t)$ (ecuación itinerario) en el intervalo de $t = 0$ s a $t = 2$ s.

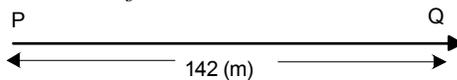
e) Los intervalos de tiempo en que la partícula se dirige hacia el origen.

EJERCICIO 6.4 (1) En el gráfico de la figura están representadas las velocidades de dos partículas A y B que se mueven a lo largo del eje OX de un sistema de coordenadas. Determine



- La aceleración de B.
- Espacio recorrido por A desde $t = 0$ hasta cuando B alcanza la velocidad $v_B = 30 \text{ m s}^{-1}$.
- El desplazamiento de B en el intervalo de $t = 0 \text{ s}$ a $t = 10 \text{ s}$.
- La posición de la partícula A en función del tiempo t , si su posición inicial es $x(0) = 8 \text{ m}$.

EJERCICIO 6.5 (1) Dos partículas A y B se mueven con velocidad constante sobre un mismo eje OX en sentido contrario de manera que en $t = 0$ cuando B pasa por Q su velocidad es $v_B(0) = -5 \text{ m s}^{-1}$, A pasa por P con velocidad $v_A(0) = 6 \text{ m s}^{-1}$. La distancia entre los puntos A y B es 142 m. Determine las desaceleraciones constantes que deben aplicar ambas partículas para que se detengan simultáneamente justo antes de chocar.



EJERCICIO 6.6 (1) Una partícula se mueve en la dirección positiva del eje OX con una rapidez constante de 50 m s^{-1} durante 10 s. A partir de este último instante acelera constantemente durante 5 s hasta que su rapidez es 80 m s^{-1} . Determine:

- La aceleración de la partícula en los primeros 10 s.
- La aceleración de la partícula entre $t = 10 \text{ s}$ y $t = 15 \text{ s}$.
- El desplazamiento de la partícula entre $t = 0 \text{ s}$ y $t = 15 \text{ s}$.
- La velocidad media de la partícula entre $t = 10 \text{ s}$ y $t = 15 \text{ s}$.

EJERCICIO 6.7 (1) Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, recorre en los dos primeros segundos un espacio de 16,72 m y durante los dos segundos siguientes un espacio de 23,46 m. Determine

- El espacio que recorre en los siguientes cuatro segundos.
- La velocidad inicial.
- La aceleración del cuerpo.

EJERCICIO 6.8 (1) Dos partículas A y B salen al mismo tiempo desde el origen de un sistema de coordenadas moviéndose en el sentido positivo del eje OX . La partícula A tiene una velocidad inicial de $v_A(0) = 18 \text{ m s}^{-1}$ y una aceleración constante $a_A = 4 \text{ m s}^{-2}$, mientras que la partícula B tiene una velocidad inicial de $v_B(0) = 10 \text{ m s}^{-1}$ y una aceleración constante $a_B = 8 \text{ m s}^{-2}$. Determine el instante en que las partículas se encuentran nuevamente. (Respuesta: $t = 4 \text{ s}$)

EJERCICIO 6.9 (1) En una carrera de 100 m dos jóvenes A y B cruzan la meta empatados, marcando ambos 10,2 s. Si, acelerando uniformemente, A alcanza su rapidez máxima a los 2 s y B a los 3 s y ambos mantienen la rapidez máxima durante la carrera, determine:

- Las aceleraciones de A y B .
- Las rapidezces máximas de A y B .
- El que va adelante a los 10 s y la distancia que los separa en ese instante.

EJERCICIO 6.10 (1) Una partícula que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje OX parte del origen con una velocidad inicial $v(0) = 5 \text{ m s}^{-1}$ y desacelera constantemente con una aceleración $a = -10 \text{ m s}^{-2}$. Determine la posición máxima que alcanza sobre el eje de movimiento y la velocidad cuando pasa nuevamente por el origen.

EJERCICIO 6.11 (1) Si una partícula en que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje OX parte del origen con velocidad nula y aceleración constante a , demuestre que las distancias recorridas en cada segundo aumentan en la proporción

$$1 : 3 : 5 : 7 : \dots$$

EJERCICIO 6.12 (1) Si una partícula que se mueve en movimiento unidimensional sobre el eje OX parte del origen con velocidad V_0 y desacelera con aceleración constante $-a$, demuestre que la partícula regresará al origen en un tiempo

$$t = \frac{2V_0}{a}.$$

EJERCICIO 6.13 (1) Dos partículas A y B que se mueven en movimiento unidimensional sobre el eje OX parten del origen. La partícula A parte en $t = 0$ con velocidad $V_A(0) = 10 \text{ m s}^{-1}$. La partícula B parte en $t = 1 \text{ s}$ con velocidad $V_B(1) = -10 \text{ m s}^{-1}$. Ambas desaceleran con aceleración de magnitud $a = 6 \text{ m s}^{-2}$. Determine la máxima distancia entre ellas antes que se crucen. (Respuesta: 15,167 m)

EJERCICIO 6.14 (1) Desde el origen de un sistema de coordenadas se lanza una partícula con rapidez v_0 formando un ángulo de 37° con la horizontal y choca al cabo de 3 s con una pared en el punto (x, y) . Si se cambia el ángulo de lanzamiento a 53° con la horizontal, manteniendo la misma rapidez de lanzamiento v_0 , la partícula impacta la pared en el punto $(x, y + 7)$.

- a) Determinar el tiempo que demora el proyectil lanzado a 53° sobre la horizontal en llegar a la pared.
- b) Determine la rapidez de lanzamiento de la partícula.

Respuesta: 4 s; 30 m s^{-1}

EJERCICIO 6.15 (1) *Por un tubo de diámetro despreciable ubicado en el suelo, sale un chorro de agua en un ángulo de 45° con la horizontal (dentro del tubo las partículas de agua tienen distintas velocidades). El grueso del agua forma en el suelo un charco aproximadamente circular de radio 2,2 m cuyo centro se encuentra ubicado a 12,2 m del origen. Determine entre que valores varía la rapidez con que sale el grueso del agua por el tubo despreciando las fuerzas viscosas.*

Respuesta: 10 y 12 m s^{-1}

EJERCICIO 6.16 (1) *Una partícula en $t = 0$ pasa por el origen de un sistema de coordenadas fijo en el espacio con velocidad $\vec{v}_0 = 2\hat{i} - \hat{k} \text{ m s}^{-1}$ moviéndose en el espacio con una aceleración que en cualquier instante está dada por la expresión $\vec{a}(t) = t\hat{i} - \hat{j} \text{ m s}^{-2}$. Determine en $t = 2 \text{ s}$:*

- Los vectores posición y velocidad de la partícula.*
- Las componentes tangencial y normal de la aceleración.*

Respuesta: $(16/3; -2; -2) \text{ m}$; $(4; -2; -1) \text{ m s}^{-1}$; $2,18 \text{ m s}^{-2}$; $0,49 \text{ m s}^{-2}$.

EJERCICIO 6.17 (1) *Un tanque se desplaza con velocidad constante de $10\hat{i} \text{ m s}^{-1}$ por una llanura horizontal. Cuando $t = 0$, lanza un proyectil que da en el blanco a 9 km. Si la inclinación del cañón respecto de la horizontal es 37° , determine la rapidez con que sale el proyectil respecto del cañón.*

Respuesta: 300 m s^{-1}

EJERCICIO 6.18 (1) *Desde el origen de un sistema de coordenadas se lanza un proyectil en dirección de un objeto situado en la posición $(2h; h)$. Al momento de lanzar el proyectil, se suelta el objeto que cae por efecto de la gravedad. Determine en función de h la separación entre el proyectil y el objeto cuando el proyectil haya recorrido horizontalmente una distancia h .*

Respuesta: $\frac{h}{2}\sqrt{5}$

EJERCICIO 6.19 (1) *Desde un barco que se mueve a 20 km h^{-1} se ve a otro barco que está a 20 km cruzando su trayectoria perpendicularmente con una rapidez de 15 km h^{-1} . ¿Después de cuánto tiempo la distancia que separa los barcos es mínima?*

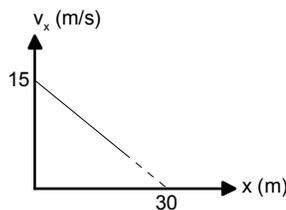
Respuesta: $t = 0,64 \text{ h}$

EJERCICIO 6.20 (2) Una partícula A es lanzada sobre una línea recta horizontal con cierta velocidad. Su aceleración es constante. Un segundo más tarde y desde el mismo lugar otra partícula B es lanzada tras la primera con una velocidad igual a la mitad de la de A y una aceleración el doble de A. Cuando B alcanza a A, las rapidezces son 22 m s^{-1} y 31 m s^{-1} respectivamente. Calcule la distancia que las partículas han viajado.

Respuesta: $d = 48 \text{ m}$.

EJERCICIO 6.21 (2) La velocidad de una partícula en el movimiento rectilíneo decrece desde 15 m s^{-1} a una velocidad que tiende a cero, cuando $x = 30 \text{ m}$ tal como lo muestra la figura ???. Demuestre que la partícula nunca alcanzará los 30 m y calcule la aceleración cuando $x = 18 \text{ m}$.

Respuesta: $a = -3 \text{ m s}^{-2}$



EJERCICIO 6.22 (1) Una partícula se mueve a lo largo de la curva $r = 3\theta$ tal que $\theta = 2t^3$ donde t se mide en segundos, r en metros y θ en radianes. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en coordenadas polares para $\theta = 0,2 \text{ rad}$.

Respuesta: $\vec{v} = 3,878\hat{r} + 0,776\hat{\theta}$; $\vec{a} = 15,707\hat{r} + 13,368\hat{\theta}$

EJERCICIO 6.23 (1) Desde una altura de 20 m , con respecto al eje X de un sistema de coordenadas ubicado en Tierra, se lanza una partícula A con una rapidez de 50 m s^{-1} y formando un ángulo de 30° con la horizontal. Simultáneamente y desde la posición $X = 200 \text{ m}$ se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil B de modo que cuando la partícula A llega a Tierra, el proyectil B está en su altura máxima. Calcular:

- a) el tiempo transcurrido para que la distancia que separa A de B sea mínima;

b) la velocidad relativa de A respecto a B en m s^{-1} cuando la distancia entre A y B es mínima.

Respuesta: $t = 3,21 \text{ s}$ $\vec{v}_A - \vec{v}_B = (43, 3; -32) \text{ m s}^{-1}$

EJERCICIO 6.24 (1) Un cañón está montado sobre un promontorio de altura h . Se dispara un proyectil con una rapidez v_0 y ángulo de elevación α . Demuestre que el alcance horizontal d , distancia a lo largo del plano horizontal que pasa por la base del promontorio, es:

$$d = \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \left[v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \right].$$

EJERCICIO 6.25 (1) Un cañón es montado sobre un promontorio de altura h . Se dispara un proyectil con una rapidez de salida v_0 . Demuestre que el alcance horizontal d es máximo cuando el ángulo de elevación es:

$$\alpha = \sin^{-1} \sqrt{\frac{v_0^2}{2(v_0^2 + gh)}}.$$

EJERCICIO 6.26 (2) Una partícula es lanzada al espacio de modo que su alcance sobre el plano horizontal es R y su máxima altura h . Demuestre que el, alcance horizontal máximo, con la misma rapidez de salida v_0 , es:

$$2h + \frac{R^2}{8h}.$$

EJERCICIO 6.27 (2) Se monta un cañón sobre la base de un plano inclinado que forma un ángulo β con la horizontal. Este cañón dispara un proyectil hacia la parte superior del plano, siendo el α ángulo que forma la velocidad de salida del proyectil con el plano. Calcule el ángulo de elevación para que el proyectil impacte sobre el plano inclinado paralelamente a la horizontal.

Respuesta.: $\beta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{4 \tan \alpha} \left(1 - \sqrt{(1 - 8 \tan^2 \alpha)} \right) \right)$

EJERCICIO 6.28 (3) Un proyectil se dispara con rapidez inicial v_0 , y ángulo de inclinación variable. ¿Para qué ángulo el alcance del proyectil será máximo a lo largo de la recta $y = x \tan \theta$?

Respuesta.: $\alpha = \tan^{-1}(\tan \theta + \sec \theta)$

EJERCICIO 6.29 (1) *Un aeroplano que vuela horizontalmente a 1 km de altura y con una rapidez de 200 km h⁻¹, deja caer una bomba contra un barco que viaja en la misma dirección y sentido con una rapidez de 20 km h⁻¹. Pruebe que la bomba debe soltarse cuando la distancia horizontal entre el avión y el barco es de 705 m (considere $g = 10 \text{ m s}^{-2}$).*

EJERCICIO 6.30 (2) *Se deja caer una pelota verticalmente sobre un punto A de un plano inclinado que forma un ángulo de 20° con un plano horizontal. La pelota rebota formando un ángulo de 40° con la vertical. Sabiendo que el próximo rebote tiene lugar en B, calcule:*

- a) *el módulo de la velocidad con la cual rebota la pelota en A,*
- b) *el tiempo transcurrido desde que la pelota rebota en A hasta que la pelota rebota en B.*

Respuesta: $v_A = \sqrt{5g \sec^2 50 / (\tan 20 + \tan 50)}$ $t_B = 10 \sqrt{(\tan 20 + \tan 50) / 5g}$

EJERCICIO 6.31 (1) *Si el alcance máximo horizontal de un proyectil es R, calcular el ángulo α que debe usarse, con la misma rapidez de lanzamiento, para que el proyectil impacte en un blanco situado al mismo nivel de lanzamiento y a una distancia R/2.*

Respuesta.: $\alpha = 15^\circ$

EJERCICIO 6.32 (2) *Una partícula se mueve a lo largo de una parábola $y = x^2$ de tal manera que para todo instante se cumple que $v_x = 3 \text{ m s}^{-1}$. Calcule la velocidad y aceleración de la partícula cuando $x = 2/3 \text{ m}$.*

Respuesta.: $\vec{v} = (3; 4) \text{ m s}^{-1}$ $\vec{a} = (0; 18) \text{ m s}^{-2}$

EJERCICIO 6.33 (1) *Una partícula se mueve en el plano XY de acuerdo a la ley: $a_x = -4 \sin t$; $a_y = 3 \cos t$. Se sabe que cuando $t = 0$, $x = 0$; $y = 3$; $v_x = 4$; $v_y = 0$. Encuentre la expresión cartesiana de la trayectoria y además calcule la velocidad cuando $t = \pi/4$. Expresese sus magnitudes en unidades SI.*

Respuesta: $1 = x^2/16 + (y - 6)^2/9$ $\vec{v} = (2,83; 2,12) \text{ m s}^{-1}$

EJERCICIO 6.34 (1) Una partícula se mueve sobre el plano XY de manera que sus coordenadas están dadas por $x = t$; $y = t^3/6$, siendo t la variable independiente tiempo. Determine para $t = 2$ s la magnitud de la aceleración, las componentes normal y tangencial de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria en dicho instante.

Respuesta: $a = 2 \text{ m s}^{-2}$, $a_N = 0,89 \text{ m s}^{-2}$, $a_T = 1,79 \text{ m s}^{-2}$, $\rho = 5,59 \text{ m}$

EJERCICIO 6.35 (1) Una partícula se mueve describiendo una circunferencia de acuerdo a la ley $s = t^3 + 2t^2$, donde s se mide en metros y t en segundos. Si la magnitud de la aceleración de la partícula es $16\sqrt{2} \text{ m s}^{-2}$ cuando $t = 2$ s, calcule el radio de la circunferencia.

Respuesta: $R = 25 \text{ m}$

EJERCICIO 6.36 (1) Una partícula describe una trayectoria dada por las siguientes ecuaciones paramétricas: $x = t$; $y = t^2/2$. Determinar la curva y el radio de curvatura.

Respuesta: $y = \frac{1}{2}x^2$, $\rho = (1 + t^2)^{\frac{3}{2}}$

EJERCICIO 6.37 (1) Dada la curva: $x = t$; $y = t^2$; calcular:

a) la curvatura K ,

b) el radio de curvatura en el punto $(\sqrt{a}; a)$.

Respuesta: $K = 2/(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}$; $\rho = \frac{1}{2}(1 + 4a)^{\frac{3}{2}}$

(La curvatura K se define como el inverso del radio de curvatura, es decir $K = \frac{1}{\rho}$)

EJERCICIO 6.38 (2) Demuestre que la curvatura de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es:

$$K = \frac{a^4 b}{[a^2(a^2 - x^2) + b^2 x^2]^{\frac{3}{2}}}$$

EJERCICIO 6.39 (1) La aceleración de una partícula es: $\vec{a} = 2e^{-t}\hat{i} + 5\cos t\hat{j}$. En el instante $t = 0$ se encuentra en el punto $P(1; 3)$ siendo su velocidad $\vec{v} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$. Encuentre su posición y velocidad para cualquier instante $t > 0$.

Respuesta: $\vec{r} = (2e^{-t} + 6t - 1)\hat{i} - (5\cos t + 3t - 8)\hat{j}$ $\vec{v} = (6 - 2e^{-t})\hat{i} + (5\sin t - 3)\hat{j}$

EJERCICIO 6.40 (1) Una partícula se mueve sobre una trayectoria tal que su vector de posición en cualquier instante es: $\vec{r} = t\hat{i} + \frac{t^2}{2}\hat{j} + t\hat{k}$. Determine:

- la velocidad
- la rapidez
- la aceleración
- la magnitud de la aceleración tangencial
- la magnitud de la aceleración normal.

Respuesta: $\vec{v} = (1; t; 1)$ $v = \sqrt{2 + t^2}$ $\vec{a} = \hat{j}$ $a_T = \frac{t}{\sqrt{2+t^2}}$ $a_N = \sqrt{\frac{2}{2+t^2}}$

EJERCICIO 6.41 (2) Una partícula se mueve en el plano XY de tal manera que: $a_x = 4pe^{4t}$ y $v_y = 2\pi q \cos 2\pi t$ donde p y q son constantes positivas. Cuando $t = 0$; $x = p/4$; $y = 0$; $v_x = p$. Determinar:

- el vector posición, el vector velocidad y el vector aceleración de la partícula en función del tiempo;
- la trayectoria de la partícula.

Respuesta:

$$\vec{r} = \left(\frac{1}{4}pe^{4t}; q \sin 2\pi t \right); \vec{v} = (pe^{4t}; 2\pi q \cos 2\pi t),$$

$$\vec{a} = (4pe^{4t}; -4\pi^2 q \sin 2\pi t); y = q \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \ln \left(\frac{4x}{p} \right).$$

EJERCICIO 6.42 (2) Una partícula se mueve en el plano XY describiendo la curva $y = \ln x$; calcule:

- la rapidez en función de x y \dot{x} .
- la magnitud de la aceleración en función de x , \dot{x} y \ddot{x} ,

- c) si $\dot{x} = c$, calcule en $x = a$, las magnitudes de la aceleración tangencial y normal.

Respuesta:

$$v = \dot{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \frac{\dot{x}^4}{x^4} - \frac{2\dot{x}^2\ddot{x}}{x^3}},$$

$$a_T = -\frac{c^2}{a^2 \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}} \quad a_N = \frac{c^2}{a^2 \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}}$$

EJERCICIO 6.43 (1) Una partícula se mueve de modo que sus coordenadas cartesianas están dadas como funciones del tiempo por

$$x = 3t$$

$$y = 2t - 5t^2$$

Determine

- Las componentes cartesianas de la velocidad y de la aceleración.
- Las componentes polares de la velocidad y de la aceleración.
- Las componente normal y tangencial de la velocidad y aceleración.
- La ecuación de la trayectoria en coordenadas cartesianas.
- La ecuación de la trayectoria en coordenadas polares.

EJERCICIO 6.44 (2) Una partícula se mueve sobre una elipse de semi ejes a y b centrada en el origen de un sistema de coordenadas con rapidez constante v_0 , siendo la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Determine la magnitud de la aceleración de la partícula en los puntos más alejado y más cercano de la partícula al centro.
- El tiempo que emplea la partícula en recorrer toda la elipse.

- c) La determinación de la ecuación paramétrica de la trayectoria con parámetro tiempo es un problema complicado, pero explique el método a seguir.

EJERCICIO 6.45 (1) La ecuación de una elipse en coordenadas polares puede escribirse como

$$r = \frac{c}{1 - e \cos \theta}$$

siendo c y e constantes. Si el ángulo varía proporcionalmente al tiempo t con constante de proporcionalidad λ , determine las componentes polares de la velocidad y de la aceleración en función del tiempo.

EJERCICIO 6.46 (1) Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio R con aceleración angular constante partiendo del reposo. Si la partícula realiza n vueltas completas a la circunferencia en el primer segundo, determine la aceleración angular de la partícula. Determine además el número de vueltas que realiza la partícula durante el siguiente segundo del movimiento.

EJERCICIO 6.47 (1) Desde lo alto de un edificio, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una rapidez de $12,5 \text{ m s}^{-1}$. La pelota llega a tierra $4,25 \text{ s}$, después. Determine:

- a) La altura que alcanzó la pelota respecto del edificio.
b) La rapidez de la pelota al llegar al suelo.

EJERCICIO 6.48 (1) Se deja caer un cuerpo desde una altura inicial de 33 m , y simultáneamente se lanza hacia abajo otro cuerpo con una rapidez inicial de 1 m s^{-1} . Encontrar el instante en que la distancia entre ellos es de 18 m .

EJERCICIO 6.49 (1) Un cuerpo que cae, recorre en el último segundo $68,3 \text{ m}$. Encontrar la altura desde donde cae.

EJERCICIO 6.50 (1) Desde lo alto de un acantilado, se deja caer una piedra. Desde la misma altura se lanza verticalmente hacia abajo una segunda piedra, 2 s más tarde, con una rapidez de 30 m s^{-1} . Si ambas golpean el piso simultáneamente, encuentre la altura del acantilado.

EJERCICIO 6.51 (1) Desde el piso, se lanza hacia arriba una pelota con una rapidez de 40 m s^{-1} . Calcule el tiempo transcurrido entre los dos instantes en que su velocidad tiene una magnitud de $2,5 \text{ m s}^{-1}$ y la distancia respecto al piso que se encuentra la pelota en ese instante.

EJERCICIO 6.52 (1) Una roca cae libremente recorriendo la segunda mitad de la distancia de caída en 3 s. Encuentre la altura desde la cual se soltó y el tiempo total de caída.

EJERCICIO 6.53 (1) Se dispara un proyectil desde la cima de una colina de 150 m de altura con una rapidez de 180 m s^{-1} y formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcule:

- La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el punto de caída del proyectil.
- La altura máxima del proyectil con respecto al suelo.
- La componente normal y tangencial de la aceleración al salir en el punto de disparo.

EJERCICIO 6.54 (1) Un cañón de artillería lanza proyectiles con una rapidez de 300 m s^{-1} . El artillero debe darle a un blanco que se encuentra a 8640 m detrás de un cerro cuya altura es de 1000 m ubicado a 1200 m del cañón. Demuestre que es posible darle al blanco y determine el ángulo de elevación para cumplir el objetivo.

EJERCICIO 6.55 (1) Se dispara un proyectil de modo que su alcance horizontal es igual al triple de la altura máxima. Encuentre el ángulo de lanzamiento.

EJERCICIO 6.56 (1) Un lanza granadas tiene un alcance máximo de 300 m. Para dar en un blanco que se encuentra a una distancia de 400 m del lanza granada, determine:

- La altura mínima que debe subirse el lanza granada.
- La rapidez de lanzamiento.
- El ángulo de lanzamiento.

EJERCICIO 6.57 (1) *Se dispara a un objeto que se encuentra sobre un plano inclinado en ángulo α . El disparo se hace desde un punto del plano inclinado con rapidez inicial v_0 . Determine la máxima distancia sobre el plano inclinado alcanzable por el disparo y el ángulo de lanzamiento para lograrlo.*

EJERCICIO 6.58 (1) *Un atleta lanza la bala desde una altura h con rapidez inicial v_0 . Determine el máximo alcance horizontal a nivel del suelo y el ángulo de disparo necesario para ese alcance.*

EJERCICIO 6.59 (1) *Un cazador que no sabe que los proyectiles caen, dispara directamente a un mono que está sobre un árbol. El mono que tampoco sabe física, se deja caer justo cuando el cazador dispara. Pruebe que el disparo llega justo al mono.*

EJERCICIO 6.60 (1) *En una feria de diversiones, se dispara al blanco sobre una hilera de blancos que pasan frente al que dispara, a una distancia d con una rapidez u_0 . Los disparos salen con una rapidez v_0 . Determine el ángulo en adelante en que hay que apuntar para dar en el blanco al objeto que pasa justo frente al que dispara.*

EJERCICIO 6.61 (1) *Una piedra se deja caer a un pozo de profundidad desconocida. El ruido del impacto en el fondo se escucha un tiempo T después de soltada la piedra. Si la rapidez del sonido es u_s determine en términos de T , u_s y g , la profundidad del pozo.*

EJERCICIO 6.62 (3) *Una pelota se deja caer desde una altura h y en cada rebote contra el suelo, la rapidez del rebote es un factor “ e ” de la rapidez que tenía justo antes de chocar contra el suelo ($e < 1$). Determine el tiempo que demora la pelota en quedar en reposo y la distancia total recorrida por la pelota.*

EJERCICIO 6.63 (1) *Una persona lanza un objeto con rapidez inicial v_0 formando un ángulo α respecto a la horizontal. Determine la aceleración constante con que debe correr la persona, partiendo del reposo, para justo alcanzar el objeto al mismo nivel de lanzamiento.*

EJERCICIO 6.64 (1) *Un automóvil viaja hacia el norte con una rapidez de 60 km h^{-1} en una carretera recta. Un camión viaja en dirección opuesta con una rapidez de 50 km h^{-1} . (a)¿Cuál es la velocidad del automóvil respecto al camión? (b)¿Cuál es la velocidad del camión respecto al automóvil?*

EJERCICIO 6.65 (1) *Un automovilista viaja hacia el oeste sobre la Ruta Inter estatal a 80 km h^{-1} y es seguido por un auto patrulla que viaja a 95 km h^{-1} . (a) ¿Cuál es la velocidad del automovilista respecto al auto patrulla? (b) ¿Cuál es la velocidad del auto patrulla respecto al automovilista?*

EJERCICIO 6.66 (1) *Un río tiene una rapidez uniforme de $0,5 \text{ m s}^{-1}$. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1 km y regresa al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con una rapidez de $1,2 \text{ m s}^{-1}$ en aguas tranquilas, ¿cuánto dura el recorrido? Compare este resultado con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera tranquila.*

EJERCICIO 6.67 (1) *Dos remeros en idénticas canoas ejercen el mismo esfuerzo remando en un río, uno corriente arriba (y se mueve corriente arriba), mientras que el otro rema directamente corriente abajo. Un observador, en reposo sobre la orilla del río, determina sus rapidezces que resultan ser de V_1 y V_2 respectivamente. Determine en términos de los datos la rapidez de las aguas del río.*

EJERCICIO 6.68 (1) *Un bote cruza un río que mide de ancho D y cuya corriente fluye con una rapidez uniforme de u . El botero mantiene una orientación (es decir, la dirección en la cual apunta el bote) perpendicular al río y al motor fijo para dar una rapidez constante de $v \text{ m s}^{-1}$ con respecto al agua. De acuerdo a los datos ¿Cuál es la velocidad del bote respecto a un observador detenido en la orilla? ¿Hasta dónde estará el bote, medido corriente abajo paralelamente al río, desde la posición inicial hasta cuando alcance la orilla opuesta?*

EJERCICIO 6.69 (1) *Un comprador que está en una tienda puede caminar sobre una escalera mecánica en 30 s cuando está detenida. Cuando la escalera mecánica funciona normalmente, puede llevar al comprador sin caminar al siguiente piso en 20 s . ¿Cuánto tiempo le tomaría al comprador al subir caminando con la escalera mecánica en movimiento? Suponga que el comprador hace el mismo esfuerzo al caminar sobre la escalera mecánica en movimiento o cuando está detenida.*

EJERCICIO 6.70 (1) *Un avión va dirigiéndose hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de 150 km h^{-1} . Si existe un viento de 30 km h^{-1} hacia el norte, calcule la velocidad del avión respecto a la Tierra.*

EJERCICIO 6.71 (1) *El piloto de un avión desea volar hacia el oeste en presencia de un viento que sopla hacia el sur a 50 km h^{-1} . Si la rapidez del avión cuando no sopla el viento es de 200 km h^{-1} , a) ¿ en qué dirección debe dirigirse el avión? b) ¿ cuál debe ser su rapidez respecto a la Tierra?*

EJERCICIO 6.72 *Un automóvil viaja hacia el Este con una rapidez de 50 km h^{-1} . Está lloviendo verticalmente con respecto a la Tierra. Las marcas de la lluvia sobre las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de 60° con la vertical, calcule la velocidad de la lluvia con respecto al automóvil y con respecto a la Tierra.*

EJERCICIO 6.73 (3) *Un niño en peligro de ahogarse en un río está siendo llevado corriente abajo por una corriente que fluye uniformemente con una rapidez de $2,5 \text{ km h}^{-1}$. El niño está a $0,6 \text{ km}$ de la orilla y a $0,8 \text{ km}$ corriente arriba de un embarcadero cuando un bote de rescate se pone en camino.*

- a) *Si el bote procede a su rapidez máxima de 20 km h^{-1} con respecto al agua, ¿cuál es la dirección, relativa a la orilla, que deberá tomar el conductor del bote?*
- b) *¿Cuál es el ángulo que hace la velocidad v del bote con respecto a la orilla?*
- c) *¿Cuánto tiempo le tomará al bote para alcanzar al niño?*

EJERCICIO 6.74 (1) *Desde el techo del carro de un tren que está acelerando hacia el norte a una razón de $2,5 \text{ ms}^{-2}$ se suelta y cae un perno. ¿Cuál es la aceleración del perno con respecto a: (a) el carro del tren? (b) la estación de tren estacionaria?*

EJERCICIO 6.75 (1) *Un estudiante de la Facultad de Ingeniería está parado sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal recta a una rapidez constante de $V \text{ m s}^{-1}$. El estudiante lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria que inicialmente forma un ángulo de α con la horizontal y está en línea con la vía. El profesor del estudiante, que está parado cerca sobre la tierra, observa que la pelota sale verticalmente. ¿Qué altura subirá la pelota?*

Dinámica de la partícula

El propósito de la dinámica es predecir el comportamiento futuro de un sistema, en particular de una partícula cuando son conocidas las fuerzas y las restricciones que actúan sobre ella y se conoce el presente. Este conocimiento se da en la forma llamada "condición inicial". Para una partícula este se expresa en suponer conocidas la posición y velocidad inicial de ella, $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$. Como veremos este propósito es logrado mediante la llamada Mecánica Clásica, salvo excepcionalmente para sistemas que tienen comportamiento caótico y que están fuera del alcance de este curso.

7.1. Leyes de Newton

Desde los tiempos de Galileo se ha reconocido que no es necesario aplicar fuerzas para mantener el movimiento de los cuerpos. Esto evidentemente choca con lo observado diariamente puesto que si se dejan de aplicar fuerzas, los cuerpos se detienen. El problema está en que en realidad no se han dejado de aplicar todas las fuerzas. Normalmente existen fuerzas, llamadas de roce que están presentes y cuya tendencia es frenar los cuerpos. Es difícil eliminarlas, pero si se logra, entonces el movimiento se mantiene. Sin embargo hay otros detalles.

7.1.1. Primera ley de Newton

La primera ley de Newton suele enunciarse así. Si un cuerpo no está sometido a fuerzas, se mueve con velocidad constante o permanece en reposo.

El detalle es que así enunciada, no puede estar correcta. Si ello es cierto en algún sistema de referencia, inmediatamente deja de ser cierto si el observador está en un sistema acelerado respecto al primero, ver figura. Por ello, para mantenerla, se han definido sistemas de referencia especiales donde ella es cierta.

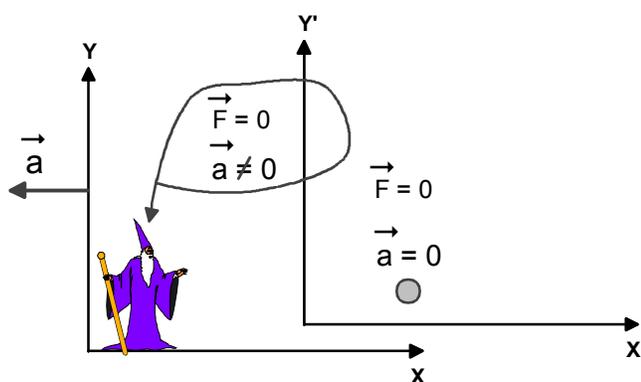


Figura 7.1:

7.1.2. Sistema inercial de referencia

En la formulación de la dinámica clásica, se supone la existencia de al menos un sistema privilegiado de referencia, un *Sistema inercial de referencia*. Por definición, un *sistema inercial de referencia* es aquel (hipotético) sistema relativo al cual una partícula libre, es decir no sometida a fuerza, tiene velocidad constante o en particular nula. Como consecuencia de la transformación de Galileo, todo sistema que se traslade con velocidad constante respecto a uno inercial de referencia, es también sistema inercial de referencia. La existencia de uno por lo menos, sería materia de validación experimental, con las obvias dificultades que ello presenta. Se acepta que al menos aproximadamente, el marco de las estrellas fijas, lo es. Esta es una materia hoy en día de acuerdo internacional. En efecto en Agosto de 1997, la Unión Astronómica Internacional (IAU) decidió que a partir del primero de Enero de 1998, el

IAU sistema de referencia celestial sea el sistema (ICRS), en reemplazo del sistema FK5. Hay abundantes referencias sobre este tema en la WEB, por ejemplo <http://rorf.usno.navy.mil/ICRF/>

Esta definición reemplaza la primera ley de Newton, puesto que su validez: "la aceleración respecto a un sistema es nula cuando la fuerza es nula", define lo que se denomina un sistema inercial de referencia.

7.1.3. Segunda ley de Newton

En un sistema inercial de referencia las fuerzas son las causas de las aceleraciones en la forma que estableció Newton. Respecto a un sistema inercial de referencia se tiene para una partícula de masa m

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (7.1)$$

o bien

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (7.2)$$

siendo \vec{a} la aceleración, \vec{F} la fuerza resultante que actúa sobre la partícula, la cual se expresa en Newtons [N] y m la masa inercial de la partícula. La masa inercial es entonces alguna propiedad que distingue las partículas en cuanto a la dificultad que manifiestan ellas a ser aceleradas. Es necesario aclarar que conceptualmente existe otra propiedad que distingue a las partículas, consecuencia de su masa gravitacional m_g , esto es, la masa gravitacional da cuenta de la magnitud con que se atraen dos partículas por efecto de la fuerza gravitacional. De acuerdo a la ley de gravitación universal de Newton

$$F = G \frac{m_{1g} m_{2g}}{d^2}, \quad (7.3)$$

siendo aquí m_{1g} y m_{2g} las masas gravitacionales de las partículas.

7.1.4. Principio de equivalencia

De acuerdo a los experimentos de Galileo, todos los cuerpos en la vecindad de la tierra, despreciando el roce del aire, caen con la misma aceleración de magnitud

$$g = 9,8 \text{ m s}^{-2}. \quad (7.4)$$

Si se utiliza la segunda ley de Newton donde la fuerza es la fuerza gravitacional resulta

$$m_1 g = G \frac{m_1 m_{Tg}}{R^2},$$

es decir la masa inercial m_1 es proporcional a la masa gravitacional $m_1 g$. En la última expresión R es el radio terrestre y m_{Tg} es la masa gravitacional terrestre. Si las unidades se eligen adecuadamente (iguales), entonces tenemos el principio de equivalencia

$$m = m_g.$$

7.1.5. Sobre las fuerzas

Las fuerzas, las que permiten acelerar los cuerpos, en general pueden clasificarse en dos tipos, fuerzas de acción a distancia y fuerzas de contacto.

Fuerzas de acción a distancia

Son ejercidas por los cuerpos a distancia. Son en general conocidas como campos de fuerza y de ellas son bien conocidas la fuerza gravitacional, la fuerza electrostática, la fuerza magnética y otras. En estos apuntes la más importante de ellas será la fuerza gravitacional que ejerce la tierra sobre los objetos cerca de su superficie, dirigida verticalmente hacia abajo y de magnitud

$$F = G \frac{m_1 m_T}{R^2} = m_1 g,$$

donde

$$g = G \frac{m_T}{R^2}, \quad (7.5)$$

es la aceleración de gravedad.

Fuerzas de contacto

Son ejercidas recíprocamente cuando dos cuerpos se tocan. Si se descompone la fuerza de contacto en su parte paralela y en su parte normal a la superficie en contacto, esas componentes se denominan fuerza de roce f y fuerza normal N . También existen fuerzas que actúan sobre un cuerpo cuando éste se mueve en el interior de un fluido (líquidos o gases). Estas fuerzas se denominan fuerzas de roce viscosas y son funciones complicadas de la rapidez del cuerpo, de la forma del cuerpo y de propiedades de la superficie del cuerpo y del fluido.

La fuerza de roce estática

Cuando no hay movimiento relativo entre dos cuerpos que están en contacto, la fuerza de roce se denomina fuerza de roce estática. Considere un bloque en reposo sobre una superficie horizontal que es tirado por una fuerza horizontal F como se indica en la figura

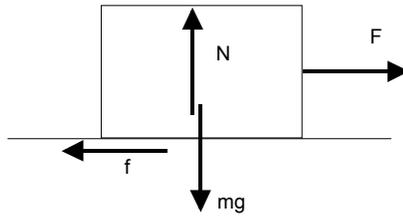


Figura 7.2: Fuerza de roce.

Como el cuerpo tiene aceleración nula entonces

$$\begin{aligned} F - f &= 0, \\ N - mg &= 0, \end{aligned}$$

es decir la fuerza de roce es igual a la fuerza aplicada F . Si se aumenta F aumenta la fuerza de roce de la misma manera. Pero eso tiene un límite. La fuerza de roce no puede crecer indefinidamente. Este límite tiene que ver con propiedades de las superficies en contacto y con el grado en que las superficies están apretadas entre sí. El modelo que utilizaremos es

$$f^{\text{máx}} = \mu_s N, \quad (7.6)$$

donde μ_s se denomina coeficiente de roce estático entre las superficies.

Fuerza de roce cinética

Si la fuerza aplicada supera al máximo valor de la fuerza de roce o si el cuerpo está en movimiento relativo, la fuerza de roce, llamada ahora fuerza de roce cinética, está dada por

$$f = \mu_k N, \quad (7.7)$$

donde μ_k se denomina coeficiente de roce cinético. Normalmente $\mu_k < \mu_s$ que pone de manifiesto que cuesta menos mantener el movimiento que iniciarlo.

7.1.6. Tercera ley de Newton

La tercera ley de Newton, suele enunciarse así: si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, entonces el segundo hace una fuerza de igual de magnitud y de sentido contrario sobre el primero y ambas fuerzas están sobre la misma línea de acción.

Esta ley se supone válida para fuerzas de contacto y para fuerzas de acción a distancia. Sin embargo, en el segundo caso, hay problemas. Difícilmente pueden las fuerzas de acción y reacción ajustarse en forma instantánea a nuevas posiciones de los cuerpos porque la información de uno al otro no puede propagarse con velocidad infinita. Eso sin embargo, es tema de otro curso.

7.1.7. Definiciones

Daremos de inmediato definiciones de otras propiedades físicas de los cuerpos que tienen que ver con su masa y con su velocidad. La utilidad de estas definiciones descansa en que hay relaciones o teoremas que las involucran y que pueden en consecuencia escribirse de manera más simplificada

		concepto	unidad
m	masa partícula.	kg
\vec{r}	vector posición partícula.	m
\vec{v}	= $d\vec{r}/dt$..	velocidad partícula.	m s^{-1}
\vec{a}_i	= $d\vec{v}_i/dt$	aceleración partícula.	m s^{-2}
\vec{F}	fuerza resultante actuando sobre la partícula.	N
\vec{p}	= $m\vec{v}$	Momentum lineal de la partícula.	kg m s^{-1}
K	= $\frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética de la partícula.	J
\vec{L}_0	= $m\vec{r} \times \vec{v}$	Momentum angular de la partícula respecto a O .	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$
$\vec{\Gamma}_O$	= $\vec{r} \times \vec{F}$	Torque resultante respecto a O .	N m
V	Energía potencial.	J
E	= $K + V$	Energía mecánica.	J
$W_{i \rightarrow f}$	= $\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Trabajo realizad por \vec{F} desde i a f .	J

7.2. Teoremas

Pueden entonces demostrarse los siguientes teoremas que involucran las definiciones anteriores:

► **TEOREMA 7.1**

Variación del momentum lineal:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (7.8)$$

DEMOSTRACION 3 *Este teorema sigue inmediatamente de la segunda Ley de Newton que puede escribirse*

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (7.9)$$

si la masa es constante.

► **TEOREMA 7.2**

Variación del momentum angular

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O. \quad (7.10)$$

DEMOSTRACION 4 *Si la segunda ley de Newton es multiplicada vectorialmente por $\vec{r} \times$ resulta*

$$m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (7.11)$$

pero el lado izquierdo puede modificarse a

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (7.12)$$

si la masa es constante, esto es

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O. \quad (7.13)$$

► **TEOREMA 7.3**

Teorema de conservación del momentum lineal. Si $F_x = 0$ entonces

$$p_x = \text{constante.}$$

y similarmente para otras componentes.

DEMOSTRACION 5 *Este teorema sigue directamente de*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

que si es proyectada en una dirección fija, OX por ejemplo da

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x,$$

luego si $F_x = 0$ se tiene

$$p_x = \text{constante.}$$

► TEOREMA 7.4

Teorema de conservación del momentum angular. Si $\vec{\Gamma}_O = \vec{0}$ entonces

$$\vec{l}_O = \text{constante.}$$

DEMOSTRACION 6 *Este teorema sigue directamente de*

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O$$

de manera que si $\vec{\Gamma}_O = \vec{0}$ entonces se tiene que

$$\vec{l}_O = \text{constante.}$$

► TEOREMA 7.5

Teorema de conservación de una componente del momentum angular. Si $\Gamma_{O_x} = 0$, entonces

$$l_{O_x} = \text{constante,}$$

y similarmente para otras componentes.

DEMOSTRACION 7 *Este teorema sigue directamente de*

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O,$$

que si es proyectada en una dirección fija, digamos OX da

$$\frac{dl_{O_x}}{dt} = \Gamma_{O_x},$$

de manera que si $\Gamma_{O_x} = 0$ se obtiene

$$l_{O_x} = \text{constante.}$$

► TEOREMA 7.6

Teorema energía cinética–trabajo

$$K_f - K_i = W_{i \rightarrow f}.$$

DEMOSTRACION 8 De la segunda ley de Newton podemos escribir

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

de donde sigue multiplicando por un vector desplazamiento infinitésimo

$$d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz,$$

obteniendo

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

y el lado izquierdo puede modificarse a

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right),$$

de manera que tenemos un teorema

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= \vec{F} \cdot d\vec{r}, \\ dK &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = dW, \end{aligned}$$

y finalmente hemos obtenido el teorema energía cinética trabajo

$$K_f - K_i = W_{i \rightarrow f}, \quad (7.14)$$

donde

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7.15)$$

7.3. Paréntesis matemático. Derivadas y diferenciales

De una variable independiente

Los pasos de la sección anterior requieren de considerar la derivada como un cociente y ello merece una explicación. La derivada de una función $f(x)$

de una variable independiente es la pendiente de la curva $y = f(x)$. En la figura que sigue se ha definido el llamado diferencial de la función

$$dy = df(x),$$

como el cateto del triángulo dibujado, cuya hipotenusa es tangente a la curva. Entonces la derivada es

$$f'(x) = \frac{dy}{\Delta x},$$

o

$$dy = f'(x)\Delta x$$

En particular para la función lineal $y = f(x) = x$ resultará

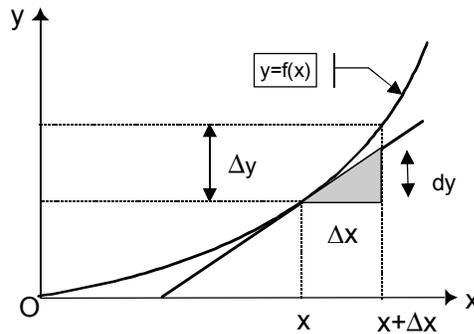


Figura 7.3:

$$1 = \frac{dx}{\Delta x},$$

o sea

$$\begin{aligned} dx &= \Delta x, \\ dy &= f'(x)dx, \\ \frac{dy}{dx} &= f'(x), \end{aligned}$$

lo que significa que la derivada es el cociente entre dos cantidades finitas dy y dx , que son llamadas diferenciales de y , x . Note que las diferenciales no son necesariamente cantidades pequeñas. También puede notarse que en general $dy \neq \Delta y$ como se ilustra en la figura.

De más variables independientes

Para dos variables independientes considere una función $f(x, y)$. Similarmente se define su diferencial por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y,$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son las llamadas derivadas parciales de la función, respecto a x e y respectivamente y donde de nuevo para las variables independientes $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ de manera que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

y similarmente para funciones de más variables. Aquí, una expresión de la forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

no es necesariamente la diferencial de alguna función. Para este efecto existe un teorema

► TEOREMA 7.7

La forma $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ es la diferencial de alguna función de x, y si y solo si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{difer})$$

DEMOSTRACION 9 *Deberá ser*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

o bien como las variables son independientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= P(x, y), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= Q(x, y), \end{aligned}$$

pero para funciones bien comportadas

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y},$$

y de allí sigue el teorema.

EJEMPLO 7.3.1 Determine una función F cuya diferencial sea

$$dF = y^2 dx + 2xy dy.$$

Primero identifiquemos

$$\begin{aligned} P &= y^2, \\ Q &= 2xy, \end{aligned}$$

y calculemos sus derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2y, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 2y, \end{aligned}$$

que resultan iguales. Entonces tenemos derecho a escribir

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

y luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y^2, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2xy. \end{aligned}$$

Integrando la primera respecto a x resulta

$$F = y^2 x + C(y)$$

donde C es una función arbitraria de y . Reemplazando en la segunda

$$2yx + C'(y) = 2xy$$

o sea $C'(y) = 0$ o sea $C(y) = C$ es constante y finalmente

$$F = y^2 x + C.$$

7.4. Fuerzas conservativas (C) y no conservativas (NC)

El trabajo realizado por una fuerza \vec{F} escrita en componentes cartesianas

$$\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z, \quad (7.16)$$

es

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (7.17)$$

y como el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ es

$$d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz,$$

resulta

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (7.18)$$

Este trabajo será independiente del camino si el integrando es la diferencial de alguna función, es decir si

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dV.$$

El signo menos es convencional. La existencia de esa función V llamada energía potencial define a lo que se denomina una fuerza conservativa. Para estas fuerzas se tiene que

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

y su trabajo será en este caso

$$W_{i \rightarrow f}^C = \int_i^f (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -(V_f - V_i). \quad (7.20)$$

que es obviamente independiente del camino.

7.4.1. Energías potenciales

Para algunas fuerzas conservativas importantes, se listan a continuación sus energías potenciales.

Fuerza peso

Para la fuerza constante peso, si el eje OY es vertical hacia arriba, ella puede escribirse

$$\vec{F} = -mg\hat{j}$$

y la energía potencial asociada al peso es

$$V = mgy. \quad (7.21)$$

Fuerza elástica

Para la fuerza elástica

$$\vec{F} = -kx\hat{i}, \quad (7.22)$$

la energía potencial resulta ser

$$V = \frac{1}{2}kx^2. \quad (7.23)$$

Fuerza gravitacional

Para la fuerza gravitacional

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}, \quad (7.24)$$

sus componentes son

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}x, \\ F_y &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}y, \\ F_z &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3}z, \end{aligned}$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Pero es simple establecer que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} &= -\frac{x}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} &= -\frac{y}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} &= -\frac{z}{r^3},\end{aligned}$$

luego las componentes de la fuerza gravitacional pueden escribirse

$$\begin{aligned}F_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{Gm_1m_2}{r} \right), \\ F_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{Gm_1m_2}{r} \right), \\ F_z &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{Gm_1m_2}{r} \right)\end{aligned}$$

de donde identificamos la energía potencial

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (7.25)$$

Fuerza electrostática

Para la fuerza electrostática

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \hat{r}, \quad (7.26)$$

la energía potencial resulta ser

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r}, \quad (7.27)$$

con explicación similar dada para la fuerza gravitacional.

NOTA 7.1 Para el lector que domine matemáticas más avanzadas. Hemos buscado energía potenciales mediante un método que podríamos llamar de simple inspección. Sin embargo existe un método más general. La fuerza es conservativa si $\nabla \times \vec{F} = 0$. Luego, si ese es el caso, se tiene que

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(V(\vec{r}) - V(\vec{r}_1)),$$

para cualquier camino de $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}$. Como la fuerza es conocida esa integral puede hacerse y se obtiene

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_1) - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Si \vec{r}_1 se elige adecuadamente como punto de referencia puede tomarse $V(\vec{r}_1) = 0$.

7.4.2. Teoremas sobre la energía

Por su importancia se agrupan aquí los teoremas relativos a la energía y al trabajo.

► **TEOREMA 7.8**

Teorema energía–trabajo. Si $E = K + V$ representa la energía mecánica de la partícula entonces

$$E_f - E_i = W_{i \rightarrow f}^{NC}. \quad (7.28)$$

DEMOSTRACION 10 *Se ha demostrado que*

$$K_f - K_i = W_{i \rightarrow f},$$

si la fuerza se separa en sus posibles partes conservativas y no conservativas entonces

$$W_{i \rightarrow f} = W_{i \rightarrow f}^C + W_{i \rightarrow f}^{NC} = -(V_f - V_i) + W_{i \rightarrow f}^{NC},$$

luego se obtiene

$$\begin{aligned} K_f - K_i &= -(V_f - V_i) + W_{i \rightarrow f}^{NC}, \\ K_f + V_f - (K_i + V_i) &= W_{i \rightarrow f}^{NC}, \end{aligned}$$

que prueba el teorema.

► **TEOREMA 7.9**

Teorema de conservación de la energía cinética. Si $W_{i \rightarrow f} = 0$ entonces

$$K_i = K_f.$$

DEMOSTRACION 11 *Este teorema sigue directamente de*

$$K_f - K_i = W_{i \rightarrow f}, \quad (7.29)$$

haciendo $W_{i \rightarrow f} = 0$

► TEOREMA 7.10

Teorema de conservación de la energía mecánica. Si $W_{i \rightarrow f}^{NC} = 0$ entonces

$$E_i = E_f.$$

DEMOSTRACION 12 *Este teorema sigue directamente de*

$$E_f - E_i = W_{i \rightarrow f}^{NC}, \quad (7.30)$$

haciendo $W_{i \rightarrow f}^{NC} = 0$

7.5. Sobre la energía

En general, el hombre desea poner en movimiento las cosas, para satisfacer diferentes necesidades. En otras palabras se desea que los cuerpos adquieran energía cinética. De acuerdo a lo explicado, una forma de lograrlo es mediante una fuerza que realice algún trabajo. Pero obtener una fuerza que realice trabajo no es tan simple. Por ejemplo para mover un automóvil, un tren, un avión o simplemente mover un motor, de donde sacar la fuerza que lo haga. De acuerdo al teorema de conservación de energía, que se supone válido en esta discusión, si un cuerpo gana energía, entonces otro la pierde. Afortunadamente existen en la Tierra muchas fuentes de energía. Estas en general son sistemas que tienen energía potencial acumulada. Por ejemplo una cantidad de agua a cierta altura tiene energía potencial acumulada. Los núcleos de los átomos tienen energía eléctrica almacenada. Los combustibles fósiles tienen energía potencial acumulada, de naturaleza química. Otra pregunta surge. ¿Quién realizó el trabajo necesario para acumular esas cantidades de energía? Casi sin excepción la respuesta es: nuestro Sol. La enorme energía liberada por el Sol y parcialmente recibida en la Tierra, causa a lo largo del tiempo esas acumulaciones de energía potencial. Los árboles crecen, se transforman eventualmente en Carbón que posee una enorme cantidad de energía acumulada. O, los mares se evaporan, llueve sobre la cordillera y allí tenemos una enorme cantidad de energía potencial acumulada. Hay una enorme

cantidad de otros ejemplos: la energía del viento, la energía de las mareas del mar, la energía de las tempestades, etcétera.

Mención aparte recibe la energía acumulada en los núcleos atómicos. Fue necesario vencer la enorme repulsión eléctrica de los protones para formar los núcleos de los átomos, que al formarse, tienen una enorme cantidad de energía acumulada. Al final, la fuerza responsable de que eso haya ocurrido largo tiempo atrás en alguna estrella, es la enorme fuerza gravitacional presente en los núcleos de las estrellas como consecuencia de su enorme masa. Sin embargo para que esa energía quede acumulada, se requiere de algo que mantenga al núcleo unido. La fuerza responsable de que ello ocurra es la fuerza nuclear.

Utilizar esas energías acumuladas ha sido posible gracias al gran desarrollo de la tecnología.

El desafío actual consiste en tratar de utilizar la mayor de las fuerzas conocidas por el hombre para estos fines: la fuerza nuclear. La fuerza nuclear es la responsable de la estabilidad de los núcleos atómicos, es siempre atractiva, de enorme magnitud y de muy corto alcance y se manifiesta entre los componentes del núcleo atómico, protones y neutrones.

De manera que para que ella se manifieste y realice algún trabajo, se hace necesario acercar protones a muy corta distancia, tarea muy difícil porque ellos se repelen y muy intensamente cuando se tratan de acercar. Los intentos de realizar este proceso en la Tierra en forma controlada han avanzado, pero no hay certeza de cuando se logrará. Este proceso, llamado de fusión nuclear, es logrado en los centros de las estrellas y el agente responsable es la enorme presión que ejerce la masa de la estrella sobre su centro producto de la fuerza gravitacional.

7.5.1. La energía cinética de los asteroides

Hace aproximadamente 65 millones de años atrás un asteroide de alrededor de $R = 20$ km de radio y una velocidad del orden $v = 20$ km s⁻¹ impactó la Tierra y causó el fin de la mayor parte de la vida en la Tierra. Si suponemos una densidad del orden de $\rho = 5000$ kg m⁻³ (5 veces la del agua) su energía cinética sería

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) v^2 = 8.38 \times 10^{24} \text{ J},$$

y como 1 megaton = $4,2 \times 10^{15}$ J esa energía equivale aproximadamente a

$$K = 2 \times 10^9 \text{ megatonnes,}$$

quizás la explosión de todo el arsenal nuclear actual. La bomba atómica de Hiroshima fue del orden $\frac{1}{60}$ megaton. Vea más detalles sobre las consecuencias del impacto en <http://www.eas.purdue.edu/eas109/Day%20the%20Dinosaurs%20Died.htm>

7.5.2. Integración de la ecuación de movimiento

El propósito de la dinámica es: dadas las condiciones iniciales de un sistema y las fuerzas, determinar mediante la segunda ley de Newton la posición y velocidad futura del sistema. La segunda ley de Newton, también llamada ecuación de movimiento, determina la aceleración del sistema $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$. Luego hay un problema matemático. Conocida la fuerza resultante deberemos integrar la ecuación de movimiento y obtener la velocidad $\vec{v}(t)$ y posición $\vec{r}(t)$ si se conocen las condiciones iniciales del movimiento, es decir la velocidad y posición iniciales $\vec{v}(0)$ y $\vec{r}(0)$. Como veremos dependiendo de las fuerzas actuando, la integración de la ecuación de movimiento es más o menos simple.

Para el caso de la dinámica de *un* cuerpo la fuerza podría depender del tiempo, de su posición y de su velocidad, es decir la ecuación que resulta es

$$m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}), \quad (7.31)$$

que en general no puede integrarse directamente porque el lado derecho, la fuerza, depende precisamente de la incógnita $\vec{r}(t)$ y de su derivada $\vec{v}(t)$. En el apéndice se profundiza más sobre diversos casos integrable y aquí nos limitamos a los principales. En el capítulo de sistemas de partículas se explican las dificultades adicionales que se presentan en el caso de la dinámica de varios cuerpos.

Como posiblemente los alumnos de este curso aún no dominan el tema de las integrales y menos el de las ecuaciones diferenciales, deje para más adelante la comprensión de todos los pasos intermedios, pero analice los resultados y sus aplicaciones.

Fuerza constante

De la segunda ley

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

es inmediato obtener por dos integraciones sucesivas

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \frac{\vec{F}}{m}t, \quad (7.32)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{F}}{2m}t^2.$$

Estos resultados coinciden con lo establecido en la sección de cinemática para el caso en que la aceleración es constante.

Fuerza dependiente del tiempo $\vec{F}(t)$

Aquí se puede dejar expresado

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \frac{1}{m} \int_0^t \vec{F}(t') dt', \quad (7.33)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{m} \int_0^t dt'' \int_0^{t''} \vec{F}(t') dt',$$

donde las integrales se podrán hacer cuando la fuerza sea dada en forma explícita.

Fuerza dependiente de la posición

En movimiento unidimensional. Si $\vec{F} = F(x)\hat{i}$ tenemos que

$$m\ddot{x} = F(x), \quad (7.34)$$

pero existe la identidad

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \dot{x}^2,$$

de modo que se tiene una ecuación diferencial

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \dot{x}^2 = \frac{1}{m} F(x),$$

de donde

$$\dot{x}^2(t) - \dot{x}^2(0) = \frac{2}{m} \int_{x(0)}^{x(t)} F(x) dx,$$

o bien

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m} \int_{x(0)}^{x(t)} F(x) dx} = \frac{dx}{dt}, \quad (7.35)$$

y podemos finalmente separar variables en la forma

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m} \int_{x(0)}^{x(t)} F(x) dx}},$$

e integrar por segunda vez

$$t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) + \frac{2}{m} \int_{x(0)}^x F(x) dx}}. \quad (7.36)$$

El problema estaría resuelto si dada $F(x)$, la integral la realizamos y es posible de allí despejar $x(t)$. Tarea no necesariamente simple.

Lo anterior puede simplificarse o calcularse para casos específicos de fuerzas.

Por ejemplo la fuerza elástica

$$F(x) = -kx,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} t &= \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{2}{m} \int_{x(0)}^x kx dx}} \\ &= \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{k}{m}(x^2 - x^2(0))}}. \end{aligned}$$

Sin perder demasiado podemos suponer que $x(0) = 0$ de modo que

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dot{x}^2(0) - \frac{k}{m}x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{m}{k}\dot{x}^2(0) - x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0)} \end{aligned}$$

de modo que finalmente

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0) \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t. \quad (7.37)$$

Más detalles serán dados al estudiar más adelante el llamado movimiento armónico simple.

Para el último caso particular, existe un método alternativo más fácil. En efecto de

$$m\ddot{x} = -kx,$$

y si se define

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

tenemos que

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

y usted puede fácilmente comprobar que una solución general es de la forma

$$x(t) = C \cos(\omega t + \phi).$$

La evaluación de las constantes C y ϕ según sean las condiciones iniciales $x(0)$, $\dot{x}(0)$, se hará más adelante al estudiar el movimiento armónico simple.

Movimiento unidimensional con fuerza viscosa

Consideraremos el efecto que produce la presencia de una fuerza contraria y proporcional a la velocidad de la forma

$$F_x = -\beta m\dot{x}.$$

Este tipo de fuerza se manifiesta cuando un cuerpo se mueve en el interior de un fluido, líquido o gas.

La ecuación de movimiento será

$$m\ddot{x} = -\beta m\dot{x}, \quad (7.38)$$

o bien si llamamos $v = \dot{x}$

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v,$$

de donde es trivial separar variables

$$\frac{dv}{v} = -\beta dt,$$

y se puede integrar

$$\begin{aligned} \ln \frac{v(t)}{v(0)} &= -\beta t, \\ v(t) &= v(0)e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

que puede integrarse por segunda vez

$$x(t) = x(0) + \frac{v(0)}{\beta}(1 - e^{-\beta t}). \quad (7.39)$$

Note que la velocidad tiende a cero y la posición alcanza un máximo

$$x_{\text{máx}} = x(0) + \frac{v(0)}{\beta}.$$

7.5.3. Dinámica del movimiento circular

Para el movimiento circular es conveniente expresar las ecuaciones de movimiento en coordenadas polares con origen en el centro de la circunferencia, de modo que se tiene en componentes polares

$$F_r = -m\frac{v^2}{R}, \quad (7.40)$$

$$F_\theta = mR\ddot{\theta}. \quad (7.41)$$

Existen diversas posibilidades para el tipo de movimiento circular, dependiendo de las fuerzas que actúen, cuestión que se plantea en los ejercicios. Si la fuerza es puramente radial, $F_\theta = 0$, de lo cual se deduce que el movimiento es circular uniforme, es decir $\dot{\theta}$ es constante.

7.6. Movimiento armónico simple

El movimiento de un cuerpo sometido a la acción de una fuerza elástica da lugar a un movimiento conocido como movimiento armónico simple. Esta fuerza se manifiesta cuando un cuerpo oscila unido a un resorte ideal. Un resorte ideal tiene dos características, su longitud natural l_0 que es su longitud sin estar sometido a fuerzas y su constante elástica k . La deformación del resorte es proporcional a la fuerza aplicada según

$$F = k(l - l_0), \quad (7.42)$$

donde l es la longitud del resorte deformado, como se indica en la figura

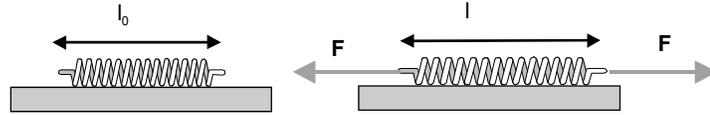


Figura 7.4:

Si una partícula de masa M se mueve en una dimensión, digamos el eje OX sometido a una única fuerza restauradora elástica de la forma, conviene medir la coordenada de posición x a partir de la longitud natural del resorte de manera que

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\hat{i} = -kx\hat{i}, \quad (7.43)$$

entonces la segunda ley de Newton nos da

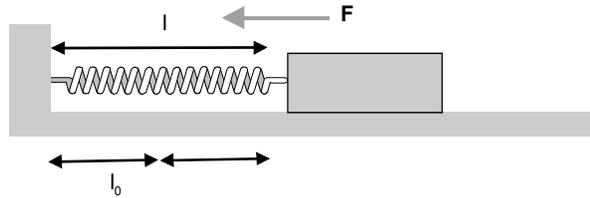


Figura 7.5:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -kx, \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0, \end{aligned} \quad (7.44)$$

donde se ha definido

$$\omega^2 = \frac{k}{M}. \quad (7.45)$$

La coordenada x satisface la célebre ecuación del movimiento armónico simple (MAS) cuya solución puede escribirse en términos de dos constantes A y ϕ como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi). \quad (7.46)$$

La constante A se conoce como la amplitud del movimiento y ϕ se conoce como la fase inicial.

7.6.1. Evaluación de las constantes

Si las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= v_0, \end{aligned}$$

entonces al imponer dichas condiciones en (7.46) y su primera derivada resulta

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \phi, \\ v_0 &= -A\omega \sin \phi, \end{aligned} \quad (7.47)$$

de donde

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad (7.48)$$

$$\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \quad (7.49)$$

7.6.2. Energía

La fuerza elástica restauradora es

$$\vec{F} = -kx\hat{i},$$

y su única componente puede escribirse

$$F_x = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right),$$

de modo que la energía potencial elástica será

$$V = \frac{1}{2}kx^2. \quad (7.50)$$

Si no hay otras fuerzas actuando o ellas no realizan trabajo entonces la energía total E se conserva, esto es

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}. \quad (7.51)$$

7.6.3. Amplitud del movimiento

La constante A se conoce como la amplitud del movimiento. Se caracteriza que cuando x tiene ese valor, entonces la partícula se detiene e invierte su movimiento. Si usamos la conservación de la energía podemos relacionar la posición con la velocidad en la forma

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (7.52)$$

Esta última relación entre velocidad y posición puede escribirse con $v = \dot{x}$

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2, \quad (7.53)$$

$$\left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1, \quad (7.54)$$

que es la ecuación de una elipse sobre la cual se destacan las velocidades

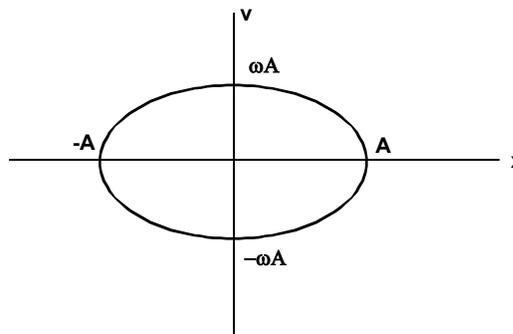


Figura 7.6:

máximas $v = \pm\omega A$ y desplazamientos máximos $x = \pm A$.

7.6.4. Periodo y frecuencia

Evidentemente la función

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$

es periódica con periodo T dado por

$$\omega T = 2\pi, \quad (7.55)$$

de modo que el periodo del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}, \quad (7.56)$$

y la frecuencia, es el recíproco del periodo, es decir

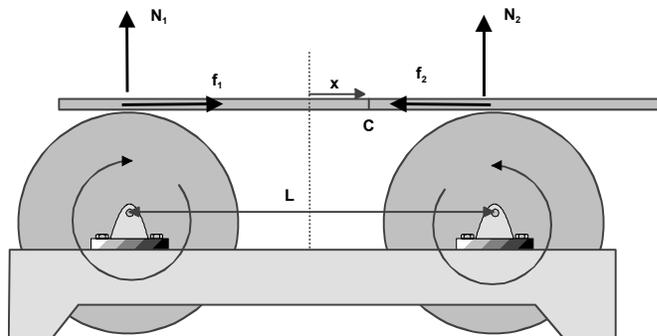
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}. \quad (7.57)$$

La frecuencia angular será

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{M}}. \quad (7.58)$$

Como veremos en el ejemplo que sigue, movimientos armónico simples pueden darse en variadas situaciones, aún sin resortes.

EJEMPLO 7.6.1 *Considere una barra de masa M que se apoya en dos cilindros que giran en sentido contrario como se indica en la figura. El coeficiente de roce cinético entre la barra y los cilindros es μ y la distancia entre los centros es L . Demuestre que el movimiento horizontal de la barra es un movimiento armónico simple y determine su frecuencia angular.*



Solución. Si el centro C de la barra se desplaza x hacia la derecha, las reacciones normales se hacen distintas de acuerdo a

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= Mg, \\ N_1\left(\frac{L}{2} + x\right) &= N_2\left(\frac{L}{2} - x\right), \end{aligned}$$

de donde se obtienen ellas

$$N_2 = \frac{1}{2}Mg\frac{L+2x}{L}, \quad N_1 = \frac{1}{2}Mg\frac{L-2x}{L}.$$

La fuerza resultante horizontal será

$$F_x = f_1 - f_2 = \mu(N_1 - N_2) = -\frac{2\mu Mg}{L}x,$$

que es del tipo de una fuerza elástica con

$$k = \frac{2\mu Mg}{L},$$

y la frecuencia angular será

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{2\mu g}{L}}.$$

7.7. Movimiento armónico amortiguado

En nuestro mundo siempre existe roce de manera que el tratamiento del movimiento armónico simple no refleja exactamente lo que ocurre. Por ejemplo si el movimiento se realiza en presencia de aire y suponemos que además de la fuerza elástica actúa una fuerza de roce viscosa contraria a la velocidad de la forma

$$\vec{f} = -2\beta\dot{x}\hat{i}, \quad (7.59)$$

con β alguna constante, la ecuación de movimiento será

$$M\ddot{x} = -kx - 2\beta\dot{x},$$

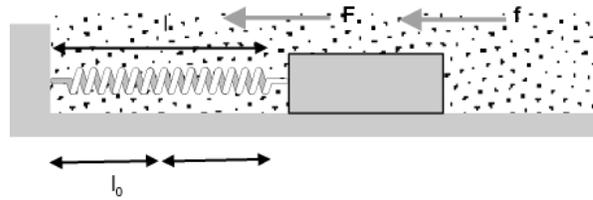


Figura 7.7:

o bien

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = 0. \quad (7.60)$$

Ahora llamaremos

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M},$$

de modo que la ecuación para el movimiento amortiguado es

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.61)$$

La solución de esta ecuación se obtiene suponiendo una solución exponencial de la forma

$$x(t) = Ae^{pt},$$

que al ser sustituida conduce a

$$p^2 + \frac{2\beta}{M}p + \omega_0^2 = 0$$

es decir, hay a lo más dos valores de p para los cuales hay una solución. Estos valores son

$$p = -\frac{\beta}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2\right)}$$

La naturaleza de las soluciones depende crucialmente del signo de la cantidad subradical. Así distinguimos tres casos:

7.7.1. Caso sub amortiguado

Si el roce es pequeño, en forma más precisa si

$$\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2 < 0,$$

definamos

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{M^2}}, \quad (7.62)$$

y la solución puede escribirse en términos de dos constantes A y ϕ así

$$x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{M}t} \cos(\omega t - \phi), \quad (7.63)$$

es decir hay oscilaciones cada vez de menor amplitud. El movimiento se denomina cuasi periódico y el cuasi período está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{M^2}}}. \quad (7.64)$$

Este es el único caso donde el cuerpo efectúa oscilaciones pero de amplitudes cada vez más pequeñas, como se ilustra en la figura

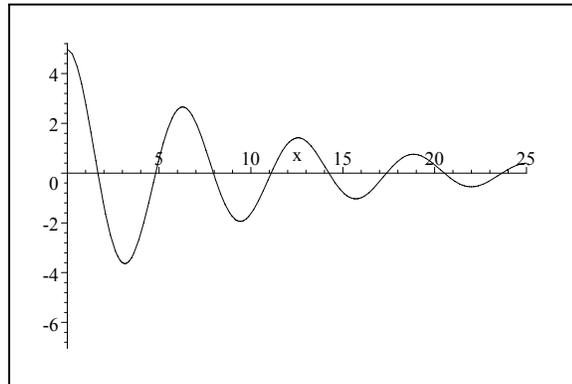


Figura 7.8: movimiento oscilatorio amortiguado

7.7.2. Caso amortiguado crítico

Aquí

$$\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2 = 0,$$

los dos valores de p son iguales y la solución es

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\beta}{M}t},$$

donde dependiendo de los signos de las constantes A y B puede haber a lo más una oscilación y luego la amplitud decae asintóticamente a cero. La figura ilustra un caso donde $M = 1$, $\beta = 0,1$ e inicialmente $x(0) = 1,5$ m, $\dot{x}(0) = -0,5$ m s⁻¹ de donde puede obtenerse

$$x(t) = (1,5 - 0,35t)e^{-0,1t}$$

donde el cuerpo cruza una sola vez la posición de equilibrio del resorte ($x = 0$)

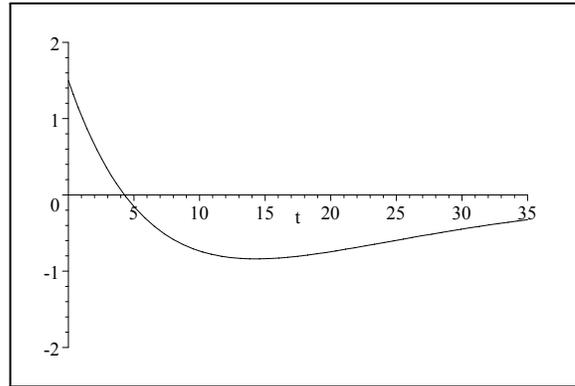


Figura 7.9: $x(t)$ vs t

y después el resorte se aproxima asintóticamente a su longitud natural o sea con $x = 0$.

7.7.3. Caso sobre amortiguado

Si el roce es muy grande, es decir si

$$\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2 > 0, \tag{7.65}$$

los dos valores de p son reales y distintos luego las soluciones son

$$p = -\frac{\beta}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2\right)},$$

y luego

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{M}t} \left(A e^{\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2\right)}t} + B e^{-\sqrt{\left(\frac{\beta^2}{M^2} - \omega_0^2\right)}t} \right), \quad (7.66)$$

la coordenada cae exponencialmente a cero sin que se cruce ni una vez la coordenada $x = 0$.

7.7.4. Movimiento amortiguado forzado

Si se agrega una fuerza externa forzadora de la forma $F(t)$, la ecuación de movimiento será

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = F(t). \quad (7.67)$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden, no homogénea. Un teorema de las matemáticas nos informa que la solución es la suma de una solución particular de esa ecuación más la solución de la parte homogénea, que corresponde a la encontrada en la sección anterior. La solución de la parte homogénea, en cualquiera de los tres casos explicados a la larga decae a cero, luego si nos olvidamos de los transientes iniciales, el cuerpo terminará moviéndose de acuerdo a la solución particular.

Una solución particular

Si la fuerza forzadora es periódica de la forma

$$F(t) = A \cos \Omega t,$$

es conveniente darse cuenta que con $i = \sqrt{-1}$ se tiene

$$F(t) = A \cos \Omega t = \operatorname{Re}(A e^{i\Omega t}),$$

y resolver la ecuación

$$\ddot{x} + \frac{2\beta}{M}\dot{x} + \omega_0^2 x = A e^{i\Omega t},$$

en el entendido que en la solución que encontremos debemos quedarnos con la parte real. (repase algebra de números complejos)

La solución puede adivinarse de la forma

$$x(t) = Ce^{i\Omega t},$$

que si es sustituida conduce a

$$-\Omega^2 C + \frac{2\beta}{M}i\Omega C + \omega_0^2 C = A,$$

de donde

$$C = \frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2i\beta\Omega}{M}},$$

es la amplitud de la respuesta del sistema. Finalmente la solución puede escribirse

$$x(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{A}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{2i\beta\Omega}{M}} e^{i\Omega t} \right),$$

donde $\operatorname{Re}(z)$ indica la parte real del número complejo z . Si usted repasa sus conocimientos de números complejos podrá escribirla en la forma

$$x(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{2\beta\Omega}{M}\right)^2}} \cos(\Omega t - \phi). \quad (7.68)$$

Una característica de esta solución es que es una función que tiene la periodicidad de la fuerza forzante y que su amplitud presenta un máximo para un cierto valor de Ω como se explica a continuación.

7.7.5. Fenómeno de resonancia

Puede observarse que el movimiento forzado que ha resultado, después que terminan los transientes iniciales, es de la frecuencia de la fuerza forzadora, con alguna diferencia de fase ϕ con la fuerza, y lo más destacable es que su amplitud

$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{2\beta\Omega}{M}\right)^2}}, \quad (7.69)$$

tiene un máximo cuando la frecuencia de la fuerza forzadora sea

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2\beta^2}{M^2}} \quad (7.70)$$

y si el roce es pequeño es casi la frecuencia natural ω_0 del sistema. Las matemáticas permiten demostrar que el denominador de la amplitud tiene un mínimo si

$$\frac{d}{d\Omega}((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\frac{2\beta\Omega}{M})^2) = 0,$$

o sea

$$\omega_0^2 - \Omega^2 - \frac{2\beta^2}{M^2} = 0,$$

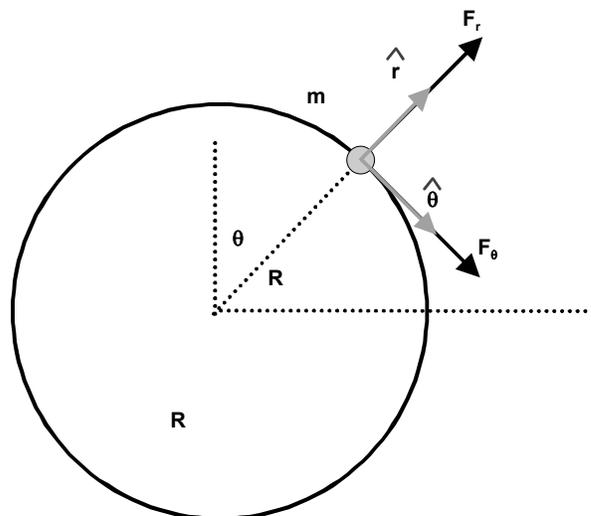
y de ahí sigue lo establecido.

7.8. Dinámica del movimiento circular

Cuando un cuerpo está restringido a moverse en una trayectoria circunferencial, es mejor utilizar coordenadas polares. Aquí el radio será constante y variará solamente la coordenada angular θ . En la figura se ilustran las componentes polares de la fuerza que actúa sobre la partícula F_r y F_θ . Recordando lo establecido en el capítulo de cinemática

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad (7.71)$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}, \quad (7.72)$$



la segunda ley de Newton será entonces

$$F_r = m(-R\dot{\theta}^2), \quad (7.73)$$

$$F_\theta = mR\ddot{\theta}. \quad (7.74)$$

En los desplazamientos de la partícula la componente F_r por ser perpendicular al desplazamiento no realiza trabajo. Si la componente F_θ es la componente de una fuerza conservativa entonces la energía es constante

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \text{constante}. \quad (7.75)$$

Si hay roce entonces la energía no es constante.

EJEMPLO 7.8.1 *Una partícula de masa m puede moverse por el interior de una superficie circular lisa de radio R cuyo plano está vertical. Inicialmente la partícula parte del punto más bajo con una rapidez inicial v_0 . Analice las diversas posibilidades que tiene el movimiento de la partícula en función de la rapidez inicial.*

Solución. La figura ilustra las dos fuerzas que actúan sobre la partícula mientras ella permanezca en contacto con la superficie. Antes de plantear nada matemático usted debe darse cuenta de las posibilidades y luego que eso esté claro, proceder a un análisis más detallado. Es más o menos evidente que si la rapidez inicial es pequeña, la partícula efectuará oscilaciones. Si ella es

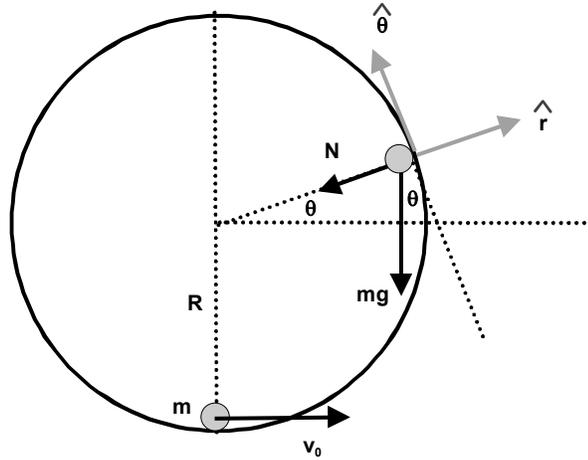


Figura 7.10:

más grande, la partícula puede perder el contacto pasado los noventa grados. Si es mayor aún, podrá dar vueltas completas. Las ecuaciones generales se reducen en este caso a

$$F_r = -N - mg \sin \theta = m(-R\dot{\theta}^2), \quad (7.76)$$

$$F_\theta = -mg \cos \theta = mR\ddot{\theta}, \quad (7.77)$$

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mg(R + R \sin \theta). \quad (7.78)$$

De la tercera

$$\frac{v_0^2}{R} - 2g(1 + \sin \theta) = R\dot{\theta}^2$$

De la primera, eliminando $\dot{\theta}^2$ se obtiene

$$N = -mg \sin \theta + m\left(\frac{v_0^2}{R} - 2g(1 + \sin \theta)\right),$$

$$N = \frac{mv_0^2}{R} - mg(3 \sin \theta + 2).$$

de la primera

$$N - mR\dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta \quad (7.79)$$

- Vueltas completas. La partícula realizará vueltas completas si N permanece positiva para todo θ . Observando la expresión para N es caso más desfavorable ocurre si $\theta = \pi$, luego la condición será

$$\frac{mv_0^2}{R} + mg(-3 - 2) \geq 0,$$

o sea

$$v_0 \geq \sqrt{5gR}.$$

- Oscilaciones. Para que esto ocurra la partícula debe detenerse antes que la normal se anule. Esto significa que $\dot{\theta} = 0$ antes que N se anule. Pero si $\theta > 0$ la ecuación (7.79) indica que

$$\begin{aligned} N - mR\dot{\theta}^2 &= -mg \sin \theta < 0, \\ N &< mR\dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

o sea no puede anularse $\dot{\theta}$ primero. Luego pueden haber oscilaciones sólo si $\dot{\theta} = 0$ para $\theta < 0$, y eso requiere que

$$\frac{v_0^2}{R} - 2g(1 + \sin \theta) = 0 \text{ para } \theta < 0,$$

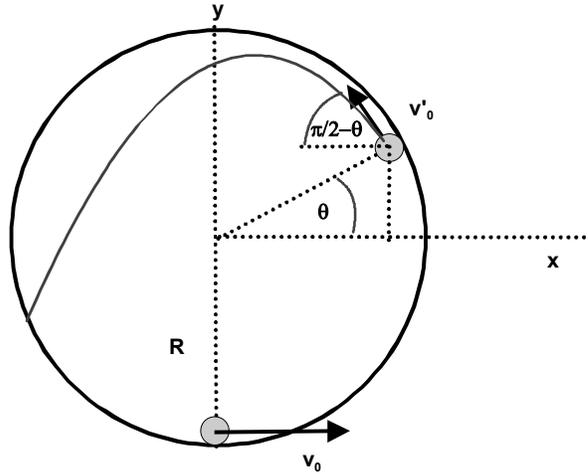
de donde

$$v_0 = \sqrt{2gR(1 + \sin \theta)} \leq \sqrt{2gR}.$$

- Despegues. Para que la partícula despegue, pierda el contacto, debe ser $N = 0$ con $0 < \theta < \pi/2$ luego

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{mv_0^2}{R} - mg(3 \sin \theta + 2), \\ v_0 &= \sqrt{gR(2 + 3 \sin \theta)}, \\ \sqrt{2gR} &< v_0 < \sqrt{5gR}. \end{aligned}$$

- Análisis del despegue y siguiente punto de impacto



Sea $\theta > 0$ el ángulo del despegue. De $N - mR\dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta$ para $N = 0$ podemos evaluar

$$v'_0 = R\dot{\theta} = \sqrt{gR \sin \theta},$$

y usando las ecuaciones de los proyectiles

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta - v'_0 t \cos(\pi/2 - \theta), \\ y &= R \sin \theta + v'_0 t \sin(\pi/2 - \theta) - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

reduciendo

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta - \sqrt{gR \sin \theta} t \sin \theta, \\ y &= R \sin \theta + \sqrt{gR} \sqrt{\sin \theta} t \cos \theta - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

calculemos

$$x^2 + y^2 = R^2 - g\sqrt{gR}\sqrt{\sin \theta} t^3 \cos \theta + \frac{1}{4}g^2 t^4$$

y para $x^2 + y^2 = R^2$ que caracteriza al punto de caída, se obtiene el tiempo

$$t = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\sqrt{\sin \theta} \cos \theta$$

y así evaluamos las coordenadas del punto de caída resultando después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} x &= R \cos 3\theta = R \cos(-3\theta), \\ y &= -R \sin 3\theta = R \sin(-3\theta). \end{aligned}$$

Esto es el punto de caída se produce en el ángulo -3θ .

7.9. Ejemplos

7.9.1. Fuerzas constantes o dependientes del tiempo

EJEMPLO 7.9.1 *Un cuerpo de masa 10 kg, se encuentra sobre una superficie horizontal áspera, de coeficiente de fricción estático y cinético $\mu_s = 0,2$ y $\mu_k = 0,1$, respectivamente. Si sobre el cuerpo se aplica una fuerza horizontal de magnitud 60 N que actúa sólo durante 10 s, determine la posición y velocidad en tiempo t .*

Solución. La fuerza de roce estática máxima es

$$f_s^{\text{máx}} = \mu_s N = \mu_s mg = 0,2 \times 10 \times 9,8 = 19,6 \text{ N},$$

luego el bloque acelera. Hay que hacer el análisis por tramos.

■ $0 < t \leq 10$

$$\begin{aligned} ma &= F - \mu_k mg, \\ a &= \frac{60 - 0,2 \times 10 \times 9,8}{10} = 4,04 \text{ m s}^{-2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} at^2 = 2,02t^2, \\ v(t) &= 4,04t. \end{aligned}$$

■ $10 < t \leq t_{\text{máx}}$. El tiempo máximo es cuando el bloque se detiene y se sabrá luego. Ahora

$$\begin{aligned} ma &= -\mu_k mg, \\ a &= -\frac{0,2 \times 10 \times 9,8}{10} = -1,96 \text{ m s}^{-2}. \end{aligned}$$

La posición y velocidades iniciales son las finales del primer intervalo

$$\begin{aligned} x(10) &= 2,02 \times (10)^2 = 202 \text{ m}, \\ v(10) &= 4,04 \times 10 = 40,4 \text{ m s}^{-1}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} v(t) &= v(10) + a(t - 10) = 40,4 - 1,96(t - 10) = 60,0 - 1,96t \text{ m s}^{-1}, \\ x(t) &= x(10) + v(10)(t - 10) + \frac{1}{2}a(t - 10)^2 \\ &= 202 + 40,4 \times (t - 10) - \frac{1}{2}1,96(t - 10)^2 \\ &= -300,0 + 60,0t - 0,98t^2. \end{aligned}$$

El instante en que la velocidad es nula da

$$t_{\text{máx}} = \frac{60,0}{1,96} = 30,61 \text{ s.}$$

EJEMPLO 7.9.2 *Sobre un bloque de masa m que se encuentra sobre un plano horizontal liso e inicialmente en reposo actúa una fuerza constante F durante un tiempo T , luego la fuerza se invierte y actúa otro intervalo de tiempo T , luego la fuerza no se aplica más. Determine la posición y velocidad en todo tiempo.*

Solución. En los diferentes intervalos de tiempo la segunda ley nos dice que

$$a = \pm \frac{F}{m}.$$

Integramos por tramos considerando que las posiciones y velocidades finales son las iniciales del siguiente tramo.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2, \quad 0 < t \leq T, \\ v(t) &= \frac{F}{m} t, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(T) + v(T)(t - T) - \frac{1}{2} \frac{F}{m} (t - T)^2, \quad T < t \leq 2T, \\ v(t) &= v(T) - \frac{F}{m} (t - T), \quad T < t \leq 2T, \end{aligned}$$

ahora la aceleración es nula

$$\begin{aligned} v(t) &= v(2T), \quad 2T < t, \\ x(t) &= x(2T) + v(2T)(t - 2T), \quad 2T < t. \end{aligned}$$

Procediendo a los reemplazos resulta

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} (4Tt - t^2 - 2T^2), \quad T < t \leq 2T,$$

$$v(t) = F \frac{2T - t}{m}, \quad T < t \leq 2T,$$

$$v(t) = v(2T) = 0, \quad 2T < t,$$

$$x(t) = x_2(2T) = \frac{F}{m} T^2, \quad 2T < t.$$

EJEMPLO 7.9.3 *Sobre un bloque de masa m que se encuentra sobre un plano horizontal liso e inicialmente en reposo actúa una fuerza $F = F_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$. Determine la posición y velocidad en todo tiempo.*

Solución. Este ejemplo tiene un parecido con el ejemplo anterior en el sentido que a fuerza va cambiando de signo periódicamente, pero es más fácil. En efecto basta integrar dos veces

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 \cos \frac{2\pi t}{T},$$

luego

$$v(t) = \frac{F_0}{m} \int_0^t \cos \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{F_0}{m} \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

integramos de nuevo

$$x(t) = \int_0^t \frac{F_0}{m} \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{F_0}{m} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 (1 - \cos \frac{2\pi t}{T}).$$

7.9.2. Fuerzas dependientes de la posición o de la velocidad

En estos casos la segunda ley será de la forma

$$m \frac{dv}{dt} = F(v),$$

y la técnica que permite integrar se denomina separación de variables. Basta reordenar la ecuación en la forma

$$m \frac{dv}{F(v)} = dt,$$

y es inmediato poder integrar una vez

$$m \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{F(v)} = \int_0^t dt = t.$$

Si $F(v)$ no es demasiado compleja quizás usted pueda hacer la integral. Después deberá despejar $v(t)$ e integrar por segunda vez.

Alternativa: Si se multiplica la segunda ley por dx resulta

$$m dx \frac{dv}{dt} = dx F(v),$$

reordenando

$$mv \frac{dv}{F(v)} = dx,$$

que se puede integrar para obtener la relación entre velocidad y posición

$$m \int_{v_0}^{v(x)} v \frac{dv}{F(v)} = \int_0^x dx = x.$$

EJEMPLO 7.9.4 *Una partícula de masa m , se lanza con rapidez inicial v_0 sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad k . Calcule la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo.*

Solución. La segunda ley será

$$m \frac{dv}{dt} = -kv,$$

separando variables

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt,$$

integrando

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = - \int_0^t \frac{k}{m} dt,$$

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = -\frac{k}{m}t,$$

despejando $v(t)$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

que muestra que la partícula se detiene en $t \rightarrow \infty$. Integramos por segunda vez

$$x(t) = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}),$$

que muestra que la partícula recorre una distancia máxima

$$x_{\text{máx}} = \frac{mv_0}{k},$$

a pesar que no se detiene nunca.

Alternativa:

En este caso podemos también escribir

$$m dx \frac{dv}{dt} = -k v dx,$$

luego

$$\begin{aligned} m v dv &= -k v dx, \\ dv &= -\frac{k}{m} dx, \end{aligned}$$

que es integrable

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = -\frac{k}{m} \int_0^x dx,$$

luego

$$v(t) = v_0 - \frac{kx}{m},$$

que indica como varía la velocidad de la partícula con su posición hasta que se detenga.

EJEMPLO 7.9.5 Una partícula de masa m , se lanza con rapidez inicial v_0 sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional al cuadrado de la rapidez con constante de proporcionalidad k . Calcule la posición y la velocidad de la partícula en función del tiempo.

Solución. Ahora

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2,$$

separando variables

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} dt,$$

integrando

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2} = -\int_0^t \frac{k}{m} dt,$$

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v_0} = -\frac{kt}{m},$$

despejando $v(t)$

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{ktv_0}{m}},$$

que muestra que la partícula se detiene en $t \rightarrow \infty$. Integramos por segunda vez

$$x(t) = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \frac{ktv_0}{m}} dt = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{ktv_0}{m} \right),$$

ahora la partícula recorre una distancia infinita.

Alternativa: multiplique por dx la segunda ley

$$m dx \frac{dv}{dt} = -kv^2 dx,$$

reordenando

$$m v dv = -k v^2 dx,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dx,$$

integrando

$$\ln \frac{v(t)}{v_0} = -\frac{kx}{m},$$

o sea la relación entre velocidad y posición es

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{kx}{m}}.$$



EJEMPLO 7.9.6 Una partícula de masa m está sometida a una fuerza elástica $-kx$, e inicia su movimiento con rapidez inicial v_0 y $x = 0$ sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional al cuadrado de la rapidez con constante de proporcionalidad β . Calcule la velocidad de la partícula en función de la posición mientras avanza hacia la derecha.

Solución. Ahora

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \mp \beta v^2,$$

donde el signo menos aplica cuando la partícula se mueve hacia la derecha y el más cuando se mueve hacia la izquierda. Ahora no es trivial separar variables. Pero existe la identidad

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dx} \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx},$$

lo cual permite dejar dos variables, v y x

$$m \frac{dv}{dt} = -kx - \beta v^2,$$

o

$$mvdv \pm \beta v^2 dx = -kx dx.$$

Veamos si al multiplicar ambos miembros por alguna función $g(x)$ que hay que determinar para que el lado izquierdo sea la diferencial de alguna función de x y v . (El llamado factor integrante)

$$mvg(x)dv + \beta v^2 g(x)dx = -kx dx.$$

Como se explicó, vea (??) debe ser

$$\frac{\partial}{\partial x} mvg(x) = \frac{\partial}{\partial v} \beta v^2 g(x),$$

o sea

$$m \frac{\partial}{\partial x} g(x) = 2\beta g(x),$$

de donde

$$g(x) = e^{\frac{2\beta x}{m}},$$

luego

$$mvdve^{\frac{2\beta x}{m}} + \beta v^2 dx e^{\frac{2\beta x}{m}} = -kx dx e^{\frac{2\beta x}{m}},$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 e^{\frac{2\beta x}{m}}\right) = -kx dx e^{\frac{2\beta x}{m}},$$

integrando

$$\frac{1}{2}mv^2 e^{\frac{2\beta x}{m}} = -\frac{1}{2}kx^2 e^{\frac{2\beta x}{m}} + C,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = Ce^{-\frac{2\beta x}{m}},$$

en $t = 0$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = C,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 e^{-\frac{2\beta x}{m}}$$

finalmente

$$v = \sqrt{v_0^2 e^{-\frac{2\beta x}{m}} - \frac{k}{m}x^2}.$$

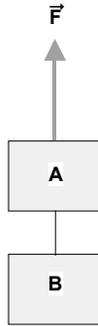
7.10. Ejercicios

NOTA 7.2 (1), (2), (3) y (4) representan el grado de dificultad del problema. El (1) corresponde a problemas tipo prueba, el (2) corresponde a problemas discriminatorios y el (3) a problemas de tareas. Los problemas (4) son para expertos o para personas que deseen profundizar. *Usted tendrá éxito si es capaz de hacer problemas tipo (1) y (2)*

7.10.1. Dinámica unidimensional

EJERCICIO 7.1 (1) *Un cuerpo de masa 16 kg, se encuentra sobre una superficie horizontal áspera, de coeficiente de fricción estático y cinético $\mu_s = 0,3$ y $\mu_k = 0,25$, respectivamente. Si sobre el cuerpo se aplica una fuerza horizontal \vec{F} , determine: a) La fuerza resultante sobre el bloque si $F = 45$ N. b) La magnitud mínima de F para poner en movimiento al cuerpo. c) La distancia horizontal que recorre el cuerpo, hasta llegar a detenerse, si $F = 80$ N y actúa sólo durante 4 s. Respuesta: $\sum \vec{F} = \vec{0}$, 48 N; 40 m.*

EJERCICIO 7.2 (1) Dos bloques A y B de masa $m_A = 14 \text{ kg}$ y $m_B = 10 \text{ kg}$, están unidos por una cuerda cuya masa total es $m = 8 \text{ kg}$ como se indica en la figura ???. Si se aplica al bloque superior A una fuerza vertical \vec{F} de módulo 480 N , se pide calcular:



a) La aceleración del sistema. b) La tensión en los extremos superior e inferior de la cuerda. Respuesta: 5 m s^{-2} ; 270 y 150 N

EJERCICIO 7.3 (1) Un disco de hockey abandona el palo de un jugador con una rapidez de 5 m s^{-1} y desliza 36 m antes de detenerse. Demuestre que el coeficiente de roce entre el disco y el hielo es $0,035$.

EJERCICIO 7.4 (1) Dos resortes S_1 y S_2 de longitudes iguales a $0,5 \text{ m}$, pero con diferentes constantes elásticas $K_1 = 50 \text{ N m}^{-1}$ y $K_2 = 100 \text{ N m}^{-1}$, están unidos a dos soportes A y B, que se encuentran a la misma altura. Un cuerpo C de masa $2,5 \text{ kg}$, está entre los dos resortes y es estirado hacia abajo hasta que la longitud de los resortes se duplica. ¿Cuál es la aceleración que adquiere el cuerpo C cuando se deja libre? Respuesta: para $y = 1 \text{ m}$, $a = 20 \text{ m s}^{-2}$

EJERCICIO 7.5 (3) Una partícula se mueve sobre el eje X de un sistema de coordenadas, sometido a una fuerza de atracción hacia el origen de magnitud k/x^2 , donde k es una constante positiva. Si la partícula parte del reposo en $x = a$, demuestre que ella llegará al origen en un tiempo t , dado por

$$t = \frac{\pi a}{2} \sqrt{\frac{ma}{2k}}.$$

EJERCICIO 7.6 Sobre una partícula de masa m , inicialmente en reposo, actúa una fuerza \vec{F} de magnitud: $F = F_0 [1 - (t - T)^2/T^2]$ durante un intervalo de tiempo $0 < t < 2T$. Pruebe que la rapidez de la partícula al final del intervalo es: $v = 4F_0 T/3m$

EJERCICIO 7.7 (1) Una partícula de masa 1 kg, se mueve a lo largo del eje X bajo la acción de una fuerza cuya magnitud es: $F = 4\pi^2 \sin 8\pi t$, donde F está medido en N y t en s. Cuando $t = 0$ s, la rapidez de la partícula es 40 ms^{-1} . Calcule: a) La rapidez de la partícula cuando $t = 0,2$ s. b) Si en $t = 0$ s, $x = 0$ m, determine la posición de la partícula en $t = 0,2$ s. Respuesta: $v_x = 41,085 \text{ ms}^{-1}$, $x = 8,37$ m

EJERCICIO 7.8 (2) Una partícula de masa m , que está inicialmente en reposo en el origen, queda sujeta a la acción de una fuerza resultante, cuya magnitud está dada por $F = kt^2$. Demuestre que:

$$\frac{x}{v_x} = \frac{t}{4}.$$

EJERCICIO 7.9 (1) Un globo cuyo peso total es W , incluyendo el lastre, está sujeto a la acción de una fuerza ascendente vertical constante \vec{P} . En un determinado instante, el globo comienza a descender con una aceleración constante de magnitud " a ". ¿Qué cantidad de lastre debe arrojar fuera del globo para que este se eleve con aceleración constante de magnitud a ? No considere la resistencia del aire. Respuesta: $\frac{2(P-W)}{P-2W}W$

EJERCICIO 7.10 (3) Sobre una partícula que se mueve sobre el eje X , actúa una fuerza dada por: $\vec{F} = -\frac{k}{v_x} \hat{i}$. Se sabe que en $t = 0$, $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = v_0$. Calcule: a) \dot{x} en función de t y b) \dot{x} en función de x . Respuesta: a) $\sqrt{v_0^2 - 2kmt}$; b) $[v_0^3 - \frac{3k}{m}(x - a)]^{\frac{1}{3}}$.

EJERCICIO 7.11 (1) La fuerza neta que actúa sobre una partícula cuyo peso es de 26 kgf, tiene la dirección sobre el eje de las X de un sistema de coordenadas y está dada por la expresión:

$$F = At^3 + Be^{-ct}$$

en que $A = 216 \text{ N s}^{-3}$, $B = 1 \text{ N}$, $c = 1 \text{ s}^{-1}$ y t está expresado en segundos. Si en el instante $t = 0$, la partícula está pasando por el origen moviéndose a 3 ms^{-1} en el sentido positivo del eje X , determine: a) La velocidad de la partícula en el instante $t = 3$ s. b) Su distancia al origen en ese instante. Respuesta: $171,3 \text{ ms}^{-1}$; $110,02$ m.

EJERCICIO 7.12 (1) Una partícula de masa m , parte del reposo desde el origen de un sistema de coordenadas bajo la acción de una fuerza neta cuya

magnitud es $F = f_0 - kt^2$, en que f_0 y k son constantes positivas. a) Encuentre las expresiones para la velocidad y para el itinerario de la partícula, en función del tiempo. b) Si $m = 800$ kg, $f_0 = 1500$ N, $k = 15$ N s⁻² y el tiempo está dado en segundos, determine en qué instante se detiene la partícula y a qué distancia. Respuesta: $\frac{15}{8}t - \frac{1}{160}t^3$; $\frac{15}{16}t^2 - \frac{1}{640}t^4$; $10\sqrt{3}$ s; 140,6 m.

EJERCICIO 7.13 (2) Una partícula descansa sobre una plataforma horizontal inicialmente en reposo. Si la plataforma comienza a moverse verticalmente de modo que su desplazamiento es:

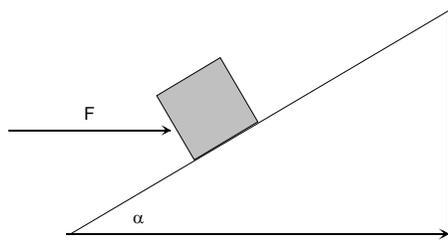
$$y = A \sin \omega t$$

siendo A y ω constantes y t el tiempo. Determine la condición que deben cumplir esas constantes para que durante el movimiento de la plataforma la partícula se despegue de ella.

EJERCICIO 7.14 (3) Un cuerpo se ata a un extremo de un hilo inextensible y el otro extremo del hilo tiene movimiento armónico simple vertical de amplitud a , realizando n oscilaciones completas por segundo. Demuestre que el hilo no permanecerá siempre tenso a menos que

$$n^2 \leq \frac{g}{4\pi^2 a}.$$

EJERCICIO 7.15 (1) Un cuerpo de masa $m = 1$ kg es empujado por una fuerza horizontal F de módulo 15 N, desde el pie de un plano inclinado en $\alpha = 37^\circ$ respecto a la horizontal y cuyo coeficiente de roce cinético es 0,2. Si la fuerza F actúa durante tres segundos solamente, determine: la distancia que alcanza a subir por el plano y el tiempo que demora en volver al punto de Partida.



Fuerza dependiente de la velocidad

EJERCICIO 7.16 (3) *Se deja caer una bolita de masa m desde una altura h . Sobre la bolita, además del peso, actúa una fuerza resistiva proporcional a la velocidad de la forma $\vec{F} = -k\hat{y}\hat{j}$, calcule la rapidez de la bolita cuando ha transcurrido un tiempo $t = m/k$. Respuesta: $\frac{mg}{k} \left(\frac{1}{e} - 1\right)$*

EJERCICIO 7.17 (3) *Un cuerpo de masa 4 kg, es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 60 m s^{-1} . La fuerza resistente del aire es: $\vec{F} = -\frac{3}{100}\vec{v}$ (unidades en el Sistema Internacional). Calcule el tiempo que demora el cuerpo en alcanzar la altura máxima y el valor de la altura máxima. Respuesta: $t = 5.869 \text{ s}$; 174.8 m .*

EJERCICIO 7.18 (3) *Una partícula de masa m se lanza verticalmente hacia arriba (en el eje Y) con velocidad inicial V sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa de la forma $-2\beta\hat{y}$. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo.*

EJERCICIO 7.19 (3) *Una partícula de masa m se suelta desde una altura h sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa de la forma $-\beta\hat{y}$. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo.*

EJERCICIO 7.20 (3) *Una partícula de masa m se lanza verticalmente hacia arriba (el eje Y) con velocidad inicial V sometida a su peso y a una fuerza de roce viscosa proporcional al cuadrado de la rapidez, de la forma $\pm 2\beta\hat{y}^2$. Determine las expresiones para la posición y velocidad de la partícula en función del tiempo. Considere que debe elegirse el signo adecuadamente para la subida y la bajada de la partícula.*

EJERCICIO 7.21 (3) *Una partícula de masa m moviéndose en una línea recta está sometida a una resistencia que produce una fuerza de retardo kv^3 , donde v es la velocidad y k es una constante. Muestre que la velocidad v y el tiempo t están dados en términos de la distancia s mediante las ecuaciones*

$$v = \frac{u}{1 + kmsu},$$

$$t = \frac{s}{u} + \frac{1}{2}kms^2.$$

donde u es la velocidad inicial.

EJERCICIO 7.22 (3) Una partícula se mueve en una línea recta bajo la acción de una fuerza de roce de la forma kv^{n+1} donde v es la velocidad a tiempo t . Muestre que, si u es la velocidad en $t = 0$

$$kt = \frac{m}{n} \left(\frac{1}{v^n} - \frac{1}{u^n} \right),$$

y obtenga una fórmula correspondiente para el espacio en términos de v .

EJERCICIO 7.23 (3) Una bala disparada con una velocidad horizontal de 800 m s^{-1} viaja con una velocidad de 500 m s^{-1} al final de un segundo. Suponiendo válido el modelo del problema anterior con $m = 1/2$, calcule k y el espacio recorrido en el primer segundo, despreciando el efecto de la gravedad.

EJERCICIO 7.24 (3) Se dispara verticalmente hacia arriba una piedra en un medio que ofrece una resistencia por unidad de masa proporcional a la velocidad kv cuando la rapidez es v . Si v_0 es la rapidez del disparo, pruebe que la piedra vuelve al punto inicial después de un tiempo t_1 , donde

$$(g + kv_0) (1 + e^{-kt_1}) = gkt_1.$$

EJERCICIO 7.25 (4) Una partícula se lanza hacia arriba con velocidad inicial u y se mueve en un medio que ofrece una resistencia por unidad de masa kv^2 . Pruebe que la partícula vuelve al punto de partida después de un tiempo

$$\frac{1}{\sqrt{kg}} (\alpha + \ln(\sec \alpha + \tan \alpha)),$$

donde

$$\tan \alpha = u \sqrt{\frac{k}{g}}.$$

EJERCICIO 7.26 (3) Una partícula de masa m se mueve en una línea recta (en el eje X) sometida a una fuerza elástica $-Kx$ y a una fuerza de roce viscosa de la forma $-2\beta\dot{x}$. Si inicialmente la velocidad es V y la posición es $x = 0$, determine las expresiones para la posición de la partícula en función del tiempo, en los tres casos: sub amortiguado, amortiguado crítico y sobre amortiguado.

7.10.2. Dinámica en dos o tres dimensiones

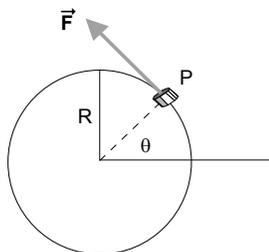
EJERCICIO 7.27 *Un cuerpo de masa 8 kg, describe una trayectoria cuyas ecuaciones paramétrica son: $x = 2 + 5t - 2t^2$ m e $y = t^2$ m. Determine la fuerza aplicada sobre el cuerpo en $t = 2$ s. Respuesta: $(-32; 16)$ N.*

EJERCICIO 7.28 (1) *Una partícula de masa 25 g se hace girar, de modo que describa una trayectoria circular en un plano vertical, mediante una cuerda de largo 40 cm. Si la rapidez angular es constante y de magnitud 30 rad s^{-1} , calcule: a) La aceleración centrípeta en el punto más alto de la trayectoria. b) La tensión en el punto más bajo de la trayectoria. Respuesta: $360 \text{ m s}^{-2}; 9,0 \text{ N}$.*

EJERCICIO 7.29 (1) *Un anillo P de masa m, está engarzado en un alambre liso, que forma una circunferencia fija de plano vertical y radio R como se indica en la figura. Bajo la acción de una fuerza tangencial \vec{F} de magnitud desconocida, el anillo describe la circunferencia con rapidez angular igual a:*

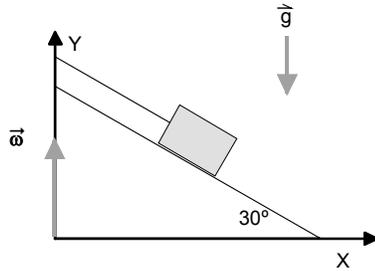
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}} \left(1 - \frac{1}{2} \sin \theta \right)$$

determine:



a) La magnitud de la fuerza \vec{F} en función de θ . b) La reacción normal del alambre sobre el anillo. Respuesta: $\frac{1}{2}mg \cos \theta \sin \theta$; $mg \left(2 - 3 \sin \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \hat{r}$

EJERCICIO 7.30 (3) *Un bloque de masa 5 kg, descansa sobre un plano inclinado 30° con la horizontal, unida a un eje vertical eje mediante una cuerda de longitud $10/\sqrt{3}$ m. El plano gira junto con el bloque en torno a un eje vertical con rapidez angular $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$. Calcule:*



a) La tensión en la cuerda; b) La velocidad angular para la cual la partícula abandona el plano. Respuesta: 46,65 N; 1,86 rad s⁻¹.

EJERCICIO 7.31 (1) Una pelota de peso W está unida a una cuerda de longitud L y está moviéndose como péndulo cónico. Es decir, está girando en un círculo horizontal con rapidez constante v_0 . Sea θ el ángulo formado por la cuerda y la vertical. Despreciando el peso de la cuerda, determinar: a) La tensión de la cuerda. b) La rapidez v_0 en función de g , L y θ . Respuesta: $\frac{W}{\cos \theta}$; $\sqrt{gL \sin \theta \tan \theta}$.

EJERCICIO 7.32 Demuestre que la ecuación de movimiento de un péndulo simple, formado por una partícula de masa m suspendida de un hilo liviano de largo L , es :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

EJERCICIO 7.33 (1) Una partícula da vueltas por el interior de un aro liso vertical de radio R que tiene su plano vertical, sometida a su peso y a la reacción normal. Determine la velocidad mínima que debe tener la partícula en el punto más bajo para que la partícula realice vueltas completas sin perder contacto con el aro.

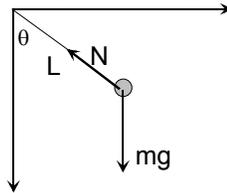
EJERCICIO 7.34 (1) Respecto a la situación del problema anterior, si la velocidad en el punto más bajo es la 3/4 de la mínima calculada, determine el punto donde se pierde el contacto.

EJERCICIO 7.35 (1) Respecto a la situación del problema anterior, si la rapidez en el punto más bajo es v_0 determine la reacción normal N en función de θ .

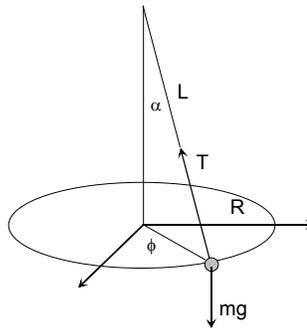
EJERCICIO 7.36 (1) Una partícula de masa m se coloca en el punto más alto de un hemisferio liso de radio R y se perturba levemente de modo que ella

comienza a caer deslizando. Determine el punto sobre el hemisferio donde la partícula pierde el contacto con él.

EJERCICIO 7.37 (1) Se tiene un péndulo constituido por una partícula de masa m unida por un hilo de largo L a un punto fijo. Si la rapidez de la partícula en el punto más bajo es v_0 determine la energía mecánica de la partícula considerando que en el punto más bajo la energía potencial es cero. Determine además la ecuación diferencial que satisface el ángulo θ .



EJERCICIO 7.38 (1) Un péndulo cónico que se ilustra en la figura, se mueve manteniendo el ángulo α constante siendo m la masa de la partícula, L el largo del hilo.



Determine a) La rapidez angular $\dot{\phi}$. b) La tensión del hilo.

7.10.3. Trabajo y energía

EJERCICIO 7.39 (1) Un proyectil de masa $m = 1$ kg, se lanza desde el origen de un sistema de coordenadas, con rapidez $v_0 = 100 \text{ m s}^{-1}$, formando un ángulo $\alpha = 37^\circ$ con la horizontal. Si se desprecia la resistencia del aire, calcule: a) La energía mecánica del proyectil después del lanzamiento. b) El trabajo realizado por la fuerza neta que actúa sobre el proyectil, desde que se lanza hasta que adquiere la altura máxima. c) La energía cinética del proyectil en el punto de impacto contra el suelo. Respuesta: 5000 J; $-1646,28$ J; 5000 J.

EJERCICIO 7.40 (2) Sea

$$\vec{F} = (y^2 z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + (3xy^2 z^2 - 6x^2 z)\hat{k}.$$

Encuentre la función potencial escalar asociada a F . Respuesta: $3x^2 z^2 - xy^2 z^3$.

EJERCICIO 7.41 (1) Una partícula de masa m se mueve en el plano XY tal que:

$$\vec{r} = a\hat{i} \cos \omega t + b\hat{j} \sin \omega t,$$

donde a y b son constantes positivas. a) Encuentre la trayectoria de la partícula. b) Calcule la fuerza que actúa sobre la partículas. c) Demuestre que la fuerza es conservativa. d) ¿Cuál es la energía potencial en el punto $A = (a, 0)$ y en el punto $B = (0, b)$? e) Calcule el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve desde A hasta B . f) La energía total de la partícula.

EJERCICIO 7.42 (2) Una partícula de masa m , se mueve por la acción de una fuerza conservativa cuyo potencial es $U(x)$. Si en t_1 la partícula está en x_1 y en t_2 está en x_2 , demuestre que: a)

$$t_2 - t_1 = \sqrt{m/2} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

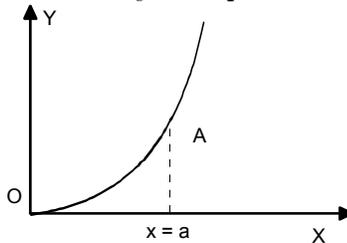
donde E es la energía total. b) Si $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ y en $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = 0$. Demuestre que:

$$x = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

EJERCICIO 7.43 (1) En la parábola $y = x^2/a$ que está colocada verticalmente según la figura, además del peso, de la fuerza de reacción normal, actúa sobre la argolla una fuerza dada por:

$$\vec{F} = y\hat{i} - x\hat{j}.$$

Inicialmente, la argolla está en A y su rapidez es nula.



a) Determinar el trabajo que hace la fuerza F cuando la argolla se mueve desde A hasta O . b) Calcule la rapidez de la argolla en O . Respuesta: $\frac{a^2}{3}$; $\sqrt{2ag + \frac{2a^2}{3m}}$

EJERCICIO 7.44 (1) Una partícula de masa m , se lanza con rapidez inicial v_0 sobre un plano horizontal liso. El aire ejerce sobre la partícula una fuerza resistente proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad k . Calcule: a) La distancia total que recorre la partícula. b) La energía cinética de la partícula en la mitad del recorrido. c) El trabajo total que realiza la fuerza resistente. Respuesta: $\frac{mv_0}{k}$; $\frac{mv_0^2}{8}$; $-\frac{1}{2}mv_0^2$

EJERCICIO 7.45 (1) Sobre una partícula de masa $m = 2$ kg, actúa una fuerza F desconocida. La partícula se mueve sobre un plano horizontal áspero, de acuerdo a la ecuación itinerario $x = 3 + t^2$ donde x está en metros y t en segundos. El coeficiente de roce cinético entre el plano y la partícula es $\mu_k = 0,3$. Calcule: a) La energía cinética de la partícula en el instante $t = 3$ s. b) El trabajo realizado por la fuerza F en el intervalo $0 - 3$ s. Respuesta: 36 J; 90 J.

EJERCICIO 7.46 (1) Un bloque de masa $m = 4$ kg, inicialmente en reposo, asciende a lo largo de un plano inclinado áspero de largo 1 m e inclinación respecto de la horizontal $\alpha = 53^\circ$, debido a la acción de una fuerza horizontal constante de magnitud 60 N. Si al término del recorrido el bloque tiene una rapidez de $1,2 \text{ m s}^{-1}$, calcule: a) El trabajo realizado por la fuerza de roce. b) El trabajo neto resultante. c) El coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano. Respuesta: $-1,284$ J; $2,88$ J; $0,053$.

Sistema de Partículas

8.1. Ecuaciones de movimiento

Esta parte de la Mecánica se presentará en forma bastante resumida. Se muestran las principales definiciones y relaciones cinemáticas, así como las ecuaciones clásicas de movimiento para un sistema de partículas puntuales, suponiendo interacciones que cumplan el principio de acción y reacción. Las definiciones de cantidades Físicas cinemáticas, que involucran las masas, las posiciones, las velocidades, tales como la energía cinética, momentum lineal, momentum angular, son naturalmente relativas al sistema de referencia que se escoja. Por lo tanto, las relaciones que existan entre esas cantidades físicas se desprenderán de las transformaciones de Galileo para dos sistemas, que se trasladan, uno respecto del otro, con velocidad constante \vec{v} .

De la figura (8.1) se tiene

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t. \quad (8.1)$$

En general, para sistemas de referencia arbitrarios, admitiendo aceleraciones y rotaciones de ellos respecto a uno supuesto fijo, las relaciones entre velocidades y aceleraciones de partículas son más complicadas. Las relaciones generales entre velocidades y aceleraciones para sistemas que rotan son (ver apéndice)

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}^{rel}, \quad (8.2)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}^{rel} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}^{rel}, \quad (8.3)$$

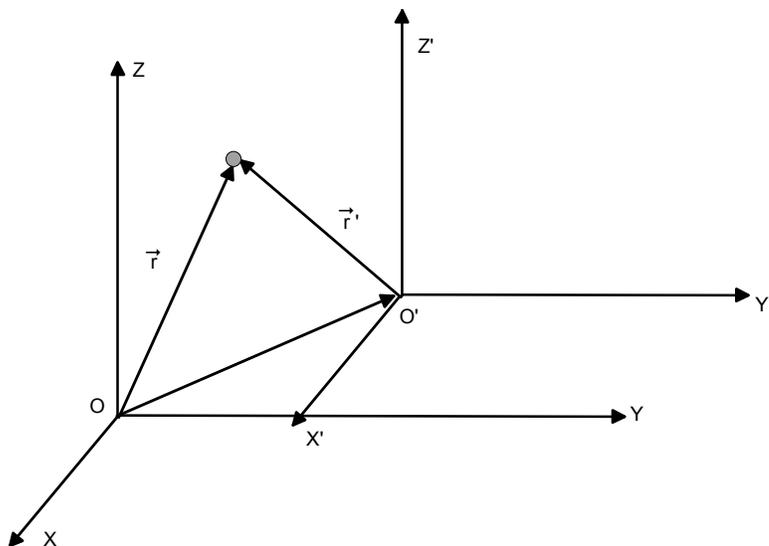


Figura 8.1: Transformación de Galileo.

siendo $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$. Debe notarse que la velocidad y aceleración relativas son las derivadas de los vectores posición y velocidad relativos manteniendo fijas las direcciones de los ejes móviles, lo cual en algunos textos se indica por

$$\vec{v}^{rel} = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}, \quad \vec{a}^{rel} = \frac{\partial \vec{v}^{rel}}{\partial t}. \quad (8.4)$$

Definiciones y notación

Respecto a un sistema de referencia inercial, ver fig.(8.2), haremos las siguientes definiciones

i	índice	$i = 1, 2, 3 \dots N$
N	entero	número de partículas del sistema.
m_i	masa partícula i .
\vec{r}_i	vector posición partícula i .
\vec{v}_i	$= d\vec{r}_i/dt$	velocidad partícula i .
\vec{a}_i	$= d\vec{v}_i/dt$	aceleración partícula i .
\vec{F}_i	fuerza externa actuando sobre partícula i .
\vec{f}_{ij}	fuerza que partícula j ejerce sobre la partícula i .
\vec{P}	$= \sum_i m_i \vec{v}_i$	Momentum lineal del sistema.
K	$= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$	Energía cinética del sistema.
\vec{L}_0	$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$	Momentum angular del sistema respecto a O .
\vec{F}^{ext}	$= \sum_i \vec{F}_i$	Fuerza externa resultante.
$\vec{\Gamma}_O^{ext}$	$= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$	Torque resultante externo respecto a O .
M	$= \sum_i m_i$	masa total sistema.
\vec{r}_G	$= \sum_i m_i \vec{r}_i / M$	posición del centro de masa.

Las sumatorias son todas desde $i = 1$ hasta $i = N$.

La figura siguiente ilustra algunas partículas de un sistema que están actuadas por fuerzas externas y fuerzas de interacción. Las fuerzas externas son por ejemplo los pesos de las partículas y las fuerzas que aparecen por posibles contactos de las partículas con cuerpos exteriores al sistema considerado.

8.1.1. Ecuaciones de movimiento

Con respecto a un sistema inercial de referencia, cada una de las N partículas cumple con la llamada segunda ley de *Newton*

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots N. \quad (8.5)$$

El término de la sumatoria es para todos los valores del índice i pero excluyendo a $i = j$. Más adelante se aplicarán estas ecuaciones al sistema de dos cuerpos con interacción gravitacional entre ellos, el caso soluble más notable. El sistema de ecuaciones (8.5) tiene como gran dificultad matemática al hecho de que las fuerzas de interacción dependen de las posiciones de las dos partículas, esto es

$$\vec{f}_{ij} = \vec{f}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j).$$

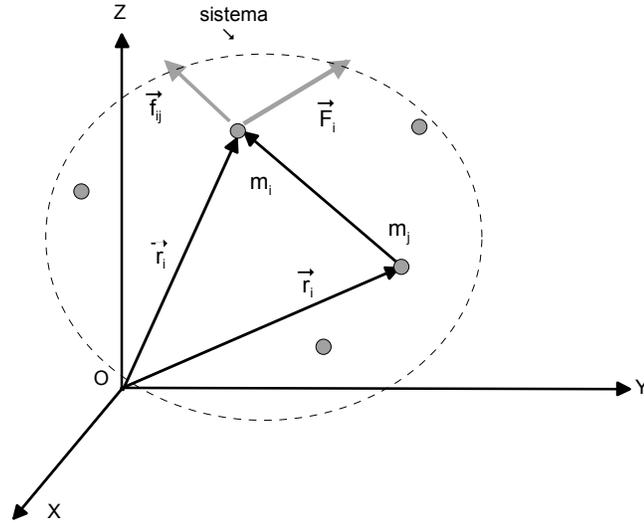


Figura 8.2: Sistema de partículas.

Esa dificultad es tal que se ha demostrado que no hay solución general analítica de tal sistema de ecuaciones si el número de partículas es mayor de dos. Sin embargo hay casos particulares donde si hay solución. Soluciones numéricas siempre serán posibles de determinar.

Si las fuerzas de interacción \vec{f}_{ij} satisfacen la llamada ley de acción y reacción, es decir

$$\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0, \quad \text{y} \quad \vec{f}_{ij} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0,$$

puede demostrarse, a partir de las N ecuaciones de movimiento, las siguientes dos importantes ecuaciones o teoremas

► TEOREMA 8.1

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}, \quad (8.6)$$

o equivalentemente

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}, \quad (8.7)$$

DEMOSTRACION 13 *Simplemente sume todas las ecuaciones de movimiento*

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij},$$

pero de acuerdo a la tercera ley de Newton la sumatoria doble es cero, luego

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \vec{a}_i &= \sum_i \vec{F}_i, \\ \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i &= \vec{F}^{ext},\end{aligned}$$

que prueba el teorema.

8.1.2. Movimiento del centro de masa

El teorema (8.7) establece que el movimiento del centro de masa de un sistema depende exclusivamente de las fuerzas exteriores y no depende de las interacciones. Su validez está basada en la validez de la tercera ley de Newton. Por ejemplo en el sistema solar el movimiento de los diversos planetas, de los satélites, del sol, es un tema complicado. Sin embargo la fuerza externa que actúa sobre el sistema solar completo es prácticamente nula, lo cual trae la simple consecuencia de que el centro de masa del sistema solar va hacia alguna parte con velocidad prácticamente constante.

Si el centro de masa de un sistema está en reposo no es posible acelerarlo realizando fuerzas interiores. ¿Cómo entonces puede acelerar un cohete en el espacio vacío? Expulsando masa a gran velocidad hacia atrás. El centro de masa del sistema permanece donde mismo pero una parte de él, el cohete, acelera hacia adelante.

Si se dispara un proyectil, como sabemos el sigue una trayectoria parabólica. ¿Qué sucede si en algún punto de la trayectoria el proyectil explota y se divide en varios fragmentos? La fuerza externa no ha cambiado, sigue siendo el peso del proyectil original, por lo tanto el centro de masa de los fragmentos debe continuar moviéndose sobre la misma parábola.

► TEOREMA 8.2

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \quad (8.8)$$

DEMOSTRACION 14 *Para demostrarlo, basta considerar que*

$$\sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji},$$

porque los nombres de los índices de suma son irrelevante y se han intercambiado. Entonces

$$\sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0,$$

donde para obtener la última igualdad se ha usado $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$. Luego si se multiplican las ecuaciones de movimiento $\vec{r}_i \times$ y se suman todas se obtiene

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij},$$

la última sumatoria doble es cero luego

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \\ \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \end{aligned}$$

que prueba el teorema.

8.1.3. Sobre el momentum angular

La ecuación (8.8) nos dice que el momentum angular de un sistema puede cambiar solamente si se efectúa un torque externo sobre el sistema. El significado del momentum angular o la cantidad de movimiento angular no es tan simple de explicar como lo es la cantidad de movimiento lineal. En situaciones simples podemos buscar una interpretación. Por ejemplo si dos partículas iguales de masa m giran en torno a su centro de masa en reposo con rapidez v unidas por una cuerda liviana inextensible de longitud L entonces

$$\vec{L}_G = m\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m\vec{r}_2 \times \vec{v}_2,$$

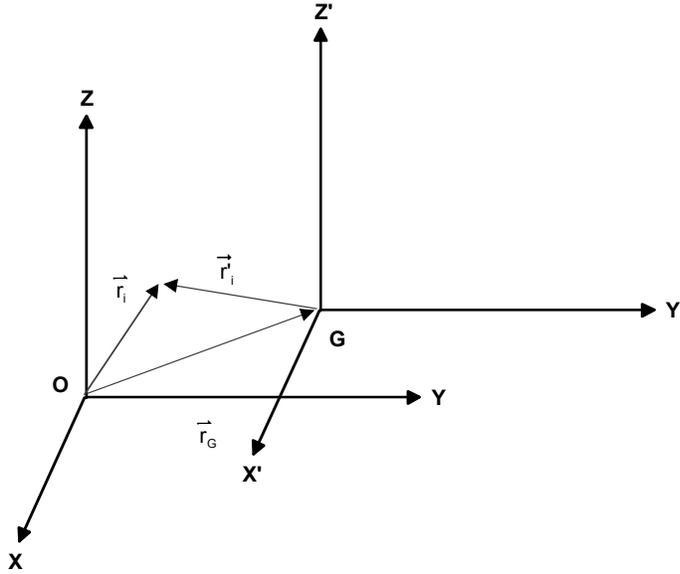
pero en esta situación $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 = \vec{v}$ luego

$$\vec{L}_G = m(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{v},$$

que es perpendicular al plano del movimiento y tiene magnitud

$$L_G = mLv.$$

Las ecuaciones (8.6) y (8.8) son, en general, insuficientes para determinar las posiciones de las partículas, siendo la excepción más notable un sistema rígido de partículas, que tiene justamente 6 grados de libertad, o en otras palabras, que su posición puede especificarse con solo 6 coordenadas o parámetros. Existen otros teoremas relativos al momentum angular y a la energía cinética que consideran dos sistemas de referencia, uno inercial con origen en O y otro no necesariamente inercial con origen en el centro de masa G y tal que sus ejes no roten, como se ilustra en la figura.



► TEOREMA 8.3
(Koenig)

$$\vec{L}_O = M\vec{r}_G \times \vec{v}_G + \vec{L}_G. \quad (8.9)$$

donde ahora $\vec{L}_G = \sum m\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i$ involucra posiciones y velocidades respecto a un sistema con origen en G tal que sus ejes no roten.

DEMOSTRACION 15 Tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_G + \vec{r}'_i, \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_G + \vec{v}'_i, \end{aligned}$$

de donde sigue que

$$\vec{L}_O = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum m_i (\vec{r}_G + \vec{r}'_i) \times (\vec{v}_G + \vec{v}'_i),$$

desarrollando

$$\vec{L}_O = \sum m_i \vec{r}_G \times \vec{v}_G + \sum m_i \vec{r}_G \times \vec{v}'_i + \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_G + \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i,$$

pero

$$\frac{\sum m_i \vec{r}'_i}{M} = \vec{r}'_G = 0,$$

lo cual causa que el segundo y tercer término de la expansión de \vec{L}_O se anulen probando entonces que

$$\vec{L}_O = M \vec{r}_G \times \vec{v}_G + \vec{L}_G. \quad (8.10)$$

► TEOREMA 8.4

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext}. \quad (8.11)$$

DEMOSTRACION 16 Derivamos el teorema anterior respecto al tiempo obteniendo

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = M \frac{d}{dt} (\vec{r}_G \times \vec{v}_G) + \frac{d}{dt} \vec{L}_G,$$

o

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G = \frac{d}{dt} \vec{L}_O - M \frac{d}{dt} (\vec{r}_G \times \vec{v}_G) = \frac{d}{dt} \vec{L}_O - M (\vec{r}_G \times \vec{a}_G),$$

usando teoremas anteriores

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_G &= \vec{\Gamma}_O^{ext} - \vec{r}_G \times \vec{F}^{ext}, \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r}_G \times \sum_i \vec{F}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_G) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \vec{\Gamma}_G^{ext}, \end{aligned}$$

que prueba el teorema.

► TEOREMA 8.5

(Koenig)

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + K_G, \quad (8.12)$$

siendo K_G la energía cinética relativa al sistema con origen en G .

DEMOSTRACION 17 *La demostración sigue de*

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_G + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_G + \vec{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_G) \cdot (\vec{v}_G) + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_G) \cdot (\vec{v}'_i) + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_G) + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}'_i), \end{aligned}$$

donde la segunda y tercera sumatoria son nulas, luego

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2} \sum m_i (v'_i)^2, \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + K_G, \end{aligned}$$

que prueba el teorema.

8.1.4. Torque en punto arbitrario

En general, si se considera otro sistema con origen en un punto A, cuyos ejes no roten, definimos

$$\vec{L}_A = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \frac{d}{dt} (\vec{r}_i - \vec{r}_A), \quad (8.13)$$

entonces demostraremos el siguiente teorema

► TEOREMA 8.6

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M \vec{A} \vec{G} \times \vec{a}_A, \quad (8.14)$$

DEMOSTRACION 18 *Derivando (8.13) tenemos*

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \\ &= \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) \\ &= \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) - \sum m_i \vec{r}_A \times (\vec{a}_i - \vec{a}_A) \\ &= \frac{d\vec{L}_0}{dt} - M \vec{r}_G \times \vec{a}_A - \vec{r}_A \times \sum \vec{F}_i^{ext} + M \vec{r}_A \times \vec{a}_A \\ &= \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i^{ext} + M (\vec{r}_A - \vec{r}_G) \times \vec{a}_A. \end{aligned}$$

que prueba el teorema

Sigue entonces que, la relación entre la derivada del momentum angular y torque, es válida para puntos (A) que cumplan una de las siguientes condiciones:

$$A = G, \quad \vec{a}_A = \vec{0}, \quad \vec{a}_A \text{ paralela a } \vec{AG}.$$

La tercera condición es de utilidad en algunos problemas de la dinámica del cuerpo rígido, como se ilustra en ese capítulo, cuando se tiene información sobre el movimiento de un punto determinado.

También podemos demostrar otro teorema

► **TEOREMA 8.7**

En general se tiene

$$\vec{L}_O = M\vec{r}_A \times \vec{v}_G + M\vec{AG} \times \vec{v}_A + \vec{L}_A.$$

DEMOSTRACION 19 *En efecto*

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum m_i(\vec{r}_i' + \vec{r}_A) \times (\vec{v}_i' + \vec{v}_A) \\ &= \sum m_i(\vec{r}_i' \times \vec{v}_i' + \vec{r}_A \times \vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times \vec{v}_A + \vec{r}_A \times \vec{v}_A), \\ &= \sum m_i(\vec{r}_i' \times \vec{v}_i' + \vec{r}_A \times \vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times \vec{v}_A + \vec{r}_A \times \vec{v}_A), \end{aligned}$$

siendo ahora

$$\begin{aligned} \sum m_i \vec{r}_i' &= M\vec{AG}, \\ \sum m_i \vec{v}_i' &= M(\vec{v}_G - \vec{v}_A), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_A + M\vec{r}_A \times \vec{v}_G + \sum m_i(\vec{r}_A \times \vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times \vec{v}_A) \quad (8.15) \\ &= \vec{L}_A + M\vec{r}_A \times \vec{v}_A + M\vec{r}_A \times (\vec{v}_G - \vec{v}_A) + M\vec{AG} \times \vec{v}_A \\ &= \vec{L}_A + M\vec{r}_A \times \vec{v}_G + M\vec{AG} \times \vec{v}_A. \end{aligned}$$

8.1.5. Teorema Energía Trabajo

Fuerzas conservativas y no conservativas

En el capítulo de dinámica se presentó este tema de un punto de vista más elemental. Como se explicó algunas fuerzas que dependen de la posición

$\vec{F}(\vec{r})$ tienen componentes que pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

o bien

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}), \quad (8.17)$$

con

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

el llamado operador "Nabla". Si eso es así, la fuerza se llama conservativa y la función escalar $V(\vec{r})$ se denomina la energía potencial asociada a esa fuerza. De las matemáticas se sabe es necesario que la fuerza satisfaga

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0},$$

o, en otras palabras, que su circulación para contornos cerrados arbitrarios sea nula

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

Las fuerzas que no satisfagan el anterior requisito se denominan fuerzas no conservativas. En el apéndice se dan más explicaciones matemáticas sobre este tema.

Trabajo realizado por una fuerza

Se define

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

y se llama trabajo infinitesimal realizado por la fuerza \vec{F} en el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$. Debe destacarse que esa forma no es en general una diferencial, es solamente una cantidad pequeña, a excepción del caso en que la fuerza sea conservativa.

Trabajo realizado por una fuerza conservativa (C)

La última afirmación puede establecerse de la siguiente forma. Si $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$ entonces

$$\begin{aligned} dW^C &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\nabla V(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \\ &= -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz, \\ &= -dV, \end{aligned}$$

y para un desplazamiento finito se tiene

$$W_{i \rightarrow f}^C = \int_i^f -dV = -(V_f - V_i) = -\Delta V, \quad (8.18)$$

que es evidentemente independiente del camino.

De las ecuaciones de movimiento es posible escribir una primera integral, donde, sin perder generalidad, se separan las fuerzas externas en sus posibles partes conservativa y no conservativa. Además se supone que las fuerzas de interacción son derivables de un potencial de interacción dependiente de la distancia entre las dos partículas y posiblemente de parámetros propios de ellas dos (masas, cargas, etc.). En el caso de un sistema rígido de partículas, la última suposición no es necesaria, por cuanto el trabajo que realizan las fuerzas de interacción es nulo, al mantenerse constantes las distancias entre partículas. Este teorema es:

► TEOREMA 8.8

$$\Delta(K + V + V^{int}) = W_{1 \rightarrow 2}^{NC}, \quad (8.19)$$

o

$$\Delta E = W_{1 \rightarrow 2}^{NC}$$

Aquí el trabajo no conservativo (NC) externo (*ext*) es la integral de línea

$$W_{1 \rightarrow 2}^{NC} = \int_1^2 \vec{F}^{ext,NC} \cdot d\vec{r}, \quad (8.20)$$

V es la energía potencial asociada a la posible parte conservativa de la fuerza externa y V^{int} la energía potencial de interacción. La energía mecánica es E definida por

$$E = K + V + V^{int}.$$

Si el lado derecho, que representa el trabajo realizado por la posible parte no conservativa de la fuerza exterior es cero, entonces se conserva la energía mecánica total del sistema. En el caso importante de un sistema rígido de partículas, al no variar las distancias entre las partículas, puede tomarse $V^{int} = 0$.

DEMOSTRACION 20 De las ecuaciones de movimiento (8.5) multiplique $\cdot d\vec{r}_i$ y sume todas las ecuaciones

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum_{j \neq i} \sum f_{ij} \cdot d\vec{r}_i,$$

pero el lado izquierdo puede modificarse a

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i &= \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \sum_i m_i d\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \\ &= \sum_i m_i d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = d\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = dK. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i &= \sum_i \vec{F}_i^C \cdot d\vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^{NC} \cdot d\vec{r}_i \\ &= -dV + dW^{NC}. \end{aligned}$$

Supondremos además que las fuerzas de interacción son conservativas de modo que

$$\sum_{j \neq i} \sum f_{ij} \cdot d\vec{r}_i = -dV^{int},$$

luego se tiene

$$dK = -dV + dW^{NC} - dV^{int},$$

e integrando

$$\Delta(K + V + V^{int}) = W_{1 \rightarrow 2}^{NC}.$$

La suma de las energía cinética y potenciales se denomina energía mecánica del sistema E

$$E = K + V + V^{int},$$

luego el teorema energía trabajo es

$$\Delta E = W_{1 \rightarrow 2}^{NC}$$

8.2. Sistema de dos partículas

El sistema de dos partículas interactuando a través de una fuerza conservativa es un caso soluble de sistemas de partículas. Tomando en cuenta la validez del principio de acción y reacción, las dos ecuaciones para ese caso son

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (8.21)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = -\vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (8.22)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (8.23)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{f}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (8.24)$$

no es posible integrarlo directamente pues si la primera intentamos integrarla, allí está \vec{r}_2 que no es conocida y similar problema existe si intentamos integrar la segunda. Para desacoplar estas ecuaciones conviene utilizar nuevas variables la posición del centro de masa

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (8.25)$$

y la posición relativa

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (8.26)$$

resultando

$$\begin{aligned} M \vec{a}_G &= \vec{0}, \\ \mu \vec{a} &= \vec{f}(\vec{r}), \end{aligned}$$

siendo μ la masa reducida del sistema de dos partículas, es decir

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.27)$$

Entonces, el problema se ha reducido a resolver el problema de una partícula de masa reducida μ en presencia de una fuerza central, con centro de fuerza en una de las partículas. Este resultado es sorprendentemente simple

considerando que el origen (la posición de una de las partículas) está acelerado. Si se determinan \vec{r}_G y \vec{r} , las ecuaciones (8.25) y (8.26) pueden invertirse obteniendo

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_G + \frac{m_2}{M}\vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_G - \frac{m_1}{M}\vec{r}.\end{aligned}\tag{8.28}$$

8.2.1. La energía cinética

La energía cinética del sistema

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2,$$

puede reducirse utilizando la derivada de las últimas ecuaciones

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_G + \frac{m_2}{M}\vec{v}, \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_G - \frac{m_1}{M}\vec{v},\end{aligned}$$

y resulta

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_G + \frac{m_2}{M}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_G - \frac{m_1}{M}\vec{v}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\mu v^2,\end{aligned}\tag{8.29}$$

donde $M = m_1 + m_2$.

8.3. Campo central de Fuerza

Consideraremos una partícula de masa μ sobre la cual actúa una fuerza central conservativa cuya dirección es paralela al vector posición \vec{r} . Más adelante, consideraremos más en detalle la presencia de los dos cuerpos y la transformación entre coordenadas relativas y coordenadas del laboratorio. Por ahora, el vector posición \vec{r} representará el vector posición relativo entre las dos partículas. Si escribimos la fuerza central como

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{r},$$

la ecuación de movimiento sera

$$\mu \vec{a} = -\frac{dV(r)}{dr} \hat{r},$$

y se deducen de aquí

► **TEOREMA 8.9**

Se conserva el momentum angular $\vec{l}_O = \mu \vec{r} \times \vec{v}$.

DEMOSTRACION 21 *Basta darse cuenta que*

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{0},$$

y entonces por un teorema ya demostrado

$$\vec{l}_O = \text{constante}.$$

► **TEOREMA 8.10**

La trayectoria está sobre un plano fijo, perpendicular al vector constante \vec{l}_O .

DEMOSTRACION 22 *Si*

$$\mu \vec{r} \times \vec{v} = \vec{l}_O = \text{constante},$$

entonces evidentemente

$$\vec{l}_O \cdot \vec{r} = 0,$$

que corresponde a la ecuación de un plano que pasa por el origen y es perpendicular a \vec{l}_O .

Por lo tanto, es suficiente utilizar coordenadas polares (r, θ) en el plano del movimiento. En esas coordenadas, las ecuaciones de movimiento serán

$$\mu \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \dot{\theta}^2 \right) = -\frac{dV(r)}{dr} \quad (8.30)$$

y

$$l_O = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constante}. \quad (8.31)$$

Eliminando $\dot{\theta}$ es posible escribir una ecuación radial para $r(t)$ y su primera integral que corresponde a la conservación de la energía E . Es decir

$$\mu \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{l_O^2}{\mu^2 r^3} \right) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

y

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r) = E = \text{constante.} \quad (8.32)$$

Si llamamos potencial efectivo para la coordenada radial a

$$U^{ef} = \frac{l_O^2}{2\mu r^2} + V(r), \quad (8.33)$$

este es diferente de cero para una partícula libre. El efecto del primer término es siempre repulsivo lo cual se puede entender, para el caso de una partícula libre que se mueve en línea recta, simplemente porque la distancia r al origen pasa siempre por un mínimo. Para potenciales $V(r)$ atractivos pueden haber máximos y mínimos de la distancia r , los llamados *puntos de retorno*.

8.3.1. Ecuación diferencial para la órbita

La dependencia de las variables polares en el tiempo es compleja. Es más simple encontrar la dependencia de la distancia con el ángulo, es decir encontrar la órbita. En efecto, haciendo uso de la conservación del momentum angular, es posible eliminar el tiempo de la ecuación radial (8.30) mediante

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{l_O^2}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta},$$

resultando para $s = 1/r$ la siguiente ecuación diferencial (ecuación de Binet):

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = -\frac{\mu}{l_O^2} \frac{dV(1/s)}{ds}. \quad (8.34)$$

Para un campo de fuerza inverso al cuadrado de la distancia, la integración de la última ecuación es simple. Es decir si

$$V(r) = -\frac{K}{r},$$

siendo la constante de proporcionalidad (no confundir con energía cinética) $K > 0$ para el caso atractivo y $K < 0$ para el caso repulsivo. Entonces la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} + s = \frac{\mu}{l_O^2} K,$$

cuya solución general, en términos de dos constantes e y α es

$$s = \frac{\mu K}{l_O^2} (1 - e \cos(\theta - \alpha)),$$

o bien

$$r = \frac{l_O^2}{\mu K} \frac{1}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}, \quad (8.35)$$

con e la excentricidad de la órbita y α la orientación del semieje mayor de la cónica resultante, que son constantes por determinar en términos de condiciones físicas conocidas inicialmente o en un punto de la trayectoria. Si

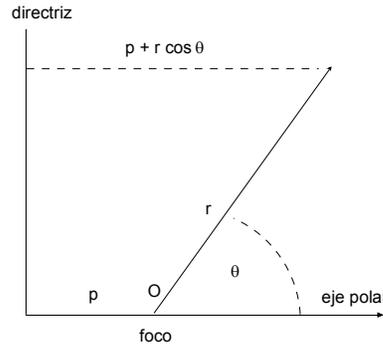


Figura 8.3: Sección cónica

se considera la definición de una cónica en términos de un foco y su distancia a la directriz p , como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de las distancias al foco y a la directriz es una constante e , la excentricidad de la cónica, se obtiene una ecuación de la misma forma. En efecto, con respecto a la figura (8.3), puede obtenerse

$$\frac{r}{p + r \cos \theta} = e \implies r = \frac{pe}{1 - e \cos \theta}.$$

En el caso atractivo, $K > 0$, la trayectoria es una elipse si $0 \leq e < 1$, una parábola si $e = 1$ y una hipérbola si $e > 1$. Valores de e negativos no son necesarios de considerar, pues ello correspondería simplemente a rotar la órbita en 180 grados, lo cual es preferible hacer con un valor adecuado de α , ver fig.(8.4).

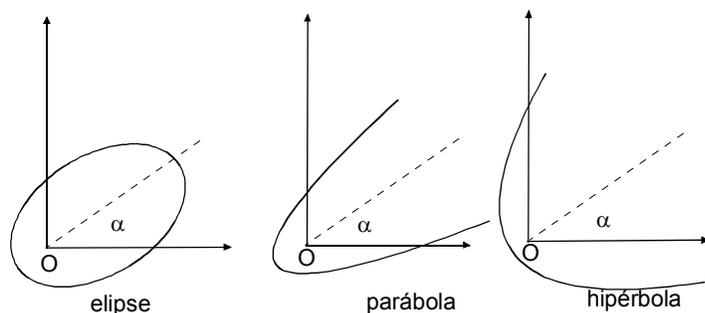


Figura 8.4: Tipos de cónicas

En el caso repulsivo, $K < 0$, la solución debería escribirse

$$r = \frac{l_O^2}{\mu |K|} \frac{1}{e \cos(\theta - \alpha) - 1},$$

es decir, en este caso, las trayectorias son hipérbolas. En el apéndice se muestran figuras que explican el nombre dado de secciones cónicas a estas curvas.

8.3.2. Excentricidad

Demostraremos que la excentricidad e en términos de la energía E está dada por

$$e^2 = 1 + \frac{2El_O^2}{mk^2}.$$

NOTA 8.1 De aquí en adelante hemos preferido representar por m la masa reducida del sistema en vez de μ . Además si se trata de un satélite de masa m en órbita respecto a un cuerpo mucho más masivo de masa M la masa reducida

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \simeq \frac{1}{m} \Rightarrow \mu \simeq m,$$

resulta ser prácticamente la masa del satélite.

Para esta situación, la ecuación de la órbita es

$$r = \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1 - e \cos \theta},$$

con

$$\begin{aligned} l_0 &= mr^2\dot{\theta}, \\ E &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r}, \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{l_0^2}{m^2r^2}) - \frac{k}{r} \end{aligned}$$

Si evaluamos la energía en el punto más cercano r_1 con $\theta = \pi$, allí $\dot{r} = 0$ resulta

$$r_1 = \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1+e},$$

y

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\left(\frac{l_0^2}{m^2r_1^2}\right) - \frac{k}{r_1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{l_0^2}{m}\right)\left(\frac{mk}{l_0^2}(1+e)\right)^2 - k\left(\frac{mk}{l_0^2}(1+e)\right) = -\frac{1}{2}k^2m\frac{1-e^2}{l_0^2}, \end{aligned}$$

de donde sigue el resultado

$$e^2 = 1 + \frac{2El_0^2}{mk^2}. \quad (8.36)$$

A pesar que la energía E es negativa para órbitas cerradas, el lado derecho de la fórmula anterior no es negativo. De análisis anterior

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{l_0^2}{m^2r^2}) - \frac{k}{r} \geq \frac{1}{2}m\left(\frac{l_0^2}{m^2r^2}\right) - \frac{k}{r}.$$

Pero la última expresión tiene un mínimo cuando

$$-\left(\frac{l_0^2}{mr^3}\right) + \frac{k}{r^2} = 0 \implies r = \frac{l_0^2}{km},$$

y el mínimo resulta

$$\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{l_0^2}{m^2r^2}\right) - \frac{k}{r}\right)_{\min} = -\frac{mk^2}{2l_0^2},$$

entonces

$$E \geq -\frac{mk^2}{2l_0^2}.$$

O sea la energía puede ser negativa, pero tiene una cota inferior, a menos que el momentum angular sea cero. Esto prueba el resultado.

8.3.3. Semi ejes de la elipse

Para el caso de órbita elíptica, demostraremos que los semiejes mayor y menor de la elipse están dados respectivamente por

$$a = \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1 - e^2}, \quad b = \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (8.37)$$

La ecuación de la órbita es

$$r = \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1 - e \cos \theta},$$

de manera que

$$\begin{aligned} 2a &= r(0) + r(\pi) \implies \\ a &= \frac{l_0^2}{2mk} \left(\frac{1}{1 - e} + \frac{1}{1 + e} \right) \\ &= \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{1 - e^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$b = (r \sin \theta)_{\text{máx}},$$

o sea debemos maximizar

$$y = \frac{l_0^2}{mk} \frac{\sin \theta}{1 - e \cos \theta},$$

derivando e igualando a cero, el máximo ocurre cuando

$$\cos \theta = e,$$

y de allí sigue

$$b = \frac{l_0^2}{mk} \frac{\sin \theta}{1 - e \cos \theta} = \frac{l_0^2}{mk} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2} = \frac{l_0^2}{mk} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

8.3.4. Ley de Kepler de los períodos

Demostraremos la ley de *Kepler* de los periodos, es decir que el periodo T en el caso de movimiento elíptico está dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} a^{\frac{3}{2}}. \quad (8.38)$$

Considere que

$$l_0 = |m\vec{r} \times \vec{v}| = mr^2\dot{\theta} = \text{constante.}$$

El área barrida en un intervalo de tiempo dt es

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt = \frac{l_0}{2m} dt,$$

de manera que

$$\begin{aligned} T &= \frac{A}{\frac{l_0}{2m}} = \frac{2m}{l_0} \pi ab, \\ T^2 &= \frac{4m^2}{l_0^2} \pi^2 a^2 b^2, \end{aligned}$$

pero ya sabemos que

$$b^2 = \frac{l_0^4}{m^2 k^2} \frac{1}{1 - e^2} = \frac{l_0^2}{mk} a,$$

entonces

$$T^2 = \frac{4m^2}{l_0^2} \pi^2 a^2 \frac{l_0^2}{mk} a = 4\pi^2 \frac{m}{k} a^3, \quad (8.39)$$

que prueba el resultado. Además $k = GMm$, luego

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3, \quad (8.40)$$

la forma más conocida de la tercera ley de Kepler.

8.4. Choques

Por choques entenderemos la interacción impulsiva o impulso, que ocurre cuando dos partículas (en realidad cuerpos sólidos) se colocan en contacto animadas de alguna velocidad, y como consecuencia de esa interacción, las velocidades experimentan cambios finitos en un intervalo de tiempo muy corto que, en una aproximación ideal, consideraremos infinitesimal. Si \vec{F} indica la fuerza de interacción que actúa sobre uno de los cuerpos, el impulso \vec{J} se define por

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt, \quad (8.41)$$

para el intervalo de tiempo que dura la interacción. Como $\vec{F} = m\vec{a}$, podemos integrar la expresión anterior y escribir

$$\vec{J} = m(\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)), \quad (8.42)$$

es decir el impulso que actúa sobre un cuerpo es igual al cambio de la cantidad de movimiento de él.

En los choques idealizados, que duran un instante infinitesimal de tiempo, se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema entre el instante inmediatamente anterior al choque y el inmediatamente posterior al choque. Esto es una consecuencia de despreñar otras fuerzas exteriores que se mantienen pequeñas respecto a la fuerza de interacción que alcanza una magnitud muy grande en ese pequeñísimo lapso de tiempo. Entonces una simple aplicación de la ley de acción y reacción para el intervalo de tiempo que dura el choque nos da

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}, \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= -\vec{F}, \end{aligned}$$

donde \vec{F} es la fuerza de interacción y en consecuencia

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{0}.$$

Si las velocidades de las partículas (1) y (2) se distinguen colocando una (t) a sus valores inmediatamente después del choque, se tiene entonces que en un choque se conserva la cantidad de movimiento lineal \vec{P}

$$\vec{P} = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2. \quad (8.43)$$

Además si los cuerpos tienen superficies suaves y continuas, se conserva la velocidad tangencial a la superficie de contacto pues, para la dirección tangencial, la fuerza de interacción es nula. Entonces, si distinguimos mediante T componentes tangenciales, se tiene que

$$\begin{aligned} m_1 \frac{dv_{1T}}{dt} &= F_T = 0, \\ m_2 \frac{dv_{2T}}{dt} &= -F_T = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} v'_{1T} &= v_{1T}, \\ v'_{2T} &= v_{2T}. \end{aligned} \tag{8.44}$$

8.4.1. Coeficiente de restitución

Cuando dos cuerpos chocan, aun cuando la duración sea muy corta, existen dos etapas. Primero existe una etapa en que los cuerpos se comprimen, etapa que llamaremos de compresión y en segundo lugar, existe una etapa donde los cuerpos se dilatan en cierta medida, etapa que llamaremos de restitución. De la misma forma separaremos la fuerza impulsiva o impulso que se desarrolla, en dos parte: el impulso de compresión \vec{J}_C y el impulso de restitución \vec{J}_R . Es un hecho experimental que el impulso de restitución es de magnitud menor o igual al de compresión, cuestión que define el coeficiente de restitución e mediante

$$\vec{J}_R = e\vec{J}_C,$$

con $0 \leq e \leq 1$. Además, la dirección del impulso \vec{J} ocurre en la dirección normal, de modo que podemos analizar lo que ocurre con las componentes normales de las velocidades de los cuerpos. Notemos que cuando termina la etapa de compresión, las componentes normales de las velocidades de los dos cuerpos son iguales. De la tercera ley de Newton se tiene que los impulso \vec{J}_1 y \vec{J}_2 que actúan sobre las partículas cumplen

$$\vec{J}_1 = -\vec{J}_2.$$

Aplicando la ecuación 8.42 a cada partícula y a cada etapa tenemos para las componentes normales que

$$\begin{aligned} J_{C_1} &= m_1(v_N - v_{1N}), \\ J_{C_2} &= m_2(v_N - v_{2N}), \\ J_{R_1} &= m_1(v'_{1N} - v_N), \\ J_{R_2} &= m_2(v'_{2N} - v_N), \end{aligned}$$

donde v_N indica la componente normal de velocidad común a ambos cuerpos al fin de la etapa de compresión y al inicio de la etapa de restitución.

De acuerdo a la definición del coeficiente e y a la tercera ley, las ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$\begin{aligned} J_{C_1}/m_1 &= v_N - v_{1N}, \\ -J_{C_1}/m_2 &= v_N - v_{2N}, \\ eJ_{C_1}/m_1 &= v'_{1N} - v_N, \\ -eJ_{C_1}/m_2 &= v'_{2N} - v_N. \end{aligned}$$

Restando las dos primeras y las dos últimas se obtiene

$$\begin{aligned} J_{C_1}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) &= v_{2N} - v_{1N}, \\ eJ_{C_1}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) &= v'_{1N} - v'_{2N}, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$v'_{1N} - v'_{2N} = e(v_{2N} - v_{1N}), \quad (8.45)$$

que indica la forma en que varían las componentes relativas normales de las partículas como resultado de un choque.

Se pueden distinguir tres casos según sea el valor del coeficiente de restitución:

- a) Choque plástico $e = 0$.
- b) Choque inelástico $0 < e < 1$.
- c) Choque elástico $e = 1$.

8.4.2. Choques unidimensionales

En un choque frontal, las velocidades permanecen sobre una misma línea antes e inmediatamente después del choque no siendo entonces considerar más que la dirección normal, es decir se trata de una situación unidimensional donde en particular aplicarán

$$P = m_1v'_1 + m_2v'_2 = m_1v_1 + m_2v_2, \quad (8.46)$$

$$v'_1 - v'_2 = e(v_2 - v_1). \quad (8.47)$$

de donde se pueden despejar las velocidades resultantes en la forma

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{e m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}, \\ v'_2 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{e m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Si el choque es elástico, $e = 1$, las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ v'_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (8.49)$$

y si las masas son iguales $m_1 = m_2$

$$v'_1 = v_2, \quad v'_2 = v_1.$$

8.4.3. Choques bidimensionales de esferas

Considere una pequeña esfera (2) inicialmente en reposo y otra (1) que se acerca con una cierta velocidad de magnitud v_1 de manera que ellas salen en ángulos θ y ϕ como se indica en la figura. Evidentemente, la esfera (2)

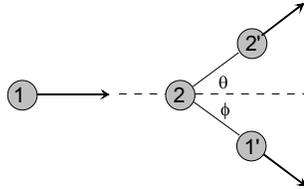


Figura 8.5: Choque en dos dimensiones.

por estar en reposo antes del choque, fue golpeada en la dirección en que ella sale. Esa es entonces la dirección normal N . La dirección tangente está entonces a 90° . Así tenemos

- Normal

$$m_1 v_1 \cos \theta = m_1 v'_1 \cos(\theta + \phi) + m_2 v'_2, \quad (8.50)$$

- Tangencial

$$m_1 v_1 \sin \theta = m_1 v'_1 \sin(\theta + \phi), \quad (8.51)$$

- Coeficiente de restitución

$$e v_1 \cos \theta = v'_2 - v'_1 \cos(\theta + \phi). \quad (8.52)$$

Entre la primera y tercera eliminemos v'_2

$$(m_1 - e m_2) v_1 \cos \theta = (m_1 + m_2) v'_1 \cos(\theta + \phi),$$

y si dividimos por la tercera se obtiene

$$(m_1 - e m_2) \cot \theta = (m_1 + m_2) \cot(\theta + \phi), \quad (8.53)$$

que establece una relación entre los ángulos. Si las masas son iguales y el choque es elástico entonces resulta

$$\cot(\theta + \phi) = 0,$$

es decir la suma de los ángulos es $\pi/2$. Si ambas velocidades antes del choque son dadas, y si se trata de choque de esferas, las direcciones normal y tangencial deben ser determinadas haciendo consideraciones geométricas.

Por ejemplo, vea la figura (8.6)

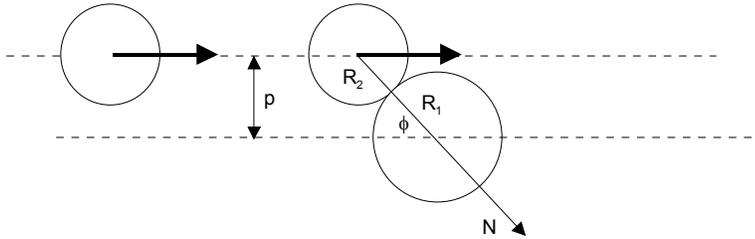


Figura 8.6: Choque esferas.

Si la esfera de radio R_2 se acerca a otra de radio R_1 que está en reposo siendo p la distancia entre las líneas que contienen los centros en la dirección de la velocidad de la esfera incidente, entonces el ángulo ϕ que da la dirección de la normal, queda determinado geoméricamente por

$$\sin \phi = \frac{p}{R_1 + R_2}.$$

Esto es el ángulo ϕ queda determinado por p y los radios y el ángulo θ será determinado de acuerdo a

$$(m_1 - em_2) \cot \theta = (m_1 + m_2) \cot(\theta + \phi). \quad (8.54)$$

8.4.4. Consideraciones sobre la energía

Fué demostrado al estudiar el problema de dos cuerpos que la energía cinética del sistema es

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \mu v^2. \quad (8.55)$$

Donde μ es la masa reducida del sistema

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

El choque no afecta la velocidad del centro de masa, luego la variación de la energía cinética que ocurre en un choque es

$$K' - K = \frac{1}{2} \mu v'^2 - \frac{1}{2} \mu v^2.$$

Aquí, v es la rapidez relativa entre las partículas

$$\begin{aligned} v^2 &= (v_{2T} - v_{1T})^2 + (v_{2N} - v_{1N})^2, \\ v'^2 &= (v'_{2T} - v'_{1T})^2 + (v'_{2N} - v'_{1N})^2 \end{aligned}$$

pero las componentes tangenciales no son afectadas, luego

$$\begin{aligned} v'^2 - v^2 &= (v'_{2N} - v'_{1N})^2 - (v_{2N} - v_{1N})^2 \\ &= (e^2 - 1)(v_{2N} - v_{1N})^2 \\ &= -(1 - e^2)(v_{2N} - v_{1N})^2, \end{aligned}$$

es decir en general, hay una pérdida de energía cinética dada por

$$K' - K = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (v_{2N} - v_{1N})^2. \quad (8.56)$$

Hay conservación solamente en el caso de choque elástico $e = 1$. El caso $v_{2N} - v_{1N} = 0$ se descarta porque entonces no hay choque.

8.5. Sistemas de masa variable

Con algunas consideraciones pueden tratarse sistemas que ganan o pierden masa en forma continua. Para ello considere un análisis diferencial de lo que ocurre cuando un sistema de masa inicial $m(t)$ con una velocidad $\vec{v}(t)$ y sobre el que actúa una fuerza externa $\vec{F}(t)$, incorpora una cantidad infinitesimal de masa dm la cual tiene, justo antes de incorporarse, una velocidad $\vec{u}(t)$. Transcurrido un tiempo dt , la masa del sistema es $m(t) + dm$. La cuestión es: ¿cuánto ha variado la velocidad del sistema en este proceso? Para

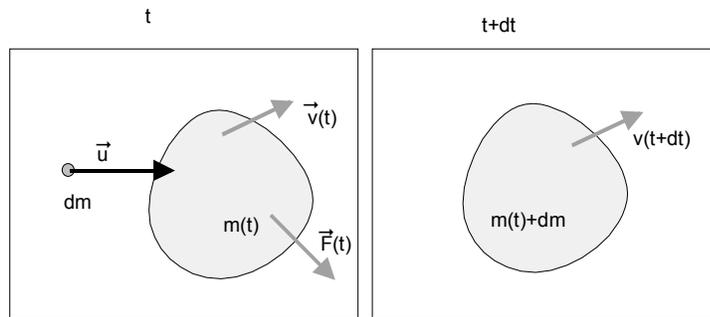


Figura 8.7:

este efecto considere que el sistema total es de masa constante, por lo tanto podemos usar el hecho que el cambio de la cantidad de movimiento total es producido por la fuerza $\vec{F}(t)$ solamente, es decir

$$\vec{F}(t)dt = (m(t) + dm)(\vec{v}(t) + d\vec{v}(t)) - (\vec{u}(t)dm + m(t)\vec{v}(t)),$$

de aquí, despreciando infinitésimos de segundo orden, se establece el resultado

$$\vec{F}(t) = m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} - (\vec{u}(t) - \vec{v}(t))\frac{dm(t)}{dt}. \quad (8.57)$$

Aun cuando el análisis ha sido hecho para sistemas que ganan masa, el mismo resultado se obtiene para sistemas que pierden masa, pero en este último caso $\vec{u}(t)$ representará la velocidad de los elementos de masa justo después de abandonar el sistema.

Note que $(\vec{u}(t) - \vec{v}(t))$ representa la velocidad relativa de los elementos de masa dm con respecto al sistema de masa $m(t)$.

La ecuación 8.57 también puede escribirse

$$\vec{F}(t) = m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + (\vec{v}(t) - \vec{u}(t)) \frac{dm(t)}{dt}, \quad (8.58)$$

siendo en este caso $(\vec{v}(t) - \vec{u}(t))$ la velocidad relativa del sistema de masa $m(t)$ con respecto a los elementos de masa dm .

EJEMPLO 8.5.1 *Una cadena flexible de longitud total L y de masa total M se suspende de modo que su extremo inferior está justo al nivel del suelo y se suelta. Determine la reacción que ejerce el suelo sobre el montón que se acumula mientras la cadena cae. (Se supone que los eslabones son infinitesimales y que no rebotan en el suelo).*

Solución. Sea el sistema de masa variable el montón acumulado, de modo que, en la dirección vertical

$$v(t) = 0, \quad u(t) = -gt, \quad F(t) = R(t) - mg, \quad m = \frac{M}{L} \frac{1}{2} gt^2.$$

Por lo tanto, la ecuación (8.57) nos da

$$R(t) - mg = -u \frac{dm}{dt},$$

y finalmente

$$R(t) = \frac{3}{2} \frac{M}{L} g^2 t^2.$$

EJEMPLO 8.5.2 *Una cadena flexible de longitud total L y de masa total M viene deslizando sobre una superficie horizontal lisa con rapidez v_0 , en la dirección positiva del eje OX . Al llegar al origen se encuentra con un bloque de masa M inicialmente en reposo. Determine la posición del bloque en función del tiempo mientras la cadena se acumula contra él. (Se supone que los eslabones son infinitesimales y que no rebotan en el bloque).*

Solución. Sea x la coordenada del bloque. La masa total del sistema, bloque más trozo acumulado será

$$m(t) = M + \frac{M}{L} (v_0 t - x),$$

además $u(t) = v_0$, $v(t) = \dot{x}$, $F(t) = 0$, de modo que la ecuación (8.57) conduce a la siguiente ecuación diferencial

$$0 = \left(M + \frac{M}{L}(v_0 t - x) \right) \ddot{x} - \frac{M}{L}(v_0 - \dot{x})^2,$$

o bien, en términos de una variable auxiliar $z = L + v_0 t - x$

$$0 = z\ddot{z} + \dot{z}^2,$$

con condiciones iniciales $z(0) = L$, $\dot{z}(0) = v_0$. Integrando dos veces se obtiene

$$\dot{z} = \frac{Lv_0}{z}, \quad \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}L^2 + Lv_0 t,$$

y finalmente

$$x = L + v_0 t - \sqrt{L^2 + 2Lv_0 t}, \quad \text{si } t < L/v_0.$$

Más tarde, el sistema continúa moviéndose con la rapidez constante alcanzada al agotarse la cadena. (Ello ocurre cuando $(v_0 t - x)M/L = M$, o bien $z = 2L$)

EJEMPLO 8.5.3 Una cadena flexible de masa distribuida uniformemente $\lambda \text{ kg m}^{-1}$ está amontonada en el suelo y se aplica a uno de sus extremos, una fuerza constante hacia arriba F . Determine la altura de la cadena levantada en función del tiempo.

Solución. Sea y la altura. Aquí $u = 0$, $v = \dot{y}$, $m = \lambda y$, de modo que la ecuación de movimiento será

$$F - \lambda y g = \lambda y \ddot{y} + \lambda \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \lambda \left(y \frac{d\dot{y}^2}{dy} + 2\dot{y}^2 \right)$$

la cual puede ser integrada mediante un factor integrante y . Así resulta

$$2Fy - 2\lambda y^2 g = \lambda \frac{d}{dy} (y^2 \dot{y}^2),$$

entonces $F - \frac{2}{3} \lambda y g = \lambda \dot{y}^2$ de donde se obtiene

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2}{3} y g}, \quad t = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2}{3} y g}},$$

y finalmente

$$y = t\sqrt{\frac{F}{\lambda}} - \frac{1}{6}gt^2.$$

Aunque parezca paradójico, la rapidez inicial del extremo de la cadena después de aplicada la fuerza no es cero, es $\sqrt{F/\lambda}$ cuestión que se explica pues se ha aplicado una fuerza finita, a un elemento infinitésimo de masa. Además puede observarse que la cadena se detiene cuando $F = \frac{2}{3}\lambda yg$, y para ese instante el largo levantado tiene un peso $\lambda yg = \frac{3}{2}F$, mayor que la fuerza aplicada. Naturalmente después bajará hasta que finalmente sea $\lambda yg = F$.

EJEMPLO 8.5.4 *Un depósito cilíndrico de masa despreciable con base circular de radio R tiene líquido (agua por ejemplo) inicialmente hasta una altura h_0 . Al nivel del suelo liso se hace un pequeño agujero circular radio r por el cual sale agua horizontalmente. Determine la aceleración del depósito producto de la pérdida de masa.*

Solución. Sea $h(t)$ la altura del agua en el depósito y ρ su densidad. Si suponemos que la aceleración no afecta demasiado la superficie del agua podemos estimar la forma en que decrece la masa del líquido en el recipiente si $r \ll R$, para el depósito estacionario. La rapidez de salida por el orificio (relativa al recipiente) será de magnitud $\sqrt{2gh}$, de modo que el caudal másico de salida será $\rho\sqrt{2gh}\pi r^2$. Entonces la masa del líquido disminuye de la forma

$$\frac{dm}{dt} = -\rho\sqrt{2gh}\pi r^2,$$

pero

$$m = \rho\pi R^2 h$$

luego

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{2gh}\frac{r^2}{R^2}$$

de donde integrando se obtiene

$$2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0} = -\sqrt{2g}\frac{r^2}{R^2}t.$$

Ahora planteamos la ecuación de movimiento suponiendo que la velocidad relativa del agua que sale es

$$u - v = -\sqrt{2gh}$$

así resulta

$$0 = m(t) \frac{dv(t)}{dt} - \left(-\sqrt{2gh}\right) \frac{dm(t)}{dt},$$

$$0 = \rho\pi R^2 h \frac{dv(t)}{dt} - \left(-\sqrt{2gh}\right) (-\rho\sqrt{2gh} \pi r^2)$$

simplificando

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{2gr^2}{R^2}$$

mientras quede líquido en el recipiente. Si el recipiente tiene una masa M el único cambio que se produce es

$$0 = (M + \rho\pi R^2 h) \frac{dv(t)}{dt} - \left(-\sqrt{2gh}\right) (-\rho\sqrt{2gh} \pi r^2)$$

de donde

$$a = \frac{dv}{dt} = 2g \frac{h\rho\pi r^2}{M + \rho\pi R^2 h},$$

donde ahora influye la altura que es función del tiempo

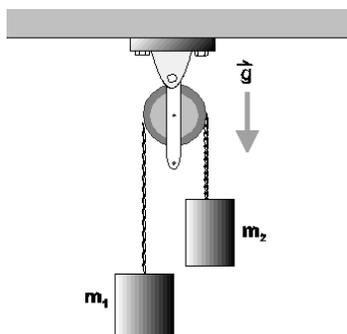
$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{r^2}{R^2} t\right)^2.$$

8.6. Ejercicios.

NOTA 8.2 (1), (2), (3) y (4) representan el grado de dificultad del problema. El (1) corresponde a problemas tipo prueba, el (2) corresponde a problemas discriminatorios y el (3) a problemas de tareas. (4) Es para expertos.

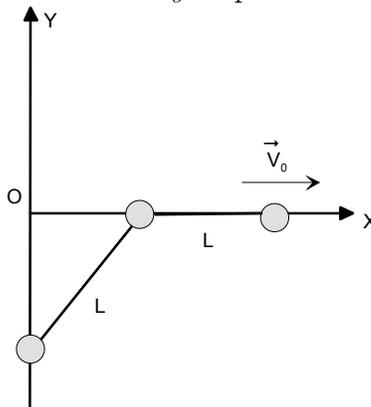
8.6.1. Sistema de partículas

EJERCICIO 8.1 (1) *La figura muestra una polea fija de masa despreciable y sin roce de la cual penden 2 partículas de masas m_1 y m_2 ($m_2 > m_1$), unidas por una cuerda liviana e inextensible. Calcule la aceleración de cada partícula y la aceleración del centro de masa del sistema de partículas.*



Respuesta: $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \hat{j}$, $\vec{a}_{cm} = \left[\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right]^2 \vec{g}$

EJERCICIO 8.2 (2) Tres partículas de igual masa m , unidas por barras rígidas de largo L y masa despreciable, están obligadas a moverse sobre los ejes tal como lo muestra la figura. Si la partícula de la derecha tiene la velocidad $\vec{v} = v_0 \hat{i}$, determine la velocidad del centro de masa, el momento angular del sistema respecto del centro de masa y respecto del origen O .

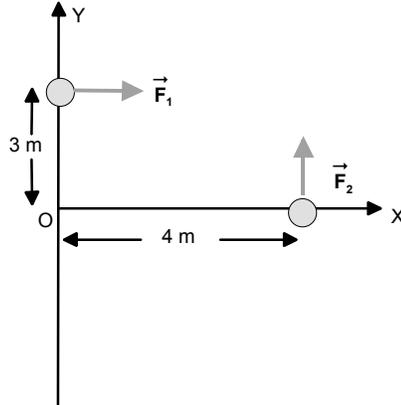


Respuesta: $\vec{v}_{cm} = \frac{1}{3}(2v_0, v_0 \tan \theta)$, $\vec{L}_{CM} = -\frac{mLv_0}{3} (\tan \theta + 2 \sin \theta \tan \theta + 2 \cos \theta) \hat{k}$; $\vec{L}_O = \vec{0}$

EJERCICIO 8.3 (1) Las posiciones de dos partículas A y B de masa $m_a = 1 \text{ kg}$ y $m_b = 2 \text{ kg}$ son respectivamente $\vec{r}_a = (4 - t; 3t^2)$ y $\vec{r}_b = (5 - 2t - t^2; 10)$. Determine en $t = 4 \text{ s}$ la fuerza neta exterior sobre el sistema de partículas, el momentum angular y torque respecto del origen del sistema de coordenadas.
Respuesta: $(-4; 6) \text{ N}$, $(0; 0; 248) \text{ Js}$, $(0; 0; 40) \text{ J}$.

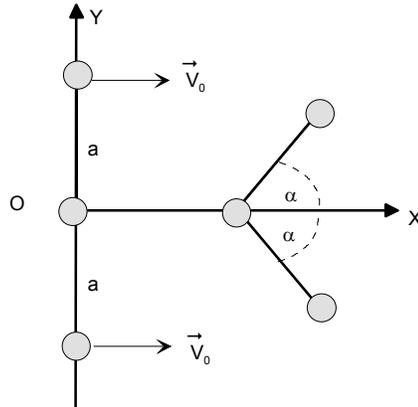
EJERCICIO 8.4 (1) La figura muestra un sistema formado por dos partículas cuyas masas son $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 6 \text{ kg}$. Las fuerzas netas que actúan sobre

cada una de ellas respectivamente $\vec{F}_1 = 8\hat{i}\text{ N}$ y $\vec{F}_2 = 6\hat{j}\text{ N}$. Inicialmente el sistema se encuentra en reposo. Calcule en función del tiempo las coordenadas del centro de masa y el momentum lineal total.



Respuesta: $r_{cm} = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}t^2, \frac{15}{8} + \frac{3}{16}t^2\right)$; $\vec{P} = (8t, 6t)$

EJERCICIO 8.5 (2) Tres partículas de igual masa m descansan sobre una superficie horizontal lisa, unidas mediante cuerdas de largo a sin masa, ubicadas en la línea recta que la une tal como se muestra en la figura. Inicialmente, a las partículas de los extremos se les da una velocidad inicial perpendicular a la cuerda de magnitud V_0 mientras la partícula del centro continúa en reposo. Determine:



- La velocidad del centro de masa en cualquier instante,
- La velocidad de las partículas en el instante que chocan las partículas extremas,

- c) *El momentum angular del sistema de partícula respecto al origen del sistema. Respuesta:* $\vec{v}_{cm} = \frac{2}{3}V_0\hat{i}$; $\vec{v}_a = \frac{1}{3}(2V_0, -\sqrt{3}V_0)$; $\vec{v}_b = \frac{2}{3}(V_0, 0)$; $\vec{v}_c = \frac{1}{3}(2V_0, \sqrt{3}V_0)$; $\vec{L}_0 = \vec{0}$

EJERCICIO 8.6 (1) *Tres partículas de masa $m_1 = 2\text{ kg}$, $m_2 = 3\text{ kg}$ y $m_3 = 5\text{ kg}$, se mueven bajo la influencia de un campo de fuerza de modo que sus posiciones relativas a un sistema de coordenadas son:*

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= 2t\hat{i} - 3\hat{j} + t^2\hat{k} \text{ m} \\ \vec{r}_2 &= (t+1)\hat{i} + 3t\hat{j} - 4\hat{k} \text{ m} \\ \vec{r}_3 &= t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t-1)\hat{k} \text{ m}\end{aligned}$$

Calcule:

- a) *El momentum angular total del sistema,*
 b) *El torque total externo aplicado al sistema respecto del origen,*
 c) *El momento angular total y el torque respecto al centro de masa. Respuesta:*

$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= (31 - 12t, -12 - 10t + 6t^2, 21 + 5t^2); \\ \vec{\tau}_0^{\text{neto}} &= (-12, -10 + 12t, 10t); \\ \vec{L}_{cm} &= (30,2 - 9,6t - 0,8t^2, 26,9 + 8,2t + 2,4t^2, 15,6 - 6t + 3t^2); \\ \vec{\tau}_{cm} &= (-9,6 - 1,6t, 8,2 + 4,8t, -6 + 6t)\end{aligned}$$

EJERCICIO 8.7 (1) *Una granada inicialmente en reposo, estalla en 3 pedazos de masas m_1 , m_2 y m_3 cuyas velocidades son respectivamente:*

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= 6\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}, \\ \vec{v}_2 &= -5\hat{i} - 7\hat{j} - 8\hat{k}, \\ \vec{v}_3 &= -8\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\end{aligned}$$

Determine la relación entre sus masas. Respuesta: $m_1 : m_2 : m_3 = 3 : 2 : 1$

EJERCICIO 8.8 (3) *Si cada partícula de un sistema es atraída hacia un punto fijo O con una fuerza proporcional a su masa y a su distancia al punto O , demuestre que el centro de masa se mueve como si fuera una partícula del sistema.*

EJERCICIO 8.9 (3) *Un conjunto de partículas de masas m , puede deslizar libremente sobre alambres paralelos, atrayéndose unas a otras con fuerzas proporcionales al producto de sus masas y distancias. Demuestre que las partículas efectúan oscilaciones armónicas del mismo período relativas a un plano perpendicular a los alambres y que pasa por el centro de masa supuesto en reposo.*

EJERCICIO 8.10 (3) *Dos partículas iguales se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Si las partículas deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto, demuestre que el centro de masa describe una cónica con su foco en la intersección de las correderas.*

EJERCICIO 8.11 (3) *Dos partículas de igual masa deslizan sobre correderas lisas perpendiculares que se interceptan en 0 . Demuestre que si las partículas se atraen y ellas parten desde el reposo desde posiciones cualquiera sobre las correderas, ellas llegarán simultáneamente a la intersección.*

EJERCICIO 8.12 (2) *Dos partículas de masa m cada una se mueven sobre las correderas lisas perpendiculares OX y OY y se atraen con una fuerza proporcional a su distancia, siendo K la constante de proporcionalidad. Si inicialmente:*

$$\begin{aligned}x(0) &= a, & y(0) &= a, \\ \dot{x}(0) &= -V_0, & \dot{y}(0) &= 0,\end{aligned}$$

a) Determine $x(t)$, $y(t)$ y b) Determine la ecuación cartesiana de la trayectoria del centro de masa del sistema.

EJERCICIO 8.13 (3) *Dos partículas de igual masa están unidas por un resorte de constante k y largo natural a . Además actúa entre ambas partículas una fuerza amortiguadora proporcional a la rapidez de la variación de la distancia entre ellas. El sistema se coloca en movimiento dándole a una de las partículas una velocidad V_0 perpendicular a la línea que une las partículas. Determine V_0 si después de un tiempo muy largo, el largo del resorte es $2a$.*

EJERCICIO 8.14 (2) *Tres partículas iguales están inicialmente en línea recta, igualmente espaciadas sobre un plano horizontal liso y unidas por dos hilos de largos " a ". La partícula del medio está inicialmente en reposo, y a las partículas externas se les da una velocidad V_0 perpendicular a la línea que las une. Calcule la velocidad con que chocan las partículas.*

8.6.2. Choques

EJERCICIO 8.15 *Una partícula de masa M se encuentra en reposo mientras que otra partícula de masa m se acerca con rapidez v y la choca frontalmente siendo e el coeficiente de restitución. Determine las velocidades resultantes del choque.*

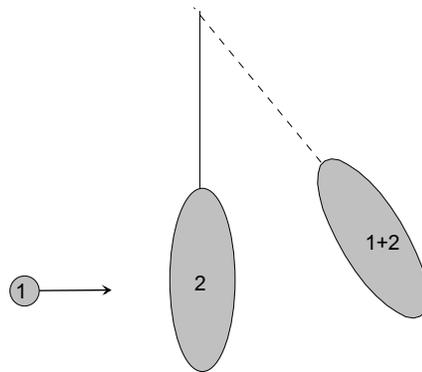
EJERCICIO 8.16 (1) *Una partícula de masa M se encuentra en reposo mientras que otra partícula de masa m se acerca con rapidez v y la choca frontalmente siendo $e = 0$ el coeficiente de restitución. Determine las velocidades resultantes del choque.*

EJERCICIO 8.17 (3) *Una partícula de masa m se suelta desde una altura h y los choques que ocurren contra el suelo son con coeficiente de restitución e . Determine el tiempo total que demoran en ocurrir todos los choques.*

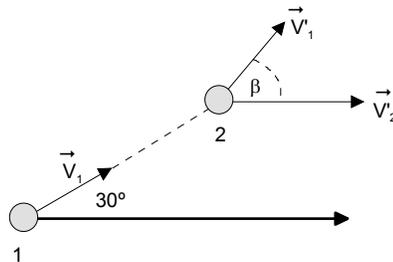
EJERCICIO 8.18 (3) *Respecto a la situación del problema anterior, determine la distancia total recorrida por la partícula.*

EJERCICIO 8.19 (1) *Una partícula de masa $m = 1$ kg está en reposo mientras que otra de masa $m = 3$ kg se acerca con rapidez 5 m s^{-1} por la izquierda y la choca con coeficiente de restitución $e = 0,5$. La partícula que estaba en reposo se coloca en movimiento y choca frontalmente contra una pared fija con coeficiente de restitución $e = 1$, devolviéndose. Determine las velocidades finales una vez que todos los choques terminen.*

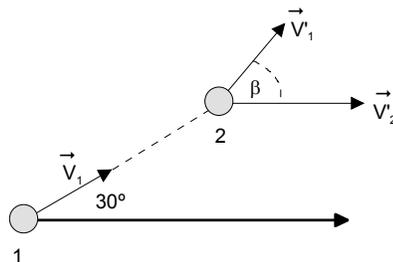
EJERCICIO 8.20 (1) *Una partícula de masa m (una bala) se acerca horizontalmente con rapidez V y se incrusta en un saco de arena de masa M que cuelga de un cordel de longitud L . Por efecto del choque el sistema "saco + bala", sube una altura h , respecto a su altura inicial. Determine en términos de m , M , L , h la velocidad de la bala.*



EJERCICIO 8.21 (1) *La figura muestra el choque de dos bolas de billar. La bola 2 se encuentra inicialmente en reposo y la bola 1, antes del choque, tiene una velocidad de V_1 en la dirección que se indica. Después del choque la bola 2 sale en la dirección indicada con una rapidez de V_2' . Determine la mínima rapidez posible V_2' .*



EJERCICIO 8.22 (1) *Respecto a la situación del problema anterior si $V_1 = 4 \text{ ms}^{-1}$ y $e = 0,5$ determine la rapidez V_2' y el ángulo β .*



Solución. Las ecuaciones son las mismas.

$$\begin{aligned}V_2' + V_1' \cos \beta &= \frac{1}{2}V_1\sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \\V_1' \sin \beta &= \frac{1}{2}V_1 = 2, \\V_2' - V_1' \cos \beta &= \frac{1}{2}eV_1\sqrt{3} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Similarmente

$$V_2' = \frac{1}{4}V_1\sqrt{3}(1+e) = \frac{3}{2}\sqrt{3}\text{ m s}^{-1}$$

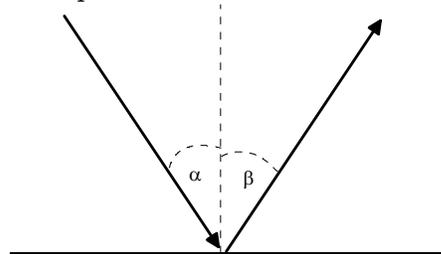
Restamos la primera menos la tercera y se obtiene

$$V_1' \cos \beta = \frac{1}{4}(1-e)V_1\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

dividimos por la tercera

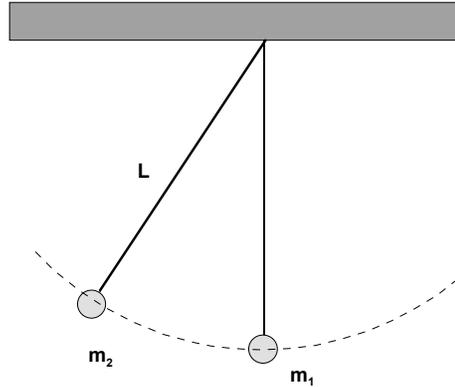
$$\begin{aligned}\cot \beta &= \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \beta &= 66.59^\circ.\end{aligned}$$

EJERCICIO 8.23 (1) Una pelota de 0,5 kg incide sobre una superficie horizontal rígida con una rapidez de 50 m s^{-1} en un ángulo de $\alpha = 60^\circ$ con la vertical, ver figura ???. Si el coeficiente de restitución de la pelota con el suelo es $e = 0,6$, determine el valor absoluto del cambio de momentum lineal experimentado por la tierra en el intervalo de tiempo que dura el choque y el ángulo β con que rebota la pelota.



Respuesta: 20 kg m s^{-1} ; $70,89^\circ$

EJERCICIO 8.24 (1) Una esfera de masa m_1 , en reposo, cuelga de una cuerda inextensible de largo L . Otra esfera masa m_2 , unida a una cuerda de igual longitud, se suelta del reposo como se muestra en la figura. Determine en términos de m_1 , m_2 , l y la altura a que vuelve a subir m_2 respecto a la posición inicial de m_1 si el choque es: (a) elástico (b) plástico y (c) inelástico con coeficiente de restitución e .



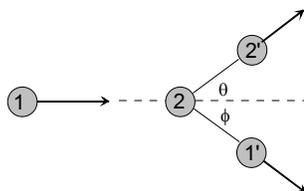
Respuesta: $\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 L(1 - \cos \alpha)$; $\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 L(1 - \cos \alpha)$; $\left(\frac{em_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 L(1 - \cos \alpha)$

EJERCICIO 8.25 (3) Una partícula de masa m_1 y velocidad \vec{v}_1 choca con otra partícula de masa m_2 en reposo. El choque no es elástico de modo que $0 < e < 1$. Después del choque la masa m_1 se mueve perpendicularmente a la dirección de incidencia. Si Q es la energía disipada durante el choque y K_1 la energía cinética de m_1 antes del choque, demostrar que la energía cinética K'_1 de m_1 después del choque es:

$$K'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left[K_1 \frac{(m_2 - m_1)}{m_2} - Q \right]$$

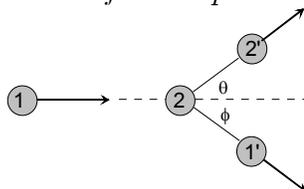
Determine además, el calor disipado Q en función del coeficiente de restitución e . Respuesta: $(1 - e)K_1$

EJERCICIO 8.26 (1) Una partícula (2) de masa m está en reposo y otra de la misma masa (1) se acerca con rapidez V y la choca lateralmente de manera que la que estaba en reposo sale en $\theta = 30^\circ$ respecto a la dirección de incidencia de la primera. Si el choque es con coeficiente de restitución $e < 1$ determine el ángulo ϕ desviación de la partícula incidente. Suponga que la velocidad relativa tangencial no es afectada por el choque.



EJERCICIO 8.27 (1) Demuestre que en el choque lateral y elástico de dos partículas de la misma masa una de las cuales estaba en reposo, los ángulos en que se desvían las partículas respecto a la dirección de incidencia de la móvil, suman 90 grados, es decir que $\theta + \phi = \pi/2$.

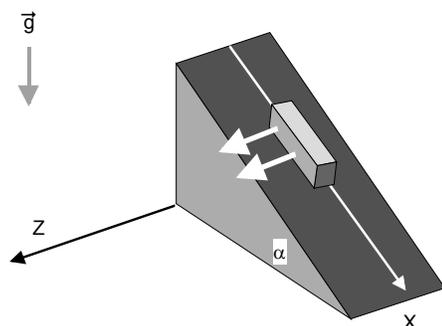
EJERCICIO 8.28 (1) Una partícula (2) de masa m_2 está en reposo y otra de masa m_1 (1) se acerca con rapidez V_1 y la choca lateralmente de manera que la que estaba en reposo sale en un ángulo θ respecto a la dirección de incidencia de la primera. Si el choque es con coeficiente de restitución $e < 1$ determine la suma $\theta + \phi$ en términos de m_1 , m_2 , e y θ . Suponga que la velocidad relativa tangencial no es afectada por el choque.



8.6.3. Masa variable

EJERCICIO 8.29 (1) Una gota de agua de masa 0,1 g se deja caer desde cierta altura en un ambiente de vapor de agua. El vapor de agua se condensa en ella a razón constante de $0,001 \text{ g s}^{-1}$. Considerando en reposo el vapor, determine la rapidez de la gota al cabo de 10 s. Respuesta: $95,45 \text{ m s}^{-1}$

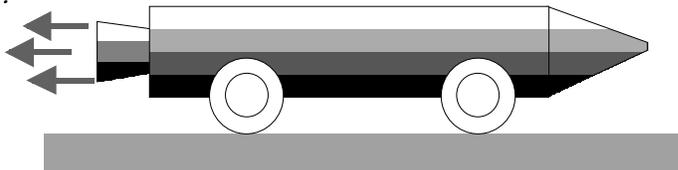
EJERCICIO 8.30 (1) Un carro con arena de masa 100 kg parte del reposo rodando sobre rieles inclinados en $\alpha = 30^\circ$ respecto de la horizontal. Debido a cierto dispositivo, del carro sale un chorro de arena a una tasa constante de 2 kg s^{-1} con una velocidad relativa al carro de $1 \hat{k} \text{ m s}^{-1}$ como se muestra en la figura. Despreciando efectos disipativos, determine en $t = 10 \text{ s}$ la fuerza neta que actúa sobre el sistema.



Respuesta: (400; 0; 2) N

EJERCICIO 8.31 (1) Un cohete de lanzamiento vertical, sube con una aceleración de $g/7 \text{ m s}^{-2}$. Si la velocidad relativa de los gases respecto del cohete es constante y de valor absoluto 800 m s^{-1} , determine la masa del cohete en función del tiempo si su masa inicial, incluido el combustible es de 4000 kg.
Respuesta: $m_0 e^{-t/70}$

EJERCICIO 8.32 (1) La figura muestra un móvil de masa 1000 kg, inicialmente en reposo, que contiene además 200 kg de combustible. Su motor quema el combustible a razón constante 10 kg s^{-1} . El móvil puede desplazarse sobre una superficie horizontal lisa. Si la velocidad relativa del móvil respecto de los gases quemados es de 20 m s^{-1} , determine la velocidad del móvil transcurridos 15 s.



Respuesta: $2,67 \text{ m s}^{-1}$

EJERCICIO 8.33 (2) Un cohete de prueba de masa M_0 , incluido el combustible, desliza por una rampla horizontal sin roce con una rapidez v_0 . Con el fin de frenarlo, expulsa gases en sentido opuesto al movimiento a razón constante de $\sigma \text{ kg s}^{-1}$. Si la rapidez del cohete en función del tiempo es:

$$v = \frac{M_0 v_0 - K \sigma t}{(M_0 - \sigma t)}$$

calcule:

a) La magnitud de la velocidad absoluta con que se expelen los gases,

b) La distancia que recorre (horizontalmente) el cohete hasta detenerse.

$$\text{Respuesta: } K; \quad \frac{M_0 v_0}{\sigma} \left[1 + \left\{ \frac{K}{v_0} - 1 \right\} \ln \left(1 - \frac{v_0}{K} \right) \right]$$

EJERCICIO 8.34 (2) Un balde de masa m está siendo tirado hacia arriba por una cuerda la cual ejerce una fuerza de magnitud constante F . Inicialmente el balde contiene una masa m_0 de agua, pero pierde agua a razón constante de $\sigma \text{ kg s}^{-1}$ de modo que después de cierto tiempo, el balde queda vacío.

a) ¿Cuál es la velocidad del balde justo cuando queda vacío?

b) ¿Se conserva la cantidad de movimiento y la energía mecánica del sistema? Respuesta: $\frac{F}{\sigma} \ln \left(1 + \frac{m_0}{m_b} \right) - g \frac{m_0}{\sigma}$; No

EJERCICIO 8.35 (3) Una cadena de densidad de masa $\sigma \text{ kg m}^{-1}$, posee en un extremo un cuerpo de masa M , El sistema se encuentra apilado en el suelo. En el instante $t = 0$ se aplica una fuerza F vertical sobre el cuerpo de masa M para levantar el conjunto con velocidad constante \vec{v} . Calcule la magnitud de la fuerza cuando haya transcurrido un tiempo igual a $\frac{v}{2g}$. Respuesta: $\frac{3}{2}\sigma v^2 + Mg$

EJERCICIO 8.36 (2) Una cadena de longitud L y masa total M se suspende verticalmente de modo que su extremo inferior está justo a nivel del suelo. Si la cadena se suelta, determine la reacción del suelo, mientras la cadena se deposita cayendo por su propio peso.

EJERCICIO 8.37 (3) Una cadena de longitud L y masa total M está amontonada sobre el suelo. Si la cadena se levanta de un extremo aplicando una fuerza constante F hacia arriba, determine la altura que sube la cadena en función del tiempo. Discuta sobre la altura máxima que alcanza la cadena, supuestamente muy larga de tal modo que siempre queda cadena depositada.

NOTA 8.3 Usted puede extrañarse que el peso máximo levantado es mayor que la fuerza aplicada y además que $\dot{y}(0) = \sqrt{F/\lambda}$ a pesar que la cadena partió del reposo. Hay una singularidad pues en el instante inicial, una fuerza finita F es aplicada a un elemento infinitésimo de masa y ello provoca un cambio repentino de velocidad. Además por la inercia, la cadena sobrepasa la posición de equilibrio.

EJERCICIO 8.38 (3) *Una gota esférica de agua atraviesa una capa de nube en reposo. Suponiendo que se condensa agua por unidad de tiempo sobre la gota, proporcionalmente a su superficie con constante de proporcionalidad K conocida, determine como crece el radio de la gota con el tiempo y como varía la altura de ella a medida que transcurre el tiempo.*

EJERCICIO 8.39 (4) *Un carrito, inicialmente de masa M y en reposo sobre un plano horizontal liso, comienza a moverse debido a que es impulsado por un chorro continuo de masa que se le va incorporando. Dichas masas salen desde el punto de partida (como de una ametralladora) con rapidez U_0 y a razón de λ unidades de masa por unidad de tiempo y se incrustan en el carrito cuando lo impactan. Determine la forma en que varían la aceleración, la velocidad y la posición del móvil con el tiempo.*

EJERCICIO 8.40 (2) *Un cohete de masa total M , de la cual fM , con f menor que uno, es de combustible, descansa verticalmente antes de encender los motores. Si se encienden los motores, que arrojan masa a razón constante σ ($\sigma = -dm/dt$) con rapidez relativa al cohete de magnitud U_0 , establezca la condición que debe cumplirse para que el cohete comience a despegar de inmediato. Para este caso, determine la máxima altura que alcanza, suponiendo aceleración de gravedad constante y despreciando el roce con el aire.*

EJERCICIO 8.41 (4) *Una cadena de largo total M y longitud L , flexible, es sostenida colgando de modo que su extremo inferior está justo al nivel del suelo. Si el extremo superior de la cadena se suelta, determine la reacción del suelo contra la parte depositada, en función del tiempo.*

EJERCICIO 8.42 (3) *Una cadena flexible tiene masa total M y longitud L . La cadena está inicialmente amontonada en el suelo. Una cuerda se hace pasar sobre una polea lisa, uno de los extremos unido a un extremo de la cadena y el otro extremo de la cuerda a un partícula de masa M . Si la partícula se suelta partiendo del reposo*

a) *escriba la ecuación de movimiento para el extremo de la cadena.*

b) *determine la rapidez del extremo de la cadena en función de su posición.*

8.6.4. Campo central. Orbitas.

EJERCICIO 8.43 (1) *Un satélite de masa m describe órbitas circulares alrededor de la tierra, a una distancia $r = 2R$ del centro de fuerza. Determine en función de G , M y R : a) la rapidez del satélite, b) su período de revolución, c) la aceleración de gravedad que actúa sobre el satélite y compárela con el valor g en la superficie terrestre. Respuesta: $\sqrt{\frac{GM}{2R}}$; $4\pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}}$; $g = \frac{GM}{4R^2}$; $g_0 = \frac{GM}{R^2}$*

EJERCICIO 8.44 (2) *Calcule la rapidez mínima con que debe lanzarse verticalmente una partícula de masa m , para que abandone la superficie terrestre sin retornar a ella (velocidad de escape). Además, calcule el tiempo requerido para que esta partícula llegue a una altura igual al radio terrestre sobre la superficie de la Tierra. Respuesta: $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$; $2(2^{3/2} - 1)\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}/3$*

EJERCICIO 8.45 (2) *Demuestre que la ecuación de la energía se puede escribir de la forma:*

$$\left[\frac{du}{d\theta}\right]^2 + u^2 = \frac{2(E - U)}{mh^2},$$

siendo $u = \frac{1}{r}$, $h = \frac{L_0}{m}$.

EJERCICIO 8.46 (1) *Se lanza un proyectil de masa m desde la superficie de la Tierra hacia el espacio, con rapidez inicial v_0 . Despréciase la resistencia del aire y determine: a) la rapidez a una altura h sobre la superficie terrestre y b) la menor rapidez con que debe ser lanzado el proyectil para que no retorne a Tierra. Respuesta: $\sqrt{v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right)}$; $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$*

EJERCICIO 8.47 (2) *Una partícula que se mueve en un campo central de fuerzas definido por $\vec{F} = -kr^2\hat{r}$. Si parte del reposo de un punto de una circunferencia de radio a , demuestre que cuando llega al punto de una circunferencia de radio b su rapidez será*

$$v = \sqrt{\frac{2k(a^3 - b^3)}{3m}}.$$

EJERCICIO 8.48 (2) *Una partícula de masa m , se mueve sobre un plano horizontal sometida a una fuerza que la atrae hacia un punto O fijo del plano,*

siendo la magnitud de la fuerza proporcional a la distancia de la partícula al punto O ($k > 0$, constante de proporcionalidad). Cuando la partícula se encuentra en P con $OP = 2a$, la velocidad de la partícula es perpendicular a OP y su magnitud es $v = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{k}{m}}$, determine la distancia mínima al punto O , que puede alcanzar la partícula. Respuesta: $a/2$

EJERCICIO 8.49 (2) Una partícula está en órbita circular de radio a en torno a la tierra, supuesta esférica, en reposo, de masa total M , de radio R , y sin considerar roce con el aire. Demuestre que si la velocidad de la partícula es repentinamente cambiada por un factor f , la excentricidad de la órbita resultante es

$$e = |f^2 - 1|.$$

EJERCICIO 8.50 (4) Respecto a la situación del problema anterior, determine el factor f para que la partícula pase tangente a la superficie terrestre.

EJERCICIO 8.51 (2) Una partícula describe una órbita circular en un campo de fuerzas dado por

$$F(r) = -\frac{k}{r^2}.$$

Mostrar que si k disminuye bruscamente a la mitad de su valor inicial, la órbita de la partícula se hace parabólica.

EJERCICIO 8.52 (4) Calcular explícitamente la media temporal (o sea, la media en un periodo completo) de la energía potencial de una partícula que se mueve sobre una órbita elíptica en un campo central en el que la fuerza obedece la ley inversa del cuadrado de la distancia. Expresar el resultado en función de la constante de proporcionalidad de la fuerza y del semieje mayor de la elipse. Efectuar un cálculo similar para la energía cinética.

EJERCICIO 8.53 (4) Dos partículas iguales que se mueven bajo la influencia de la atracción gravitacional mutua, describen órbitas circulares una en torno de la otra con un período τ . Si repentinamente se detienen y caen una sobre la otra, demostrar que chocarán después de un tiempo

$$\frac{\tau}{4\sqrt{2}}.$$

EJERCICIO 8.54 (3) *Dos masas que se atraen, m_1 y m_2 ($m_1 + m_2 = M$), están separadas una distancia r_0 y se las suelta a partir del reposo. Demostrar que cuando la distancia sea r menor que r_0 , las velocidades serán*

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)},$$

$$v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{M} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}.$$

EJERCICIO 8.55 (4) *Estudiar el movimiento de una partícula repelida por un centro de fuerzas de acuerdo con la ley $F(r) = kr$. Demostrar que la órbita sólo puede ser hiperbólica.*

EJERCICIO 8.56 (4) *Una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza central dada por*

$$F(r) = -\frac{k}{r^n}.$$

Demuestre que si la órbita es circular y pasa por el centro de fuerzas, entonces $n = 5$.

EJERCICIO 8.57 (4) *Suponga un cometa que describe una órbita parabólica en el mismo plano que la órbita terrestre. Si la menor distancia del cometa al Sol es " γR_T " donde R_T es el radio de la órbita de la Tierra (supuesta circular) y $\gamma < 1$, demostrar que el tiempo que el cometa pasa dentro de la órbita terrestre viene dado por*

$$\sqrt{2(1-\gamma)}(1+2\gamma)/3\pi \text{ años}$$

EJERCICIO 8.58 (4) *Estudiar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales que sigue la ley de proporcionalidad inversa del cuadrado de la distancia, si además se superpone otra fuerza de magnitud inversamente proporcional al cubo de la distancia entre la partícula y el centro de fuerzas. Es decir,*

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}$$

con $k > 0$. Demuestre que la trayectoria es una elipse que rota o precesa.

EJERCICIO 8.59 (3) *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral dada por $r = k\theta$, siendo k una constante.*

EJERCICIO 8.60 (3) *Determine la expresión de la fuerza de un campo central que permita a una partícula describir una órbita espiral logarítmica dada por $r = Ke^{a\theta}$ siendo k y a constantes.*

EJERCICIO 8.61 (4) *Una partícula de masa unidad se desplaza desde el infinito a lo largo de una recta que, de seguir, haría que la partícula pasase a una distancia $b\sqrt{2}$ de un punto P . Si la partícula es atraída hacia P con una fuerza proporcional a $\frac{k}{r^5}$ y el momento angular respecto de P es \sqrt{k}/b , demuestre que la trayectoria está dada por*

$$r = b \coth(\theta/\sqrt{2}).$$

EJERCICIO 8.62 (1) *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerzas con una fuerza proporcional a la distancia de la partícula al centro. Demuestre que la trayectoria es una curva plana que puede ser representada por las ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x &= A \cos(nt + \alpha), \\ y &= B \sin(nt + \beta). \end{aligned}$$

La constante n está relacionada con la masa de la partícula y la constante de proporcionalidad de la fuerza.

EJERCICIO 8.63 (2) *Una partícula es atraída hacia un centro fijo de fuerza O por una fuerza de forma k/r^2 . La partícula es lanzada desde un punto P con una velocidad de magnitud V_0 en un ángulo α respecto de OP . Demuestre que la órbita es una elipse si $OP \leq 2k/(mV_0^2)$. Determine además, en términos de m , k , V_0 , α , y $OP = r_0$ la excentricidad de la órbita y la inclinación del eje mayor respecto de OP .*

EJERCICIO 8.64 (2) *Admitiendo que la tierra es una esfera fija de radio R y despreciando la resistencia del aire, considere el lanzamiento de un proyectil con rapidez inicial V_0 formando un ángulo ξ_0 con la vertical del lugar. Si*

$$V_e^2 = \frac{2GM}{R},$$

donde G es la constante de gravitación, M la masa terrestre y $V_0 < V_e$, demuestre que la excentricidad y la ecuación de la trayectoria del proyectil

son:

$$e = \sqrt{1 - \sin^2(2\beta) \sin^2(\xi_0)},$$

$$\frac{R}{r} = \frac{1 - e \cos(\theta - \alpha)}{2 \sin^2(\beta) \sin^2(\xi_0)},$$

siendo

$$\sin \beta = V_0/V_e,$$

$$\sin \alpha = \sin^2 \beta \sin(2\xi_0)/e.$$

EJERCICIO 8.65 (2) Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R con rapidez V_0 atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez se reduce a la mitad, determine en términos de R_0 y V_0 : la ecuación de la nueva órbita, su excentricidad y la distancia mínima de la partícula al centro durante el movimiento siguiente.

EJERCICIO 8.66 (1) Una partícula de masa $m = 1$ es atraída por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a un punto fijo O y se mueve describiendo la elipse:

$$r = \frac{100}{1 - \frac{1}{2} \cos \theta}.$$

Si en el punto más alejado de su trayectoria, la rapidez de la partícula es $V = 1$, determine la constante de la ley de fuerza. Si en el punto más alejado, la rapidez de la partícula es duplicada, determine la ecuación de la nueva órbita.

EJERCICIO 8.67 (1) Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R_0 con rapidez V_0 atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la rapidez de la partícula se aumenta a $V = \sqrt{\alpha}V_0$ siendo $\alpha > 1$, demuestre que si $\alpha \geq 2$ la partícula se aleja hasta el infinito. En cambio si $\alpha < 2$, determine la ecuación de la nueva órbita en términos de R_0 , V_0 y α .

EJERCICIO 8.68 (4) Determine las posibles leyes de fuerza central si una partícula describe bajo su acción una circunferencia, con el centro de fuerzas en el interior del círculo.

EJERCICIO 8.69 (3) Considere una partícula que se mueve en un campo central atractivo k/r^2 con $k < 0$. Demuestre que para un momentum angular dado, la mínima energía que puede tener la partícula es:

$$E = -\frac{mk^2}{2l^2}.$$

EJERCICIO 8.70 (2) Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R_0 con rapidez V_0 atraída hacia el centro con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la partícula al centro. Si repentinamente la velocidad se reduce a la mitad, determine en términos de R_0 y V_0 la ecuación de la nueva órbita.

EJERCICIO 8.71 (2) Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre M , la constante de gravitación G , Ω la velocidad angular terrestre, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente aumentada al doble.

EJERCICIO 8.72 (3) Un satélite de masa m está en órbita circular de radio $2R$ en torno a la tierra supuesta esférica, de masa M y radio R , en reposo y sin atmósfera. Si la velocidad se altera en un punto de la órbita en un factor f , determine: a) la ecuación de la nueva órbita. b) el rango de valores de f para los cuales el satélite chocará con la tierra. c) el rango de valores de f para los cuales el satélite se aleja indefinidamente.

EJERCICIO 8.73 (3) Un satélite está en órbita ecuatorial geo estacionaria, es decir permanece en el mismo punto relativo a la tierra que rota. Dados, la masa terrestre M , la constante de gravitación G , Ω la velocidad angular terrestre, determine la ecuación de la nueva órbita si la rapidez absoluta del satélite es repentinamente reducida a la mitad.

EJERCICIO 8.74 (4) Considere la tierra como esférica, en reposo de masa M y radio R , sin atmósfera. Se lanza un proyectil con rapidez inicial V_0 formando un ángulo β respecto a la horizontal. Determine el arco que el proyectil recorre hasta llegar al suelo (si lo hace). Discuta las condiciones bajo las cuales el proyectil cae nuevamente al suelo. La constante de gravitación es G .

Dinámica del cuerpo rígido

9.1. Cuerpo rígido

Un cuerpo rígido no es más que un sistema de partículas donde las distancias entre ellas permanecen invariable, por lo tanto aplica todo lo de un sistema de partículas que ya se estudió. La descripción del movimiento de un cuerpo rígido en el espacio, es materia de otro curso (Mecánica racional). Por ahora nos limitaremos a la descripción del movimiento plano de un cuerpo rígido, es decir cuando todas las velocidades son paralelas a un plano fijo. Como se explicará, la novedad respecto a un sistema de partículas, es la forma específica como se calculan el momentum angular y la energía cinética del cuerpo, no habiendo más cambios de fondo. La cinemática del cuerpo rígido es una cuestión previa que debe ser explicada. La rigidez del cuerpo introduce simplificaciones a la descripción del movimiento de ese sistema de partícula pues no es necesario conocer las posiciones ni el movimiento de cada una de ellas, sino que el movimiento de unas pocas determina el de todas.

9.2. Cuerpo rígido continuo

Este es un concepto idealizado donde nos olvidamos de las partículas reales que componen el cuerpo, los átomos o moléculas, y el cuerpo es reemplazado por un continuo de masa donde las "*partículas*" son elementos infinitesimos de volumen dV que tiene alguna cantidad de masa también infinitesimal

que llamaremos dm . La rigidez se establece aquí manteniendo constantes las distancias entre los puntos de este cuerpo.

9.3. Cinemática plana de un cuerpo rígido

9.3.1. Desplazamientos de un cuerpo rígido

La descripción de los desplazamientos de un cuerpo rígido en el espacio es materia del siguiente curso. Para desplazamientos de un cuerpo rígido en un plano, las cuestiones son más simples pues es bastante evidente que un cambio de posición de un cuerpo rígido en un plano, puede ser logrado de modo equivalente mediante una traslación paralela seguida de una rotación en torno a un punto fijo, o bien la rotación seguida de la traslación. Lo mismo es cierto en tres dimensiones, pero su demostración es más engorrosa. La figura siguiente muestra lo que acontece cuando en la traslación paralela $\overrightarrow{AA'}$ un punto, digamos A pasa a ocupar su posición final A' mediante esa traslación paralela. Los otros puntos no están aún en su posición final. Basta entonces rotar el cuerpo en un cierto ángulo θ en torno al punto A' para que el cuerpo quede en su posición final. Es decir hay que girar $\overrightarrow{A'P'}$ en un ángulo $\Delta\theta$.

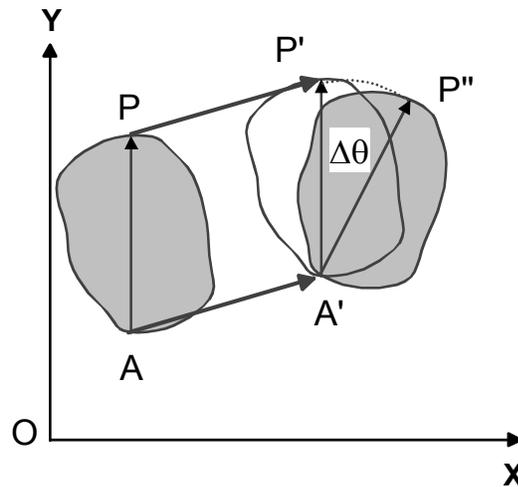


Figura 9.1: Desplazamiento plano de un C.R.

Si el tiempo transcurrido es infinitésimo dt entonces todos los desplazamientos señalados son infinitésimos. Llamemos

$$\begin{aligned}\vec{r}_P(t) &= \overrightarrow{OP}, \\ \vec{r}_P(t+dt) &= \overrightarrow{OP''}, \\ \vec{r}_A(t) &= \overrightarrow{OA}, \\ \vec{r}_A(t+dt) &= \overrightarrow{OA'}.\end{aligned}$$

Para relacionar las cosas necesitamos evaluar $\overrightarrow{P'P''}$. Pero ese desplazamiento es circunferencial con centro en A' luego puede evaluarse mutiplicando la velocidad tangencial por dt , esto es

$$\overrightarrow{P'P''} = A'P'\dot{\theta}\hat{T}dt = AP\dot{\theta}\hat{T}dt = -\dot{\theta}\hat{k} \times \overrightarrow{AP}dt.$$

Luego como

$$\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''},$$

y considerando que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{v}_A dt$ obtendremos

$$\vec{r}_P(t+dt) = \vec{r}_P(t) + \vec{v}_A dt - \dot{\theta}\hat{k} \times \overrightarrow{AP}dt,$$

de manera que

$$\frac{\vec{r}_P(t+dt) - \vec{r}_P(t)}{dt} = \vec{v}_A - \dot{\theta}\hat{k} \times \overrightarrow{AP},$$

y se obtiene la relación fundamental de la cinemática de un cuerpo rígido

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}, \quad (9.1)$$

donde se ha definido

$$\vec{\omega} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{k}, \quad (9.2)$$

la llamada velocidad angular del cuerpo. El signo colocado frente a $\vec{\omega}$ está de acuerdo a la definición del ángulo y a la regla de la mano derecha. Lo que la relación (9.1) establece es que la velocidad de un punto P es la velocidad de traslación del cuerpo con la velocidad del punto A más lo que resulta de la rotación de P en torno de A . Para el movimiento plano la velocidad angular tiene como magnitud la derivada del ángulo que gira el cuerpo, dirección perpendicular al plano de movimiento y sentido de acuerdo a la regla de la mano derecha de acuerdo al crecimiento del ángulo definido.

9.3.2. Condición de rigidez

De la relación (9.1) se deduce que

$$\vec{v}_P \cdot \overrightarrow{AP} = \vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AP} \quad (9.3)$$

que se conoce como condición de rigidez pues establece que ambos puntos tienen las mismas componentes de velocidad en la línea que une los dos puntos. En otras palabras eso significa que la distancia entre los dos puntos no varía.

9.3.3. Ejemplos

Algunas figuras ayudarán a entender lo explicado.

- a) Disco que rueda sin deslizar. Por definición de "no deslizamiento", el punto de contacto con el suelo tiene velocidad nula y en la figura se muestran como resultan las velocidades de puntos del disco que están sobre las rectas IP e IQ . Para este caso la relación anterior con $\vec{v}_I = \vec{0}$ se reduce a

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP}$$

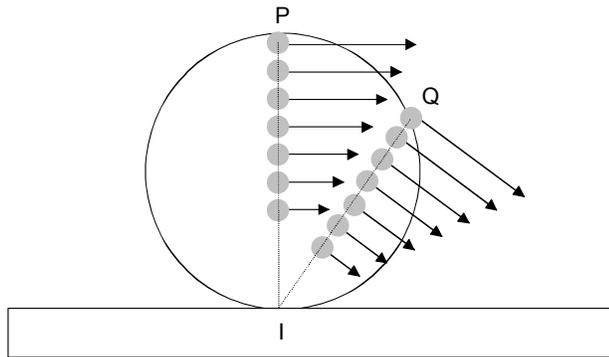


Figura 9.2:

- b) Disco que avanza girando y su punto de contacto resbala con velocidad $\vec{v}_I \neq \vec{0}$. Ahora será

$$\vec{v} = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP},$$

de modo que ahora todos los vectores velocidad de la figura anterior están alterados en \vec{v}_I y la figura que resulta será

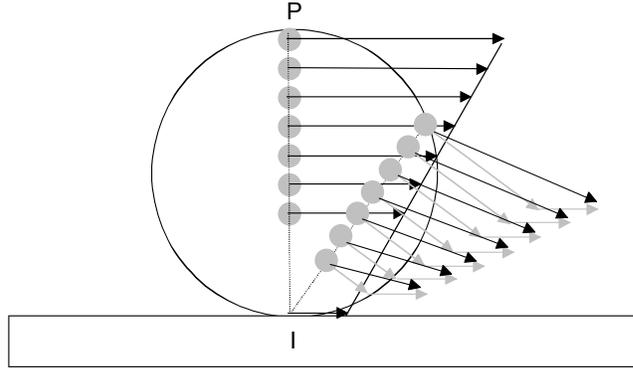


Figura 9.3:

c) La figura anterior se simplifica si hacemos

$$\vec{v}_I = \vec{\omega} \times \vec{QI},$$

donde Q es un cierto punto cuya ubicación se muestra en la figura que sigue. Entonces será

$$\vec{v} = \vec{v}_I + \vec{\omega} \times \vec{IP} = \vec{\omega} \times \vec{QI} + \vec{\omega} \times \vec{IP} = \vec{\omega} \times \vec{QP},$$

lo cual significa que los puntos del disco tienen velocidades *tal como* si el disco rodara sin resbalar sobre una línea ubicada más abajo del suelo a distancia

$$d = \frac{|\vec{v}_I|}{|\vec{\omega}|},$$

cuestión que se ilustra en la figura que sigue

9.3.4. Centro instantáneo de rotación

En el movimiento plano de un cuerpo rígido se tiene el siguiente teorema:

► **TEOREMA 9.1**

En el movimiento plano de un cuerpo rígido, siempre existe un punto de él (o de una extensión rígida de él) que tiene velocidad instantánea nula y

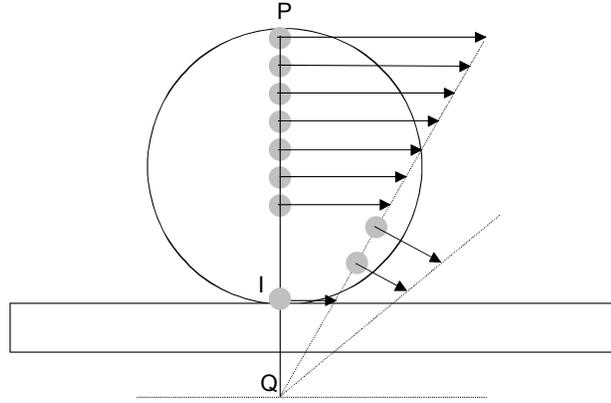


Figura 9.4:

en consecuencia el movimiento equivale a una pura rotación instantánea del cuerpo en torno de ese punto. Tal punto se conoce como centro instantáneo de rotación.

DEMOSTRACION 23 Como

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$$

entonces si existe un punto $A = I$ con velocidad nula debe ser

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP} \quad (9.4)$$

entonces \vec{v}_P es perpendicular a \overrightarrow{IP} , o bien \overrightarrow{IP} está sobre una recta en el plano de movimiento que es perpendicular a \vec{v}_P . En consecuencia si se conocen las velocidades (no paralelas) de dos puntos de un cuerpo \vec{v}_A y \vec{v}_B , el centro instantáneo estará donde se intersecten las perpendiculares a esas dos velocidades. La excepción la constituyen los cuerpos que tienen traslaciones puras, es decir cuando el cuerpo se traslada paralelamente y entonces $\vec{\omega} = \vec{0}$. En estos casos se podría decir que el centro instantáneo está en el infinito.

La posición del centro instantáneo también puede determinarse si se conoce una velocidad y la velocidad angular del cuerpo. En efecto de (9.4) se puede despejar \overrightarrow{PI} . para ello multiplique $\times \vec{\omega}$ y desarrolle

$$\begin{aligned} \vec{v}_P \times \vec{\omega} &= (\vec{\omega} \times \overrightarrow{IP}) \times \vec{\omega}, \\ &= \omega^2 \overrightarrow{IP} - (\overrightarrow{IP} \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega}, \end{aligned}$$

pero $(\vec{IP} \cdot \vec{\omega}) = 0$ porque son vectores perpendiculares. Entonces si $\omega^2 \neq 0$ se deduce que

$$\vec{PI} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_P}{\omega^2}. \quad (9.5)$$

Algunas relaciones entre velocidades y aceleraciones

En diversas aplicaciones existen relaciones debidas a la presencia de cuerdas inextensibles, cuerdas apoyadas o enrolladas en poleas, cuerpos que no resbalan y otras. En las siguiente figura se ilustra una situación donde hay diversas velocidades lineales (v), velocidades angulares (ω), aceleraciones lineales (a) y angulares (α) que están relacionadas de alguna manera entre sí. Hay un disco que rueda sin deslizar, una cuerda que pasa por una polea sin

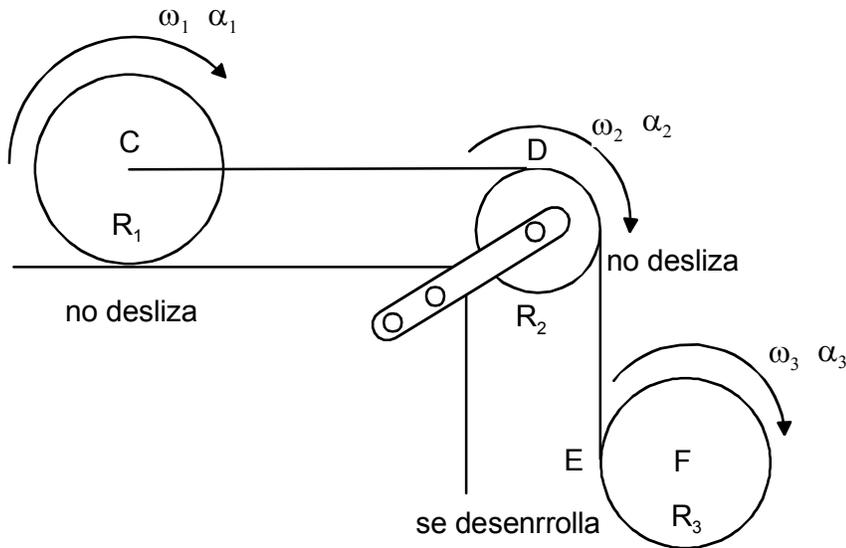


Figura 9.5:

deslizarse y otro disco baja desenrollando la cuerda. Primero, la velocidad de C estará dada por

$$v_C = \omega_1 R_1.$$

Además por pertenecer a una cuerda, la velocidad de C y D son iguales de donde se deduce que

$$\omega_1 R_1 = v_C = v_D = R_2 \omega_2.$$

Por la misma razón el punto D tiene la misma velocidad (en magnitud) que el punto E , de modo que

$$v_E = v_D = v_C.$$

El punto F tiene una velocidad adicional debida a la rotación de ese disco respecto al punto E , ω_3 de modo que

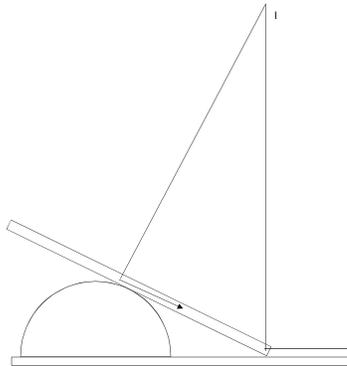
$$v_F = v_E + R_3\omega_3 = R_2\omega_2 + R_3\omega_3.$$

Si usted necesita relacionar aceleraciones, derive las relaciones anteriores respecto al tiempo obteniendo las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} a_C &= \alpha_1 R_1, \\ \alpha_1 R_1 &= \alpha_2 R_2, \\ a_F &= R_2\alpha_2 + R_3\alpha_3. \end{aligned}$$

Existen muchísimas posibilidades más de modo que trate de comprender cabalmente este ejemplo.

EJEMPLO 9.3.1 *La figura ilustra una barra que se desliza apoyada en el suelo y sobre una semicircunferencia y en ella se muestra la ubicación del centro instantáneo I . Por las condiciones de apoyo, hay dos puntos de la barra que tienen direcciones conocidas y eso determina la posición de I . Como usted puede comprender, las velocidades de todos los puntos de la barra son, en el instante mostrado, perpendiculares a la línea que va desde I al punto que sea.*



9.3.5. Curvas rueda y riel

Como se explicó, en el movimiento plano de un cuerpo rígido siempre existe un punto de él, o de una extensión rígida del cuerpo, que tiene velocidad instantánea cero. Esto significa que en todo instante el cuerpo está moviéndose como si solamente rotara respecto a ese punto. Pero ese punto en general se mueve, de manera que el centro instantáneo describe una curva. El movimiento de ese punto puede ser mirado desde un sistema fijo y en ese caso la curva que describe se denomina curva riel. Si el movimiento de ese punto es observado desde un sistema de referencia fijo al cuerpo, la curva que se observa, se denomina curva rueda. El caso más simple es el de un disco que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, como en la figura. Como se

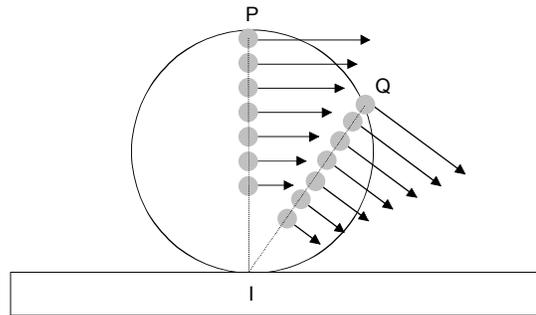


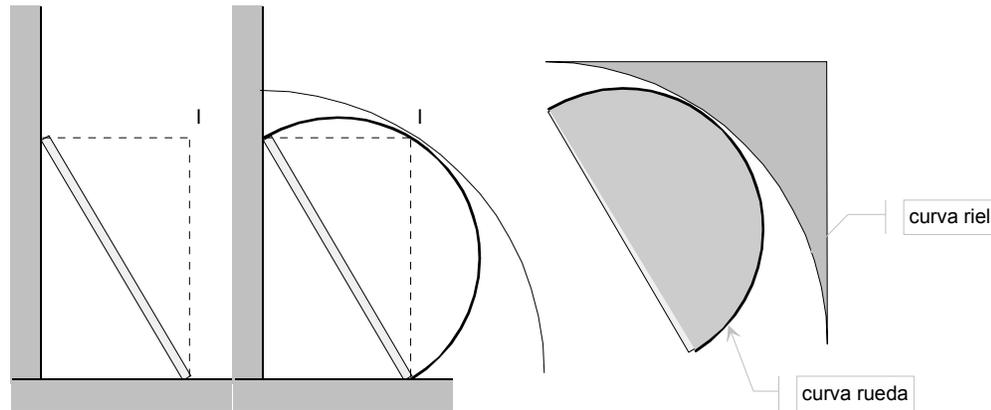
Figura 9.6:

observa, a medida que el cuerpo se mueve, el punto I se mueve en línea recta sobre el suelo de manera que la curva riel es la línea horizontal sobre la cual el disco rueda. Si se observa el movimiento de I desde el cuerpo, ese punto permanece a distancia el radio R del disco de su centro, por lo cual la curva rueda coincide con el perímetro del disco, de allí su nombre.

Cualquiera que sea la forma del cuerpo que se mueve ocurre algo parecido..

La clave para esta descripción es comprender que I está donde se intersectan las perpendiculares a dos velocidades de direcciones conocidas del cuerpo. En las tres figuras que siguen se explica esto para el caso de una barra que se mueve apoyada en dos paredes. El centro instantáneo I resulta estar donde está indicado. Por razones geométricas simples I resulta estar a distancia constante del origen y respecto de la barra I permanece sobre una semicircunferencia donde la barra es su diámetro. De manera que la

curva riel es la circunferencia con centro en el origen y la curva rueda es la semicircunferencia cuyo diámetro es la barra.



El cuadro que sigue, ilustrado en la tercera figura, es que la barra se mueve al igual que un semicírculo que va rodando sin deslizar sobre la curva riel. Note que todos los puntos del semicírculo son aquí considerados una extensión rígida de la barra.

EJEMPLO 9.3.2 Una barra se mueve de manera que uno de sus extremos A se mueve sobre una línea horizontal y además permanece apoyada sobre un tarugo a altura h sobre el suelo. Determine las ecuaciones de las curvas rueda y riel.

Solución. Considere la figura. Las coordenadas del centro instantáneo serán

$$\begin{aligned}x &= OO' = h \cot \theta, \\y &= O'I = h + x \cot \theta,\end{aligned}$$

y eliminando θ se determina la ecuación de la curva riel

$$y = h + \frac{x^2}{h}.$$

Las coordenadas relativas al cuerpo x', y' serán

$$\begin{aligned}x' &= \frac{h}{\sin \theta}, \\y' &= x' \cot \theta = \frac{h}{\sin \theta} \cot \theta = \frac{h \cos \theta}{\sin^2 \theta}\end{aligned}$$

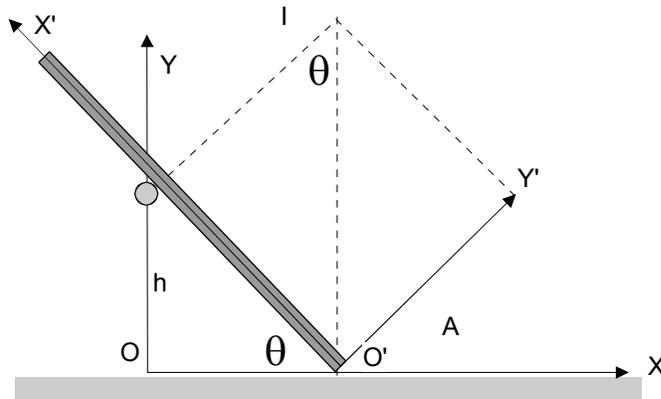


Figura 9.7:

donde debemos eliminar θ . Así resulta

$$y' = \frac{x'}{h} \sqrt{(x')^2 - h^2},$$

la ecuación de la curva rueda.

9.3.6. Modelo continuo de un cuerpo rígido

Como se explicó, aún cuando un cuerpo rígido sea un sistema de partículas, resulta preferible en la mayoría de los casos olvidarse de ello y suponer que el cuerpo es un continuo de masa donde las distancias entre sus puntos permanecen constantes. Las partículas del cuerpo son entonces reemplazadas por elementos de volumen dV los cuales tienen masa dm . Las sumatorias sobre partículas pasarán entonces a ser integrales sobre el volumen del cuerpo, esto es

$$\sum m_i \rightarrow \int dm$$

lo cual es en general más fácil de realizar sobre todo cuando el número de partículas reales del cuerpo es muy grande.

9.3.7. Momentum angular y energía cinética

Como las velocidades de dos puntos de un cuerpo rígido están relacionadas de acuerdo a 9.1, es una tarea más o menos simple establecer expresiones que permiten el cálculo de la energía cinética y del momentum angular. Debemos distinguir dos casos. Cuando en el movimiento del cuerpo se mantiene un punto fijo y cuando no. Cuando hay un punto que se mantiene fijo el movimiento se denomina rotacional.

Movimiento puramente rotacional

Si el cuerpo puede moverse manteniendo un punto O fijo, el llamado eje de la rotación, entonces el movimiento del cuerpo es puramente rotacional. El plano de movimiento es el plano OXY . Si el ángulo que describe la rotación del cuerpo lo llamamos θ , en el sentido del eje OZ , de modo que

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k},$$

entonces las velocidades de los otros puntos del cuerpo serán

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}, \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

de aquí sigue que:

El momentum angular

Todas las partículas del cuerpo, los elementos de masa dm , tienen movimiento circunferencial y podemos calcular el momentum angular como sigue

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \rightarrow \int dm (\vec{r} \times \vec{v}), \\ &= \int dm (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})), \end{aligned}$$

desarrollando el doble producto cruz

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}, \quad (9.7)$$

donde para movimiento plano el segundo término se anula, luego

$$\vec{L}_O = \left(\int r^2 dm \right) \vec{\omega}.$$

En esta expresión se ha separado el factor que tiene que ver con el movimiento $\vec{\omega}$ con otro factor que sólo tiene que ver con la distribución de masa del cuerpo

$$I_O = \int r^2 dm, \quad (9.8)$$

luego tenemos

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}, \quad (9.9)$$

$$\vec{L}_O = I_O \dot{\theta} \hat{k}. \quad (9.10)$$

Aquí I_O se conoce como el momento de inercia en el punto O del cuerpo respecto al eje OZ . Si miramos a la integral como una sumatoria entonces el momentum angular es "la suma de las masas por sus distancias al cuadrado al eje de la rotación".

Ejemplos de cálculo de momentos de inercia

Los momentos de inercia serán dados pero es conveniente entender como se calculan.

- Para una barra de largo L y de masa M en un extremo. Si se elige el eje OX a lo largo de la barra entonces como la densidad lineal de masa es $\frac{M}{L}$

$$dm = \frac{M}{L} dx,$$

$$I_O = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{3} ML^2.$$

- Para una barra de largo L y de masa M en su centro de masa. Si se elige el eje GX a lo largo de la barra entonces respecto al cálculo anterior, los límites de la integral son otros

$$dm = \frac{M}{L} dx,$$

$$I_G = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{12} ML^2.$$

- Para un disco de masa M y radio R en su centro. Ahora podemos tomar como elemento de masa la masa entre r y $r + dr$. La densidad superficial de masa es $\frac{M}{\pi R^2}$ de modo que

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr,$$

resultando

$$I_G = \int_0^R r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{1}{2} MR^2.$$

- Aro de masa M y radio R en su centro. Ahora todas las masas están a distancia R de modo que

$$I_G = \int R^2 dm = MR^2.$$

Momentun angular y momentum lineal

Para comprender mejor sobre el significado del momento de inercia, comparemos las expresiones para el momentum lineal \vec{P} y el momentum angular \vec{L}_O es decir

$$\begin{aligned}\vec{P} &= M\vec{v}_G, \\ \vec{L}_O &= I_O\vec{\omega},\end{aligned}$$

y las respectivas ecuaciones de movimiento sobre las cuales se profundizará más adelante

$$\begin{aligned}M\vec{a}_G &= \vec{F}^{ext}, \\ I_O\vec{\alpha} &= \vec{\Gamma}_O^{ext},\end{aligned}$$

donde $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ es la aceleración angular.

Se puede entonces comprender que la cantidad de movimiento lineal es proporcional a la velocidad de traslación \vec{v}_G y la constante de proporcionalidad es la masa. Similarmente resulta que la cantidad de movimiento angular es proporcional a la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia. O sea el momento de inercia juega el rol de la masa cuando hay rotaciones. Similarmente se pueden comparar los roles dinámicos. A una dada fuerza, el cuerpo acelera menos a mayor masa. A un dado torque un cuerpo acelera angularmente menos a mayor momento de inercia.

La energía cinética

Haciendo un cálculo similar para la energía cinética, resultará

$$\begin{aligned}
 K &= \sum m_i v_i^2 \longrightarrow \frac{1}{2} \int v^2 dm = \\
 &= \frac{1}{2} \int \vec{\omega} \times \vec{r} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r} dm, \\
 &= \frac{1}{2} \int \vec{\omega} \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm, \\
 &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O,
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

pero

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}$$

de modo que

$$K = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2,$$

que nuevamente puede compararse con la energía cinética cuando hay pura traslación

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2.$$

Movimiento de rotación y traslación

Si el cuerpo se mueve en el plano OXY sin restricciones, entonces el cuerpo tiene simultáneamente movimiento de traslación y de rotación. El cuerpo se desplaza y además gira un ángulo θ , por lo tanto nuevamente

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}.$$

Entonces el momentum angular respecto al centro de masa G resultará

$$\vec{L}_G = I_G \dot{\theta} \hat{k}, \tag{9.12}$$

y el teorema de Koenig determina el momentum angular respecto a O que resulta ser

$$\vec{L}_O = M \vec{r} \times \vec{v}_G + I_G \dot{\theta} \hat{k}. \tag{9.13}$$

La energía cinética será, de acuerdo al teorema de Koenig, la suma de las energías cinéticas traslacional y rotacional

$$K = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2. \quad (9.14)$$

El término I_G se denomina momento de inercia del cuerpo en el centro de masa respecto al eje GZ y está dado por

$$I_G = \int (x'^2 + y'^2) dm. \quad (9.15)$$

donde x', y' son coordenadas de los elementos de masa respecto al centro de masa G . La expresión (9.14) muestra que la energía cinética es la suma de la parte traslacional $\frac{1}{2}Mv_G^2$ más la parte rotacional en torno al centro de masa $\frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$.

Movimiento en el espacio

Aún cuando este tema no será profundizado en este texto, explicaremos algo de lo que ocurre cuando un cuerpo rígido se mueve libremente en el espacio, esto es en tres dimensiones. Ahora su velocidad angular no permanece con dirección fija y en general tendremos

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k},$$

siendo las componentes de la velocidad angular funciones de las derivadas de los ángulos de orientación del cuerpo.

Si el cuerpo mantiene un punto fijo, entonces sigue siendo válido que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

de manera que igualmente se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \int dm(\vec{r} \times \vec{v}) \\ &= \int dm(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})). \end{aligned}$$

Si desarrollamos el doble producto cruz se obtiene

$$\vec{L}_O = \int dm(r^2\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}).$$

Ahora, a diferencia del movimiento plano,

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r} \neq 0,$$

luego debemos desarrollar

$$\vec{L}_O = \int dm((x^2 + y^2 + z^2)\vec{\omega} - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)\vec{r}). \quad (9.16)$$

Si tomamos las componentes cartesianas de esta ecuación se obtienen tres ecuaciones

$$\begin{aligned} L_{O_x} &= \int dm((y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z), \\ L_{O_y} &= \int dm((x^2 + z^2)\omega_y - yx\omega_x - yz\omega_z), \\ L_{O_z} &= \int dm((x^2 + y^2)\omega_z - zx\omega_x - zy\omega_y). \end{aligned}$$

Al usar notación de matrices, estas ecuaciones lineales en ω_x , ω_y y ω_z pueden escribirse

$$\begin{bmatrix} L_{O_x} \\ L_{O_y} \\ L_{O_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (9.17)$$

donde los elementos de la diagonal de la matriz indicada, denominados momentos de inercia respecto a los ejes, están dados por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int dm((y^2 + z^2)), \\ I_{yy} &= \int dm((x^2 + z^2)), \\ I_{zz} &= \int dm((x^2 + y^2)), \end{aligned} \quad (9.18)$$

y los elementos de fuera de la diagonal, denominados productos de inercia, están dados por

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = - \int xy dm, \\ I_{xz} &= I_{zx} = - \int xz dm, \\ I_{yz} &= I_{zy} = - \int yz dm. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Esta matriz 3×3 la denotaremos por H_O y se conoce como la *matriz* de inercia del cuerpo en el origen O , es decir

$$H_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (9.20)$$

y la relación fundamental entre cantidad de movimiento angular y velocidad angular, puede escribirse

$$\vec{L}_O = H_O \vec{\omega}, \quad (9.21)$$

en el entendido que tanto \vec{L}_O como $\vec{\omega}$ son matrices columna con las componentes de los respectivos vectores como sus elementos. Similarmente, para la energía cinética puede demostrarse que

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot H_O \vec{\omega}.$$

No ahondaremos más en este tema en estos apuntes porque el curso se limitará a casos de dos dimensiones solamente.

9.4. Dinámica de un cuerpo rígido

9.4.1. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido son las mismas que se indicaron en el capítulo de sistemas de partículas, es decir

$$M \vec{a}_G = \vec{F}^{ext}, \quad (9.22)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G = \vec{\Gamma}_G^{ext} \text{ o } \frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \quad (9.23)$$

Además para un punto arbitrario A se tiene la relación general

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\vec{AG} \times \vec{a}_A, \quad (9.24)$$

que es de utilidad en ciertos problemas donde el movimiento de un punto A es conocido.

9.4.2. Ecuaciones para el caso de movimiento plano

Cuando el movimiento es plano, las ecuaciones anteriores pueden escribirse

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{ext}, \quad (9.25)$$

$$I_G \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \vec{\Gamma}_G^{ext} \text{ o } I_O \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \vec{\Gamma}_O^{ext}. \quad (9.26)$$

El resultado

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{\Gamma}_O^{ext}$$

nos dice que la derivada del momentum angular, esto es el cambio del momentum angular, está en la dirección del torque. En la figura que sigue se ilustra el curioso efecto que el peso que actúa hacia abajo sobre un disco que gira sobre su eje. El torque del peso $\vec{\tau}$ está en un plano horizontal y luego el cambio de $\vec{\omega}$ también o está. O sea el efecto del torque del peso hará que el sistema tienda a girar respecto a la vertical en vez de a caer. La explicación del movimiento de un trompo tiene que ver con este efecto.

Estas complejidades del movimiento en tres dimensiones no están presentes en los problemas de dinámica en un plano. En efecto, cuando el movimiento es plano, tanto la velocidad angular como el torque están en dirección perpendicular al plano de movimiento, digamos el eje z , de manera que

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= I_O \dot{\theta} \hat{k}, \\ \vec{\tau}_O &= \tau_O \hat{k}, \end{aligned}$$

y luego resultará

$$I_O \ddot{\theta} = \tau_O,$$

o si llamamos $\alpha = \ddot{\theta}$ a la aceleración angular

$$I_O \alpha = \tau_O,$$

de modo que el único efecto del torque será causar una aceleración angular $\alpha = \ddot{\theta}$.

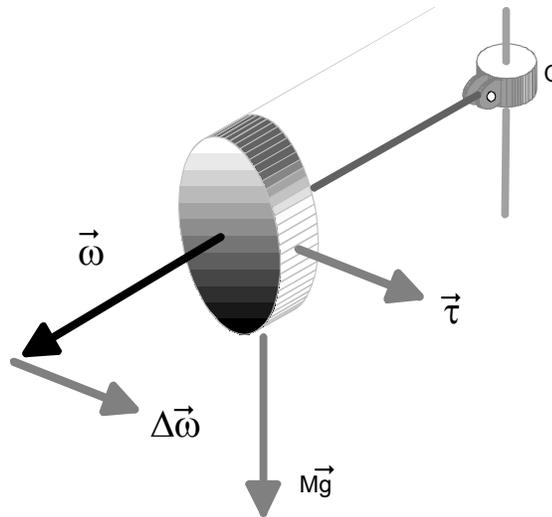
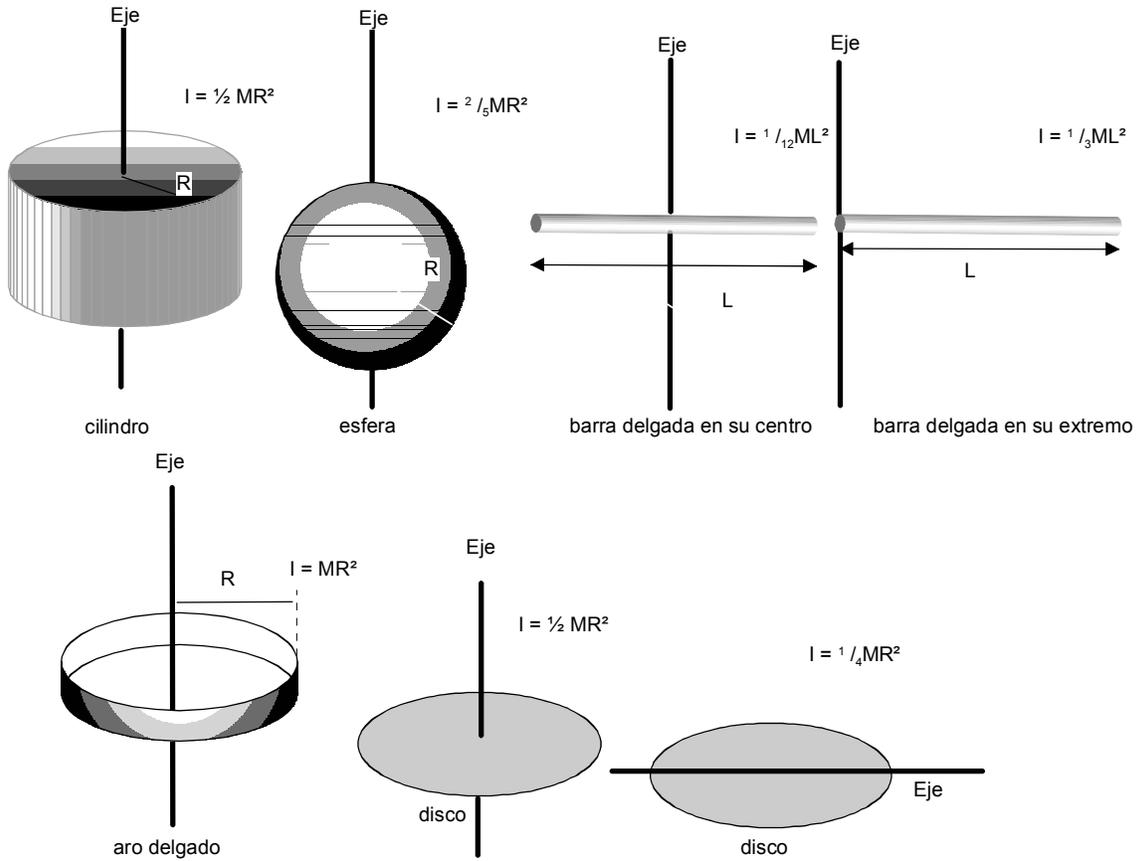


Figura 9.8:

9.4.3. Momentos de Inercia

El cálculo de momentos de Inercia requiere realizar integraciones. Además el cálculo debe ser en algún origen específico del cuerpo y para ejes determinados. Normalmente se encuentran los momentos de Inercia para orígenes coincidiendo con el centro de masa y para ejes que coinciden con ejes de simetría, cuando los hay. Se darán algunos ejemplos de cálculo, pero ahora daremos los resultados para los cuerpos de formas más simples.



9.4.4. Teorema de Steiner

Conocido el momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa G , se puede calcular el momento de inercia para otro eje paralelo al anterior en un punto A mediante la relación conocida como teorema de Steiner

$$I_A = I_G + Md^2,$$

donde d es la distancia entre esos dos ejes. Para demostrarlo considere ejes $GX'Y'Z'$ con origen en G , y ejes paralelos $AXYZ$ con origen en A . Consideremos solamente momentos de inercia respecto al eje Z , porque la demostración

para los otros es análoga. Entonces tenemos

$$I_G = \int dm(x'^2 + y'^2),$$

$$I_A = \int dm(x^2 + y^2),$$

pero las coordenadas están relacionadas. De

$$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}'$$

se obtienen

$$x = x_G + x',$$

$$y = y_G + y',$$

$$z = z_G + z',$$

y luego

$$x^2 + y^2 = (x_G + x')^2 + (y_G + y')^2$$

$$= x'^2 + y'^2 + 2x_Gx' + 2y_Gy' + x_G^2 + y_G^2,$$

de manera que

$$I_A = \int dm(x^2 + y^2) = \int dm(x'^2 + y'^2 + 2x_Gx' + 2y_Gy' + x_G^2 + y_G^2)$$

$$= I_G + \int dm(2x_Gx' + 2y_Gy') + (x_G^2 + y_G^2) \int dm.$$

Pero

$$\int dm(x') = \int dm(y') = 0,$$

porque son coordenadas relativas al centro de masa y $\sqrt{(x_G^2 + y_G^2)} = d$ es la distancia entre los ejes Z . Ha resultado entonces

$$I_A = I_G + Md^2,$$

o sea entre dos ejes paralelos, uno que pasa por el centro de masa y otro que pasa por el punto A estando ambos eje a una distancia d , al momento de inercia en el centro de masa hay que agregarle Md^2 para obtener el momento

de inercia en A . Por ejemplo considere una barra donde el momento de inercia respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro es

$$I_G = \frac{1}{12}ML^2,$$

entonces respecto a su extremo será

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2.$$

9.5. Ejemplos de dinámica plana

9.5.1. Dinámica de rotación

El caso más simple ocurre cuando el cuerpo puede solamente girar en torno a un eje fijo. Si llamamos O al punto del cuerpo por donde pasa el eje de rotación, nuestra relación fundamental entre torque y momentum angular es

$$I_O\ddot{\theta} = \tau_O,$$

la energía cinética del cuerpo es

$$K = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2,$$

que pueden también escribirse

$$\begin{aligned} I_O\alpha &= \tau_O, \\ K &= \frac{1}{2}I_O\omega^2. \end{aligned}$$

EJEMPLO 9.5.1 *Un disco de masa M y radio R puede rotar respecto a un eje fijo que pasa por su centro. Mediante un hilo enrollado se sostiene otro cuerpo de masa m que cuelga. Si el sistema se libera y comienza a moverse, determine la aceleración angular del disco y la altura que baja el cuerpo que cuelga en función del tiempo transcurrido.*

Solución. Si llamamos T a la tensión del hilo, tenemos:

$$I \ddot{\theta} = \tau = TR,$$

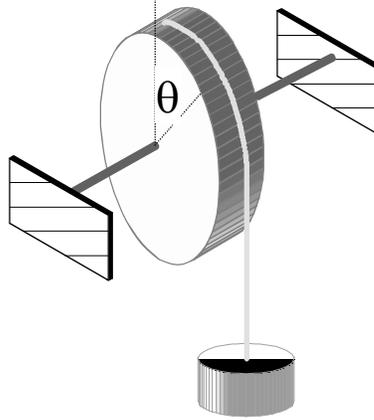


Figura 9.9:

y para el cuerpo que baja

$$mg - T = ma.$$

Pero lo que baja el cuerpo está relacionado con lo que gira el cilindro en la forma (y hacia abajo)

$$y = R\theta,$$

de manera que

$$a = \ddot{y} = R\ddot{\theta}.$$

Si colocamos además $I = \frac{1}{2}MR^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MR\ddot{\theta} &= T, \\ mg - T &= mR\ddot{\theta}, \end{aligned}$$

o bien

$$mg - \frac{1}{2}MR\ddot{\theta} = mR\ddot{\theta},$$

de donde se obtiene la aceleración angular del disco

$$\ddot{\theta} = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m} \frac{g}{R}.$$

Esto es simple de integrar dos veces y se obtiene

$$\dot{\theta} = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m} \frac{g}{R} t,$$

$$\theta = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m} \frac{g}{2R} t^2,$$

y luego lo que baja el cuerpo es

$$y = R\theta = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m} \frac{g}{2} t^2.$$

NOTA 9.1 Es interesante comprobar que la energía se conserva. En efecto la energía cinética es

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)}g^2t^2 \end{aligned}$$

y la energía potencial es

$$V = -mgy = -\frac{1}{2}\frac{m^2}{\frac{1}{2}M + m}g^2t^2,$$

esto es

$$K + V = 0.$$

NOTA 9.2 Si un cuerpo rota respecto a un eje fijo y el torque es nulo, entonces

$$\frac{d}{dt}I_O\dot{\theta} = 0,$$

entonces se conserva el momentum angular

$$I_O\dot{\theta} = \text{constante}.$$

Si I_O es constante el último resultado dice simplemente que la velocidad angular es constante. Si el momentum angular varía, entonces varía la velocidad angular.

EJEMPLO 9.5.2 *Colapso de una estrella. Este es un ejemplo de la astrofísica, donde se establece que la última forma estable de una estrella que tiene suficiente masa y que a terminado su energía, es en la forma de estrella neutrónica, donde toda la materia de ella se ha transformado en neutrones,*

uno al lado del otro y de un tamaño bien pequeño y de muy alta densidad. Supongamos entonces que la estrella tenía antes del colapso un radio del orden de nuestro Sol $R \approx 7 \times 10^5 \text{ km}$ y que da una revolución cada 10 días. Si al transformarse en estrella neutrálica su radio se reduce a $R' = 10 \text{ km}$, determine su nueva velocidad angular.

Solución. De acuerdo a la última nota (conservación del momentum angular) tenemos que

$$I_O \dot{\theta} = I'_O \dot{\theta}',$$

o bien

$$\frac{2}{5} MR^2 \dot{\theta} = \frac{2}{5} MR'^2 \dot{\theta}'$$

de donde

$$\dot{\theta}' = \frac{R^2}{R'^2} \dot{\theta} = \left(\frac{7 \times 10^5}{10}\right)^2 \dot{\theta},$$

pero $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{10 \times 24 \times 3600} \text{ rad/s}$ y calculando se obtiene

$$\dot{\theta}' = 35633.8 \text{ rad/s}$$

o bien una frecuencia de

$$f' = \frac{\dot{\theta}'}{2\pi} = 5671.3 \text{ Hz},$$

un valor enorme.

NOTA 9.3 No tome demasiado en serio este cálculo. La velocidad radial resultaría $v = 10000 \times 35633.8 = 3.56338 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ mayor que la velocidad de la Luz (?). En realidad esta situación pertenece al ámbito de la relatividad general, cuestión que escapa a este curso.

9.5.2. Dinámica de rotación y traslación

En estos casos el cuerpo se traslada y además rota respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento. En estos casos es conveniente considerar las rotaciones respecto a un eje que pasa por el centro de masa porque se cumple que

$$I_G \frac{d}{dt} \vec{\omega} = \vec{\Gamma}_G^{ext} \quad (9.27)$$

o bien para la componente perpendicular al plano del movimiento

$$I_G \frac{d}{dt} \omega = \Gamma_G^{ext}, \quad (9.28)$$

$$I_G \alpha = \Gamma_G^{ext}, \quad (9.29)$$

además de

$$M \vec{a}_G = \vec{F}^{ext}. \quad (9.30)$$

Puede ser útil la energía cinética, cuya expresión es

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2, \quad (9.31)$$

siendo la primera parte $\frac{1}{2} M v_G^2$ llamada energía cinética de traslación y la segunda parte $\frac{1}{2} I_G \omega^2$ energía cinética de rotación.

EJEMPLO 9.5.3 *Un disco de masa M y radio R baja rodando sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo α respecto a la horizontal. Determine (a) la aceleración angular del disco, (b) la aceleración lineal de G , (c) la fuerza de roce.*

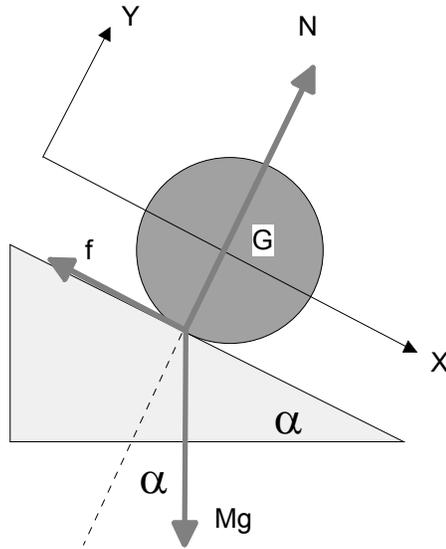


Figura 9.10:

Solución. Aquí ω está hacia adentro del papel al igual que el torque de f respecto de G , de manera que tenemos

$$I_G \frac{d\omega}{dt} = Rf,$$

además de la ecuación para el eje X

$$Mg \sin \alpha - f = Ma_G,$$

pero como no hay deslizamiento lo que avanza el disco está relacionado con el ángulo que gira de la forma

$$x = R\theta$$

de donde se deduce que

$$a_G = R \frac{d\omega}{dt}.$$

Combinando estas ecuaciones podemos obtener

$$\begin{aligned} \frac{I_G d\omega}{R dt} &= f, \\ Mg \sin \alpha - f &= MR \frac{d\omega}{dt}, \end{aligned}$$

o bien

$$MgR \sin \alpha = (I_G + MR^2) \frac{d\omega}{dt}$$

o sea la aceleración angular es

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{MgR \sin \alpha}{I_G + MR^2},$$

la aceleración lineal es

$$a_G = R \frac{d\omega}{dt} = \frac{MgR^2 \sin \alpha}{I_G + MR^2},$$

y la fuerza de roce es

$$f = \frac{I_G d\omega}{R dt} = \frac{I_G}{I_G + MR^2} Mg \sin \alpha.$$

Faltaría solamente reemplazar $I_G = \frac{1}{2}MR^2$. Si se hace los resultados son

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= \frac{2g \sin \alpha}{3R}, \\ a_G &= \frac{2g \sin \alpha}{3}, \\ f &= \frac{1}{3}Mg \sin \alpha.\end{aligned}$$

9.5.3. Casos donde el movimiento de un punto es conocido

En varios ejemplos se ilustra la potencia de la relación

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext} - M\vec{AG} \times \vec{a}_A. \quad (9.32)$$

entre torque y derivada del momentum angular en un punto arbitrario. Como se explica esta relación es particularmente útil cuando el movimiento o la aceleración del punto A es conocida. El movimiento dado del punto A y por lo tanto su aceleración es causada por alguna fuerza desconocida aplicada en A , por lo cual conviene considerar el torque respecto a ese punto porque esa fuerza no produce torque respecto a ese punto. En los ejemplos que siguen es una buena tarea para el lector intentar llegar a los mismos resultados sin usar la relación (9.32) como se muestra en un ejemplo con soluciones (a) y (b).

EJEMPLO 9.5.4 *Péndulo de longitud L , masa M cuyo punto de suspensión A oscila verticalmente de la forma $y_A = a \sin \omega t$. Determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$.*

Solución. Para este caso tenemos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

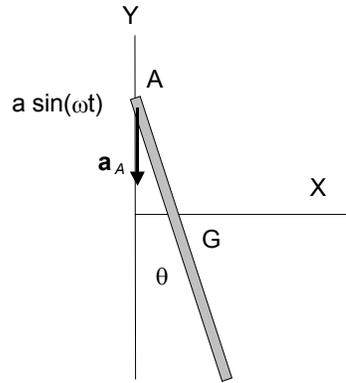


Figura 9.11: Péndulo cuyo punto de suspensión oscila

pero puede fácilmente verse que $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2}a\omega^2 \sin \omega t \sin \theta$ obteniendo en dos pasos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta + M \frac{L}{2} a \omega^2 \sin \omega t \sin \theta.$$

EJEMPLO 9.5.5 *Péndulo de longitud L , masa M cuyo punto de suspensión A oscila horizontalmente en la forma $x_A = a \sin \omega t$. Determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$.*

Solución. Para este caso

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero similarmente $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2}a\omega^2 \sin \omega t \cos \theta$ entonces obtenemos en dos pasos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta + M \frac{L}{2} a \omega^2 \sin \omega t \cos \theta.$$

EJEMPLO 9.5.6 *Péndulo de longitud L , masa M cuyo punto de suspensión A se mueve sobre una circunferencia vertical de radio R con velocidad angular constante ω .*

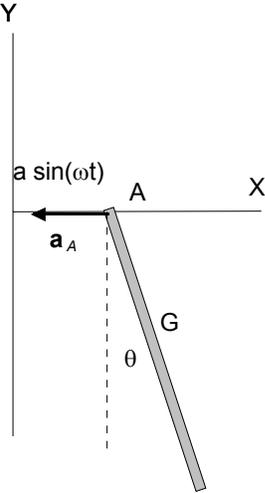


Figura 9.12: Péndulo forzado

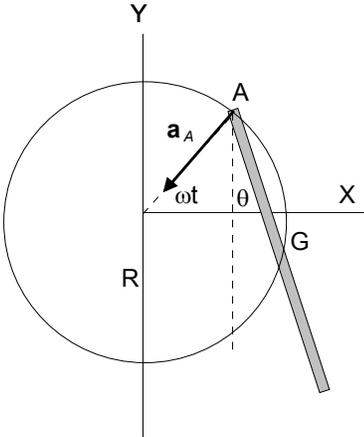


Figura 9.13: Problema de barra

Solución. Para este caso tenemos

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta - M(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k},$$

pero $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = -\frac{L}{2} a \omega^2 \sin(\frac{\pi}{2} - \omega t + \theta)$ obteniendo

$$I_A \ddot{\theta} = -Mg \frac{L}{2} \sin \theta + M \frac{L}{2} a \omega^2 \cos(\omega t - \theta).$$

EJEMPLO 9.5.7 *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica (su centro de masa está desplazado de su centro geométrico), de radio R y masa M sobre un plano horizontal. En este caso la aceleración del punto de contacto A del cuerpo con el suelo es de magnitud $a_A = R\dot{\theta}^2$ hacia arriba. Determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$.*

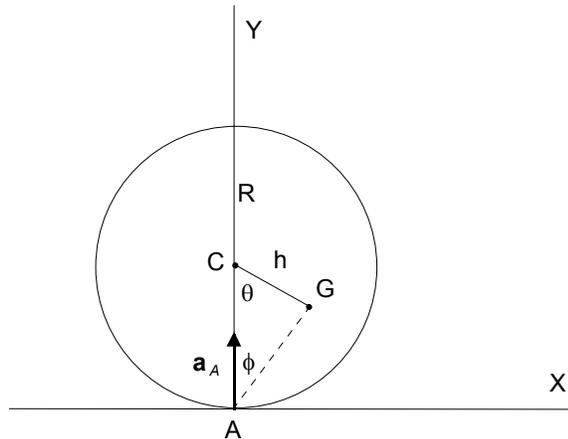


Figura 9.14: Disco que rueda

solución (a). Suponiendo que el centro de masas está a distancia h del centro geométrico, tenemos

$$(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = |\vec{r}_G - \vec{r}_A| R \dot{\theta}^2 \sin \phi,$$

pero

$$\frac{\sin \phi}{h} = \frac{\sin \theta}{|\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A|},$$

entonces

$$(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = R\dot{\theta}^2 h \sin \theta,$$

y finalmente

$$I_A \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta - MRh\dot{\theta}^2 \sin \theta.$$

El momento de inercia puede ser obtenido mediante el teorema de Steiner

$$I_A = I_G + M(h^2 + R^2 - 2hR \cos \theta).$$

solución (b). El torque respecto a G debido a la fuerza de roce f (supuesta hacia la derecha) y la normal N son es

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_G &= f |\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A| \sin(90 - \phi) \hat{k} - Nh \sin \theta \hat{k}, \\ \vec{L}_G &= I_G \dot{\theta} \hat{k}, \\ x_G &= -R\theta + h \sin \theta, \\ y_G &= R - h \cos \theta, \end{aligned}$$

de modo que las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{aligned} f &= M \frac{d^2}{dt^2} (-R\theta + h \sin \theta), \\ N - Mg &= M \frac{d^2}{dt^2} (-h \cos \theta), \\ I_G \ddot{\theta} &= f |\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_A| \sin(90 - \phi) - Nh \sin \theta, \\ I_G \ddot{\theta} &= f(R - h \cos \theta) - Nh \sin \theta, \end{aligned}$$

en la última reemplazamos N y f obteniendo (con bastante álgebra)

$$\begin{aligned} I_G \ddot{\theta} &= M(R - h \cos \theta) \frac{d^2}{dt^2} (-R\theta + h \sin \theta) \\ &\quad - (Mg + M \frac{d^2}{dt^2} (-h \cos \theta)) h \sin \theta, \\ (I_G + M(R^2 + h^2 - 2hR \cos \theta)) \ddot{\theta} &= -Mgh \sin \theta - MhR\dot{\theta}^2 \sin \theta, \end{aligned}$$

que es la misma ecuación que habíamos obtenido

$$I_A \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta - MRh\dot{\theta}^2 \sin \theta.$$



EJEMPLO 9.5.8 *El mismo ejemplo anterior, pero ahora actúa sobre la rueda una fuerza horizontal constante de magnitud F aplicada en su centro. Determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$.*

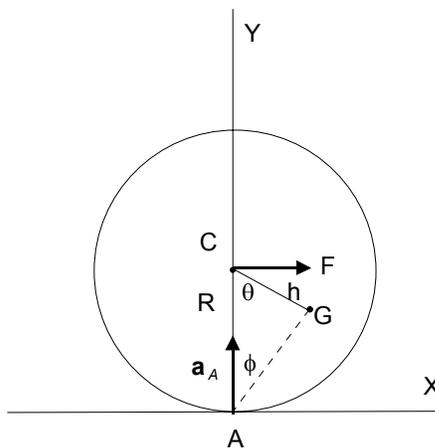


Figura 9.15: Rueda tirada con una fuerza.

Solución. Simplemente agregamos el torque de F obteniendo

$$I_A \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta - FR - MR\dot{\theta}^2 h \sin \theta.$$

EJEMPLO 9.5.9 *Movimiento de rodadura de una rueda excéntrica de radio a sobre un cilindro fijo de radio R . Determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$.*

Solución. En este caso, demuestre primero que la aceleración del punto A del cuerpo en contacto con el cilindro es de magnitud $a_A = aR\omega^2/(R+a)$ hacia el centro de la rueda. Aquí la velocidad angular de la rueda está relacionada con el ángulo θ mediante $\omega = (R+a)\dot{\theta}/a$ y $R\theta = a\phi$. Si el centro de masa está a distancia h del centro geométrico, podemos obtener

$$\begin{aligned} (\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} &= a_A h \sin \phi \\ &= \frac{aR\omega^2}{R+a} h \sin \phi, \end{aligned}$$

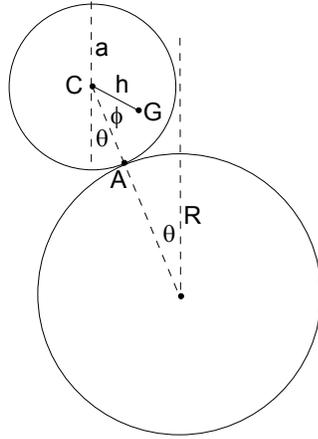


Figura 9.16: Rueda sobre cilindro.

entonces

$$\begin{aligned}
 I_A \alpha &= -Mg(h \sin(\theta + \phi) - a \sin \theta) - M \frac{aR\omega^2}{R+a} h \sin \phi, \\
 \frac{R+a}{a} I_A \ddot{\theta} &= -Mgh \sin(1 + \frac{R}{a})\theta + Mga \sin \theta - M \frac{aR\dot{\theta}^2}{R+a} h \frac{(R+a)^2}{a^2} \sin \frac{R}{a}\theta, \\
 I_A \ddot{\theta} &= -Mgh \frac{a}{R+a} \sin \frac{R+a}{a}\theta + \frac{Mga^2 \sin \theta}{(R+a)} - MR\dot{\theta}^2 h \sin \frac{R}{a}\theta,
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 9.5.10 *Movimiento de rodadura de una rueda de masa M y radio R , sobre una plataforma que oscila de la forma $a \sin \omega t$.*

Solución. Aquí la aceleración del punto A tiene dos componentes, $a\omega^2 \sin \omega t$, $R\dot{\theta}^2$ pero solo la primera importa, dando por simple inspección $(\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{a}_A \cdot \hat{k} = R\omega^2 \sin \omega t$ lo cual conduce a

$$I_A \ddot{\theta} = -MR\omega^2 \sin \omega t.$$

PROBLEMA 9.5.1 *Repita los ejemplos anteriores, pero calculando el torque respecto del centro de masa, es decir haciendo uso de la ecuación*

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{ext}.$$

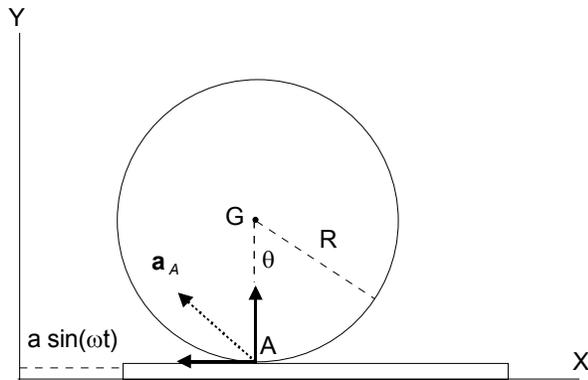
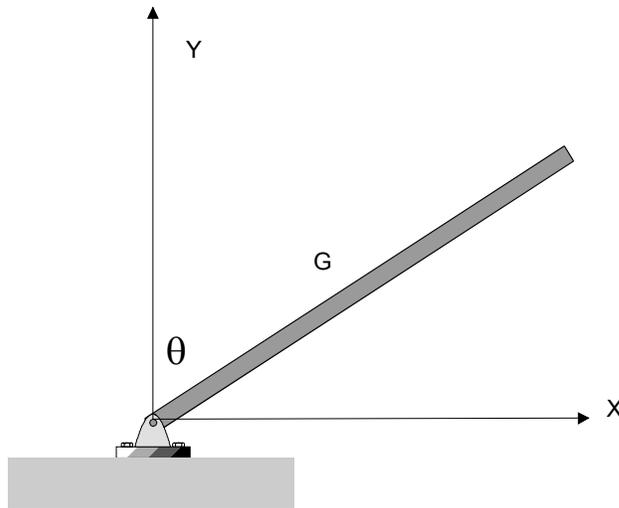


Figura 9.17: Rueda sobre plataforma móvil.

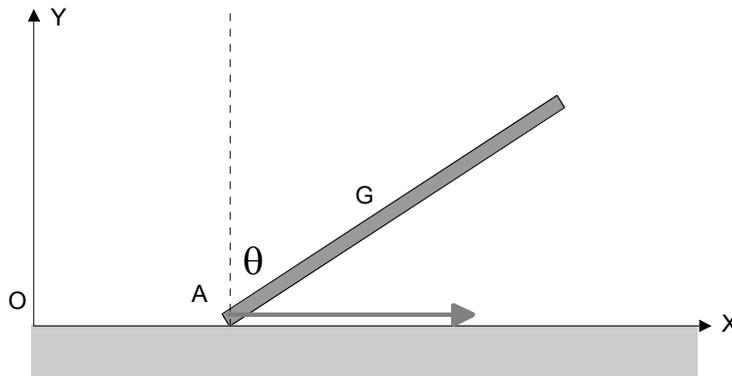
9.6. Ejercicios de cinemática plana

NOTA 9.4 (1), (2), (3) y (4) representan el grado de dificultad del problema. El (1) corresponde a problemas tipo prueba, el (2) corresponde a problemas discriminatorios y el (3) a problemas de tareas. Los problemas (4) son para expertos o para personas que deseen profundizar. *Usted tendrá éxito si es capaz de hacer problemas tipo (1) y (2)*

EJERCICIO 9.1 (1) *Una barra de longitud L tiene un extremo fijo y ella rota en un plano fijo respecto a ese extremo de manera que el ángulo que ella forma con un eje fijo en el plano del movimiento es $\theta = \omega_0 t$ siendo ω_0 una constante. Determine la velocidad y aceleración del centro de masa de la barra.*



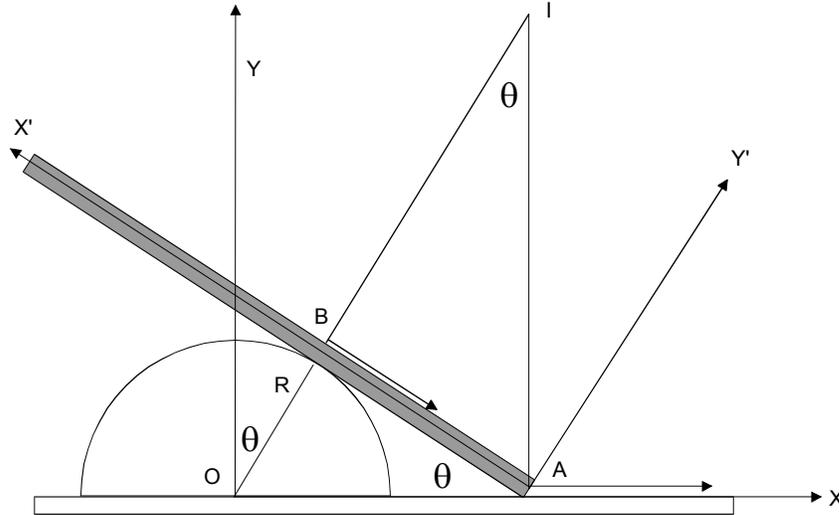
EJERCICIO 9.2 (1) Una barra de longitud L tiene se mueve en un plano vertical de manera que su extremo inferior A desliza sobre un eje OX horizontal con velocidad de magnitud v_A constante y el ángulo que ella forma con la vertical OY es $\theta = \omega_0 t$ siendo ω_0 una constante. Determine la velocidad y aceleración del centro de masa de la barra.



EJERCICIO 9.3 (2) Para la situación del problema anterior, determine la posición del centro instantáneo en función del desplazamiento x_A del extremo A , de ω_0 y de v_A .

EJERCICIO 9.4 (2) Una barra de longitud L se mueve apoyada sobre un semicírculo de radio R y centro en O y su extremo derecho A desliza sobre un

eje OX que coincide con la base del semicírculo con rapidez v_A . Si θ indica el ángulo que la barra forma con el eje OX , determine:



- La posición del centro instantáneo en función del ángulo θ .
- La rapidez del centro de masa de la barra en función del ángulo θ .

EJERCICIO 9.5 (2) Para la situación del ejercicio anterior, determine las ecuaciones de las curvas rueda y riel.

EJERCICIO 9.6 (2) Una lámina rígida se mueve en el plano OXY de manera de dos puntos de ella $A = (1, 2, 0)$ y $B = (2, 1, 0)$ tienen velocidades $\vec{v}_A = (2, 3, 0)$ y $\vec{v}_B = (0, 1, 0)$.

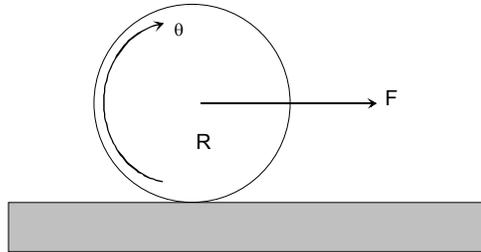
- Compruebe que esos puntos tienen velocidades compatible con la condición de rigidez (9.3).
- Determine la velocidad angular del cuerpo en ese instante.

EJERCICIO 9.7 (2) Un disco de radio R rueda sin deslizar apoyado sobre un semicilindro de radio igual R . Si θ es el ángulo que forma la línea que une los centros con una línea fija, demuestre que la velocidad angular del disco tiene magnitud

$$\omega = 2\dot{\theta}.$$

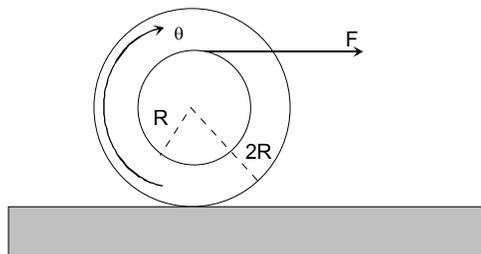
9.7. Ejercicios dinámica plana

EJERCICIO 9.8 (1) *Un disco de masa M y radio R se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar si resbalar con su plano vertical. Si se tira del centro del disco con una fuerza horizontal constante F , determine:*



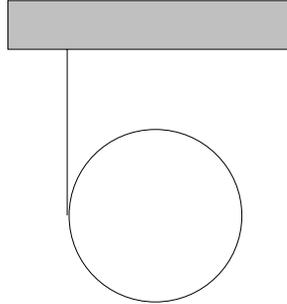
- La aceleración del centro de masa del disco.*
- La aceleración angular del disco.*
- La fuerza de roce.*

EJERCICIO 9.9 (1) *Un disco de masa M y radio $2R$ se apoya sobre un plano horizontal áspero de modo que puede rodar sin resbalar con su plano vertical. El disco tiene un reborde de radio R como se indica en la figura, en el cual se enrolla una cuerda que se tira con una fuerza horizontal constante F , determine:*



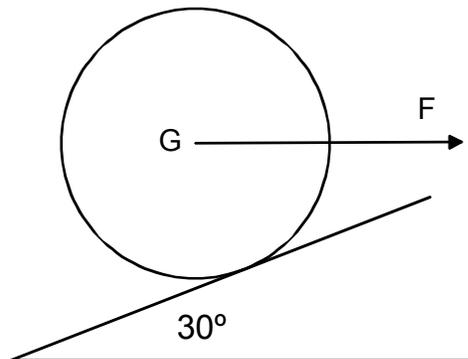
- La aceleración del centro de masa del disco.*
- La aceleración angular del disco.*
- La fuerza de roce.*

EJERCICIO 9.10 (1) *Un disco de masa M y radio R tiene enrollada una cuerda en su periferia y cae partiendo del reposo mientras la cuerda que se sostiene de su extremo se desenrolla. Determine:*



- a) *La aceleración de bajada del disco.*
- b) *La tensión de la cuerda.*

EJERCICIO 9.11 (1) *Un disco de masa 10 kg y de radio 2 m puede rodar sin resbalar sobre un plano inclinado en 30° respecto a la horizontal y es tirado por una fuerza horizontal de magnitud 100 N aplicada en su centro, como se indica en la figura.*

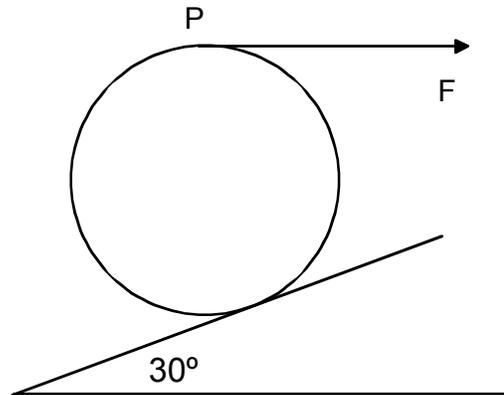


Determine:

- a) *La aceleración del centro del disco.*
- b) *La fuerza de roce.*

EJERCICIO 9.12 (1) *Un disco de masa 10 kg y de radio 2 m puede rodar sin resbalar sobre un plano inclinado en 30° respecto a la horizontal y es tirado por una fuerza horizontal de magnitud 100 N aplicada en el punto P , como*

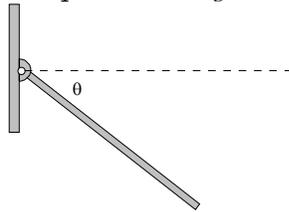
se indica en la figura.



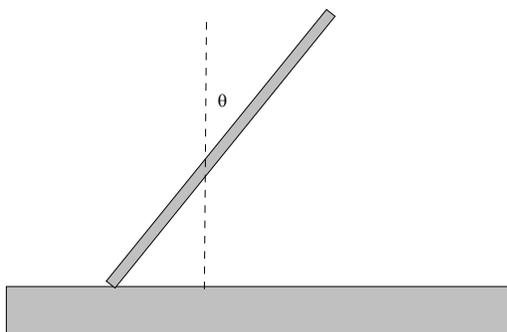
Determine:

- La aceleración del centro del disco.
- La fuerza de roce.

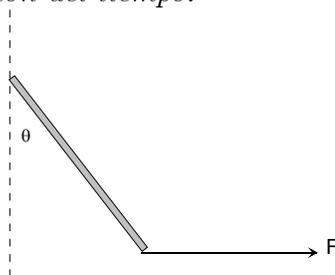
EJERCICIO 9.13 (1) Una barra de largo $2L$ y masa M está articulada en un extremo a un punto fijo O , inicialmente en reposo y horizontal. Si ella se suelta, comienza a rotar respecto a la articulación bajo el efecto del peso de la barra. Determine la reacción en la articulación y la velocidad angular de la barra en función del ángulo que ella ha girado.



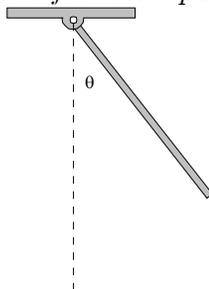
EJERCICIO 9.14 (1) Una barra de longitud $2L$ y masa M se coloca verticalmente sobre un plano horizontal liso, en reposo. Si ella es perturbada levemente comienza a caer. Determine la velocidad del centro de masa de la barra justo cuando ella se coloca horizontal.



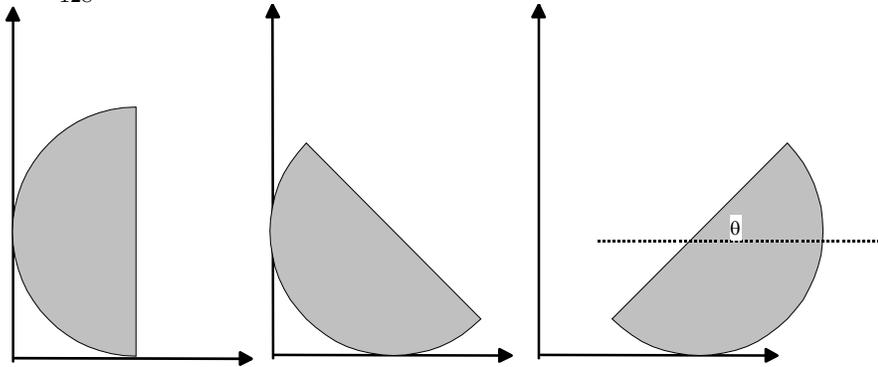
EJERCICIO 9.15 (1) Una barra de longitud $2L$ y masa M se coloca sobre un plano horizontal liso. Si la barra es tirada por una fuerza constante F , inicialmente perpendicular a la barra y aplicada en un extremo, la barra comienza a moverse sobre el plano. La fuerza se mantiene aplicada a ese mismo extremo manteniendo su dirección original. Determine una ecuación para el ángulo que gira la barra en función del tiempo.



EJERCICIO 9.16 (1) Una barra de longitud L y masa M puede oscilar libremente en torno a uno de sus extremos que se mantiene fijo, bajo la acción de su peso. Escriba la ecuación diferencial para el ángulo que ella gira.

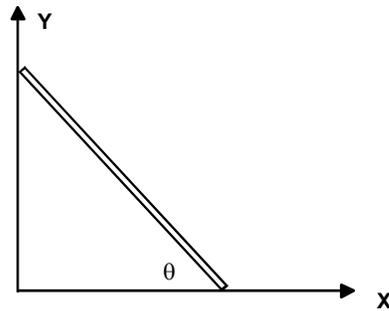


EJERCICIO 9.17 (3) Una semiesfera homogénea de radio "a" está en reposo sobre un plano horizontal liso con su base paralela a una pared vertical lisa, sobre la cual la superficie semi esférica se apoya. La semiesfera comienza a moverse partiendo del reposo, deslizando sobre el piso horizontal y la pared, ambas sin roce. Demuestre, además que cuando la base alcanza la posición horizontal, la rapidez angular y la rapidez del centro de masas de la semiesfera son $\omega = \sqrt{\frac{15}{8}}g/a$, $v = \frac{3}{8}a\omega$ respectivamente. Demuestre además, durante el movimiento siguiente, que el ángulo entre la base y la horizontal no excede de $\cos^{-1}(\frac{45}{128})$.

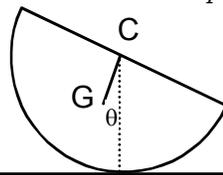


EJERCICIO 9.18 (3) Un disco uniforme de radio a que está rotando con rapidez angular inicial Ω alrededor de su eje, se coloca sobre un plano horizontal donde el coeficiente de roce cinético es μ . Si la superficie se apoya uniformemente sobre el suelo, demuestre que el disco se detendrá en un tiempo $\frac{3}{4}a\Omega/(g\mu)$.

EJERCICIO 9.19 (1) Una barra de masa M y largo 2a se mueve apoyada en superficies lisas OY vertical y OX horizontal. Inicialmente la barra estaba vertical con $\theta = \pi/2$ y se perturbó levemente. Determine $\dot{\theta}$ y las reacciones en función de θ .



EJERCICIO 9.20 (2) Una semiesfera de masa M y radio R se coloca apoyada sobre una superficie horizontal con roce de modo que la semiesfera sólo puede rodar sin resbalar. Inicialmente la base está paralela al plano horizontal.



Si se le da a la esfera una velocidad angular inicial $\dot{\theta}(0) = \Omega$, determine $\dot{\theta}$ en función de θ .

Apéndice

10.1. Apéndice matemático (opcional)

Aunque sería deseable que en un primer curso de física no se usara matemáticas, ello es difícil pues las matemáticas son la herramienta mediante la cual se formulan las leyes en física. Aunque trataremos de no usar matemáticas complicadas, ciertos elementos como la derivada e integral, son imprescindibles. Aquí trataremos algunos tópicos, cada cual con diversas aplicaciones, y sin rigor matemático.

10.1.1. Algunas funciones importantes

La función exponencial

La función exponencial

$$y = b^x,$$

donde b es la base, tiene un importante papel en Física. La base más importante es el número e que se define más adelante y se tienen las dos importantes propiedades

$$\begin{aligned} b^x b^y &= b^{x+y}, \\ b^0 &= 1. \end{aligned}$$

El logaritmo

Si

$$y = b^x$$

entonces

$$x = \log_b y,$$

que se lee logaritmo de y en base b . Todas las propiedades de esta función se deducen de las propiedades de la función exponencial b^x . Por ejemplo de

$$1 = b^0 \text{ con } b > 0$$

se tiene que

$$\log_b 1 = 0.$$

Similarmente de

$$b = b^1$$

se deduce que

$$\log_b b = 1.$$

También si

$$u = b^x,$$

$$v = b^y,$$

entonces

$$uv = b^{x+y},$$

luego

$$x + y = \log_b uv$$

o sea

$$\log_b uv = \log_b u + \log_b v.$$

En particular para bases, 10 y $e = 2.7183..$ (el número e), se habla de logaritmos vulgares y naturales que se denotan con $\log(x)$ y $\ln(x)$ Entre otras

propiedades se tiene:

$$\begin{aligned}\log(AB) &= \log A + \log B, \\ \log A^x &= x \log A, \\ \log 10 &= 1, \\ \ln(e) &= 1, \\ \log(10^n) &= n, \\ \log_b a \log_a b &= 1, \\ \ln(10) &= 2,303\dots \\ \log(e) &= 0,4343\dots\end{aligned}$$

EJERCICIO 10.1 *Demuestre a partir de la definición del logaritmo que*

$$\log_b a \log_a b = 1.$$

EJERCICIO 10.2 *Demuestre a partir de la definición de logaritmo que*

$$\log_b a^c = c \log_b a.$$

El número e

El número $e = 2.718\,281\,828\,46\dots$, la base de los logaritmos naturales se define como el siguiente límite

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La existencia de este límite, puede ser establecida estudiando la secuencia

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

cuyos primeros valores son

$$\begin{aligned}a_1 &= \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2,0 \\ a_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 \\ a_3 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.370\,370\,370\,37 \\ a_4 &= \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.441\,406\,25 \\ a_5 &= \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2.488\,32\end{aligned}$$

que muestra cierta tendencia, pero de lenta evolución. Ahora del teorema del binomio

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots,$$

se deduce

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{(1 - \frac{1}{n})}{2!} + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3!} + \dots,$$

y tomando el límite puede obtenerse

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

la famosa expansión en serie del número e , que converge más o menos rápidamente como se muestra a continuación

$$1 + \frac{1}{1!} = 2,0$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2,5$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2,666\ 666\ 666\ 67$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2,708\ 333\ 333\ 33$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2,716\ 666\ 666\ 67$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2,718\ 055\ 555\ 56$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2,718\ 253\ 968\ 25.$$

Como una curiosidad se presentan algunas de las numerosas fórmulas donde aparece el número e , de la vasta diversidad de ellas

$$e = 3 - \frac{1}{4 - \frac{2}{5 - \frac{3}{6 - \frac{4}{7 - \dots}}}}$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$$

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1.$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x.$$

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right).$$

¿Podrá usted probar alguna de ellas?

10.1.2. Sumatorias

La suma de n términos a_1, a_2, \dots, a_n será representada por

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Sumatorias notables

Se deja como ejercicio probar que

$$\sum_{n=1}^N r^n = \frac{r^{N+1} - r}{r - 1}$$

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{1}{2}N(N + 1),$$

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{1}{6}N(N + 1)(2N + 1),$$

$$\sum_{n=1}^N n^3 = \frac{1}{4}N^2(N + 1)^2,$$

10.1.3. Derivadas

Si se considera una función de una variable $y = f(x)$ su gráfico con escalas uniformes es una curva, genéricamente como la que se ilustra en la figura. En ella se indican dos puntos cercanos (1) y (2), se ha dibujado la tangente a la curva en el punto (1) y la cuerda del punto (1) al punto (2).

Una medida de la tasa de crecimiento promedio de la función en el intervalo (x_1, x_2) , puede ser definida por la razón

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si nos imaginamos que los dos puntos están muy cerca, y en caso límite x_2 se acerca a x_1 hasta confundirse con el, podemos observar que

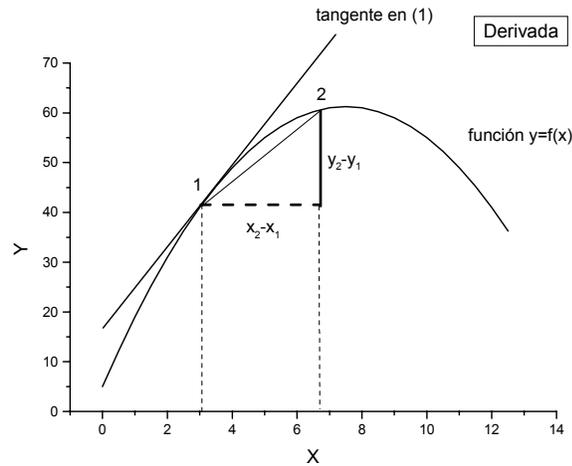


Figura 10.1: Tangente y derivada.

- la cuerda 1-2, se aproxima y se confunde con la tangente a la curva. La hipotenusa del triángulo indicado en la figura se confunde con la tangente a la curva.
- El triángulo rectángulo señalado se hace de lados cada vez menores, cero en el caso límite.
- Es claro que la razón $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la tangente del ángulo que hace la cuerda con el eje x , cualquiera que sea el tamaño de los catetos del triángulo. (Note que aquí $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$)

Se deduce entonces que el límite cuando x_1 tiende a x_2 , lo que se escribe como

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

existe y es igual a la tangente del ángulo que forma la tangente a la curva en el punto (1) con el eje x ($\tan(\theta)$). Tal límite se llama la derivada de la función en el punto x_1 y se denota por

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

10.1.4. Diferenciales

El diferencial de una función, correspondiente a un cambio Δx de su variable independiente se define por

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Como además la derivada de $y = f(x) = x$ respecto a x es evidentemente $f'(x) = 1$, se trata de una recta inclinada en 45° , entonces

$$dx = \Delta x,$$

y en consecuencia, la derivada de una función es igual al cociente de los diferenciales de la función y de la variable independiente x , o sea

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Como se observa en la figura siguiente el diferencial de la función, nos indica la variación de la función desde un punto inicial hasta la recta tangente a la curva, cantidad que no es necesariamente pequeña. En todo caso, esto permite tratar a las derivadas como cociente de diferenciales.

El proceso límite implícito en la definición de derivada, se ha hecho para las funciones más importantes, tabulando esos resultados. Esas tablas, junto a unas pocas reglas, permiten calcular la derivada de prácticamente cualquier función. Un fragmento de tabla es

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$ag(x) + bh(x)$	$ag'(x) + bh'(x)$
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
a (constante)	0
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$

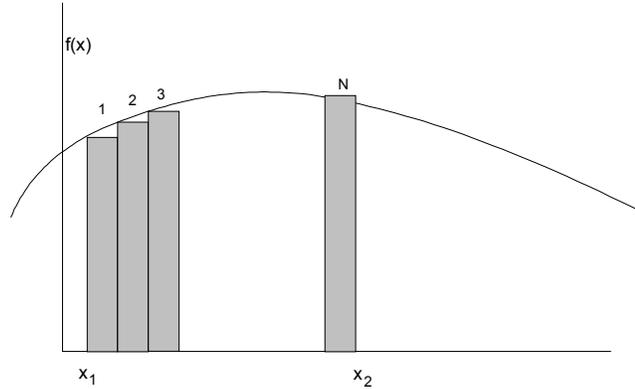


Figura 10.2: Área bajo la curva.

10.1.5. Integrales

El área bajo una curva

Si se tiene una función $y = f(x)$, planteamos el problema de determinar el área entre la curva representativa de la función y el eje X , entre los valores x_1 y x_2 . Una aproximación a la solución de este problema consiste en aproximar el área por una suma de rectángulos como se indica en la figura.

Si el intervalo de x_1 a x_2 lo llenamos con N rectángulos que lleguen hasta la curva, entonces los anchos de los rectángulos serán

$$d = \frac{x_2 - x_1}{N},$$

las abscisas de sus vértices inferiores izquierdos serán

$$x_i = x_1 + (i - 1)d, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

o

$$x_i = x_1 + (i - 1)\frac{x_2 - x_1}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

entonces el área A será aproximadamente

$$A \approx \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{x_2 - x_1}{N}.$$

Como puede observarse, el error que se comete debido a que los rectángulos tienen un déficit o exceso de área respecto a la curva, se hará cero si tomamos el límite haciendo que los anchos de los rectángulos tiendan a cero. Eso se logra tomando el límite $N \rightarrow \infty$, es decir

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{x_2 - x_1}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f\left(x_1 + (i-1) \frac{x_2 - x_1}{N}\right) \frac{x_2 - x_1}{N}, \end{aligned}$$

La integral definida

El último límite se denomina la integral definida de la función entre x_1 y x_2 y se representa por

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Como veremos el cálculo de este límite puede hacerse pues está relacionado con el concepto de derivada. Esto es veremos que si sabemos derivar, entonces sabremos integrar.

EJEMPLO 10.1.1 Calcule el área bajo la curva $y = x^2$ entre $x_1 = 0$ y $x_2 = x$.

Solución. Debemos en este caso evaluar

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{x_2 - x_1}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left(x_1 + (i-1) \frac{x_2 - x_1}{N}\right)^2 \frac{x_2 - x_1}{N}, \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (i-1)^2 \frac{x^2}{N^2} \frac{x}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^3}{N^3} \sum_{i=1}^N (i-1)^2, \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^3}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} i^2. \end{aligned}$$

Pero $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ de modo que

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^3}{N^3} \frac{1}{6} (N-1)N(2N-1), \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} x^3 \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(2 - \frac{1}{N}\right), \\ &= \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Resulta entonces que hemos logrado calcular una integral, es decir

$$\int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3.$$

Relación con la derivada

Considere la integral

$$A(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Esto es el área bajo la curva entre a y x . Esta puede ser considerada una función de x y por lo tanto la podemos derivar respecto a x . Si usamos la definición de derivada entonces

$$\frac{dA(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(A(x + \Delta x) - A(x))}{\Delta x}.$$

El numerador es una diferencia de áreas y si Δx es pequeño, esa área será la del rectángulo $f(x)\Delta x$, ver figura

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dA(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(A(x + \Delta x) - A(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x). \end{aligned}$$

Este notable resultado muestra que

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x),$$

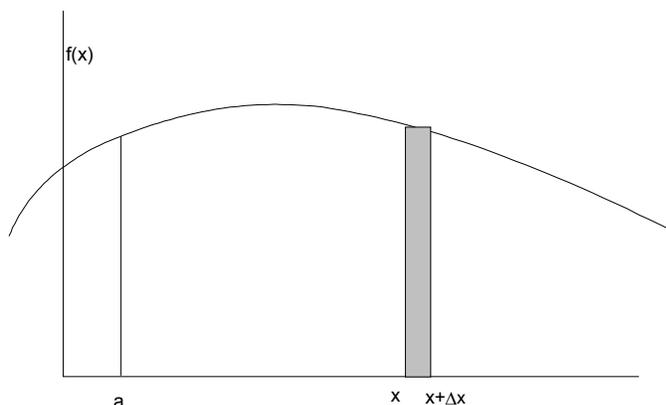


Figura 10.3: Elemento de área.

o sea que la integración es la operación inversa de la derivada. O sea que el cálculo de una integral se hace buscando que función tiene por derivada $f(x)$. Como las derivadas de las constantes son cero, esta búsqueda queda indeterminada en una constante aditiva, por ejemplo

$$\int_a^x x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C,$$

siendo C una constante. Esa constante puede evaluarse considerando que

$$\int_a^a x^3 dx = 0,$$

de modo que resulta

$$C = -\frac{a^4}{4}.$$

Finalmente

$$\int_a^x x^3 dx = \frac{x^4}{4} - \frac{a^4}{4}.$$

Resultado final

Todo lo dicho se puede resumir en que la integral definida tiene la propiedad

$$\int_a^x f'(x) dx = f(x) - f(a).$$

La integral indefinida

La operación inversa de la derivada se denomina integral indefinida, es decir

$$\int f'(x)dx = f(x).$$

10.2. Ecuaciones diferenciales

Este es un tópico que usted aún no conoce pero que en su forma más elemental se necesita en este curso. Presentaremos algunas ideas y trucos que pueden ser de utilidad en la solución de algunos problemas planteados en el texto. Una ecuación diferencial establece relaciones de una función desconocida $x(t)$ donde por lo menos aparece su primera derivada. En matemáticas usualmente uno se preocupa de funciones de la variable independiente x , pero en física la variable independiente más significativa es el tiempo. Así, las ecuaciones diferenciales más simples serían

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

que se resuelven, es decir se encuentra $x(t)$, simplemente integrando el número necesario de veces. Así resulta para el primer caso

$$x(t) = x(0),$$

y para el segundo caso

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{x}(0), \\ x(t) &= x(0) + \dot{x}(0)t.\end{aligned}$$

Sin embargo hay situaciones más complicadas.

10.2.1. Ecuación diferencial lineal, homogénea, con coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \cdots + a_0 x = 0.$$

Aunque parezca muy complicada, ella se resuelve probando una solución exponencial de la forma

$$x(t) = Ae^{pt},$$

al calcular sus derivadas y sustituir, el intento es exitoso si

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \cdots + a_0 = 0,$$

esto es si p es alguna de las n soluciones de esa ecuación algebraica de grado n que supondremos distintas. El caso de raíces repetidas no se estudiará aquí. Si esas raíces se denotan por

$$p_1, p_2, \cdots, p_n$$

entonces la solución general es

$$x(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_n e^{p_n t}.$$

Separación de variables

Para algunas ecuaciones diferenciales, por ejemplo

$$\ddot{x} = -g - \beta \dot{x},$$

el método de separación de variables consiste en:

Primero: deje dos variables en la ecuación (si ello es posible). En el ejemplo si llamamos $\dot{x} = v$, la ecuación es

$$\frac{dv}{dt} = -g - \beta v,$$

que contiene como variables a v y t . Sepárelas, es decir déjelas a lados distintos de la igualdad. Esto es

$$\frac{dv}{g + \beta v} = -g dt.$$

Se ha ganado que ahora se puede integrar

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g + \beta v} = -g dt = -g \int_0^t dt,$$

$$\frac{1}{\beta} \ln \frac{g + \beta v(t)}{g + \beta v(0)} = -gt.$$

De aquí se despeja $v(t) = \dot{x}(t)$ y puede integrarse por segunda vez. Pero eso puede hacerlo usted.

10.2.2. Identidades útiles

Si $x(t)$ es alguna función del tiempo entonces

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x}(t))^2.$$

Así, una ecuación diferencial de la forma

$$\ddot{x}(t) = f(x),$$

puede reducirse a una forma integrable pues entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x}(t))^2 &= f(x), \\ \frac{1}{2} d(\dot{x}(t))^2 &= f(x) dx, \end{aligned}$$

que es obviamente integrable una vez

$$\frac{1}{2} (\dot{x}(t))^2 - \frac{1}{2} (\dot{x}(0))^2 = \int_{x(0)}^{x(t)} f(x) dx$$

Si $f(s(t))$ es una función de un parámetro que depende del tiempo, puede ser útil saber que

$$\frac{d^2}{dt^2} f(s(t)) = \frac{1}{2f'(s(t))} \frac{d}{ds} (\dot{s} f'(s))^2. \quad (10.1)$$

Esto es particularmente útil en un caso como el siguiente. Sea

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\sin \theta},$$

evalúe

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \theta$$

de acuerdo a lo explicado sería

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta &= -\frac{1}{2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\dot{\theta} \sin \theta)^2 \\ &= \frac{1}{2 \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{g}{a} \sin^3 \theta \right) \\ &= \frac{3g}{2a} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Muchos problemas de la dinámica presentan este tipo de cálculos.

10.3. Coordenadas intrínsecas

Este desarrollo es algo complejo pero se presenta de todos modos para que usted lo tenga. En el resumen final de esta sección, están los resultados más importantes de esta sección aplicables a los problemas que usted tendrá.

Considere la trayectoria de una partícula en el espacio, esto es alguna curva que la partícula describe en el espacio. Dada esa curva, la posición del punto será una función de la longitud de arco s medida desde un origen arbitrario en la curva hasta la posición del punto en tiempo t , es decir

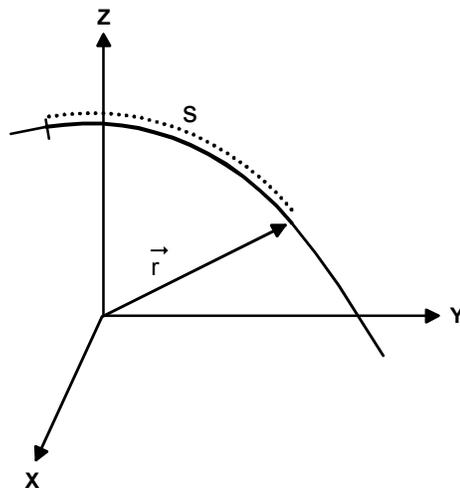


Figura 10.4:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t)). \quad (10.2)$$

Naturalmente la derivada de \vec{r} respecto a s será tangente a la curva de modo que podemos escribir

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (10.3)$$

que es unitario pues

$$|d\vec{r}| = |ds|.$$

Dado que $\hat{T} \cdot \hat{T} = 1$ resulta

$$\hat{T} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds} = 0$$

por lo cual $\frac{d\hat{T}}{ds}$ es perpendicular a \hat{T} . Denotemos por \vec{N} a ese vector ortogonal a \hat{T} , llamado vector normal

$$\vec{N} = \frac{d\hat{T}}{ds}. \quad (10.4)$$

Completemos una triada ortogonal construyendo el llamado vector binormal \vec{B}

$$\vec{B} = \hat{T} \times \vec{N}. \quad (10.5)$$

Velocidad angular

A medida que el punto se mueve a lo largo de la curva, la triada $\vec{B}, \hat{T}, \vec{N}$ puede rotar. A su "velocidad angular" la denotaremos por $\vec{\Omega}$. Entonces

$$\vec{N} = \frac{d}{ds}\hat{T} = \vec{\Omega} \times \hat{T} \quad (10.6)$$

que si la multiplicamos cruz con \vec{N} conduce a

$$\vec{0} = \vec{N} \times (\vec{\Omega} \times \hat{T}),$$

o bien desarrollando

$$\vec{0} = (\vec{N} \cdot \hat{T})\vec{\Omega} - (\vec{N} \cdot \vec{\Omega})\hat{T},$$

o bien

$$\vec{N} \cdot \vec{\Omega} = 0,$$

es decir $\vec{\Omega}$ no tiene componente a lo largo de \vec{N} . Podemos entonces escribir (note que ahora trabajamos con los unitarios)

$$\vec{\Omega} = \frac{\hat{T}}{\sigma} + \frac{\hat{B}}{\rho},$$

siendo σ y ρ escalares que interpretaremos después. De aquí siguen las

Ecuaciones de Frenet

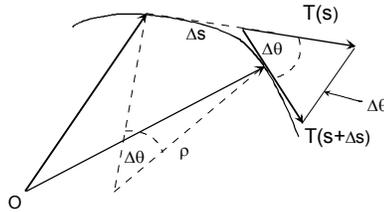
$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\hat{T} &= \vec{\Omega} \times \hat{T} = \frac{\hat{B}}{\rho} \times \hat{T} = \frac{1}{\rho}\hat{N}, \\ \frac{d}{ds}\hat{B} &= \vec{\Omega} \times \hat{B} = -\frac{\hat{N}}{\sigma}, \\ \frac{d}{ds}\vec{N} &= \vec{\Omega} \times \vec{N} = \left(\frac{\hat{B}}{\sigma} - \frac{\hat{T}}{\rho}\right)\end{aligned}\quad (10.7)$$

Significado y cálculo de σ , ρ

De la primera

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d}{ds}\hat{T} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\hat{T}(s + \Delta s) - \hat{T}(s)|}{\Delta s},$$

y de acuerdo a la figura



$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}. \quad (10.8)$$

El recíproco del radio de curvatura ρ se denomina la curvatura κ que está dada por la razón del cambio del ángulo de la tangente a la curva con respecto al arco recorrido

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}.$$

De

$$\frac{d}{ds}\hat{B} = -\frac{\hat{N}}{\sigma}$$

podemos dar una interpretación similar a $\frac{1}{\rho}$, la denominada torsión, pero respecto al ángulo que gira la dirección binormal \hat{B} .

Cálculo del radio de curvatura ρ

- Para una curva dada en función del parámetro longitud de arco $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Usando

$$\frac{d}{ds}\hat{T} = \frac{1}{\rho}\hat{N},$$

se obtiene

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d}{ds}\hat{T} \right| = \left| \frac{d^2}{ds^2}\vec{r} \right|.$$

- Para una curva dada en función del tiempo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ debemos considerar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\vec{r} &= \frac{1}{\dot{s}(t)} \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{1}{v} \frac{d}{dt}\vec{r}(t), \\ \frac{d^2}{ds^2}\vec{r} &= \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v} \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \right), \\ &= \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v}\vec{v} \right), \\ &= -\frac{\dot{v}}{v^3}\vec{v} + \frac{1}{v^2}\vec{a}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{v^3} |-\dot{v}\vec{v} + v\vec{a}|, \\ &= \frac{1}{v^3} \sqrt{\dot{v}^2 v^2 - 2\dot{v}v\vec{v} \cdot \vec{a} + v^2 a^2}. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Pero

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \\ v\dot{v} &= \dot{x}\ddot{x} + \dots = \vec{v} \cdot \vec{a}, \end{aligned}$$

con lo cual es simple establecer que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3}.$$

- Curva plana $y = y(x)$. Considere $x = t$ de modo que

$$\begin{aligned}\vec{r} &= t\hat{i} + y(x)\hat{j}. \\ \vec{v} &= \hat{i} + y'(x)\hat{j}, \\ \vec{a} &= y''(x)\hat{j},\end{aligned}$$

resultando

$$\rho = \frac{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}{|y''(x)|}. \quad (10.10)$$

- Cálculo de la torsión $1/\sigma$. Para $\vec{r} = \vec{r}(s)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\hat{B} &= -\frac{\hat{N}}{\sigma} \\ \hat{B} &= \hat{T} \times \hat{N} \\ \frac{d}{ds}(\hat{T} \times \hat{N}) &= -\frac{\hat{N}}{\sigma}\end{aligned}$$

pero $d\hat{T}/ds$ es paralelo a \hat{N} luego

$$\hat{T} \times \frac{d}{ds}\hat{N} = -\frac{\hat{N}}{\sigma}$$

pero

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{N}$$

entonces

$$\hat{T} \times \left(\frac{d}{ds}\rho \frac{d\hat{T}}{ds} \right) = -\frac{\hat{N}}{\sigma}$$

de aquí sigue

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma} &= \hat{N} \cdot \left(\left(\frac{d}{ds}\rho \frac{d\hat{T}}{ds} \right) \times \hat{T} \right) \\ &= \hat{N} \times \left(\frac{d}{ds}\rho \frac{d\hat{T}}{ds} \right) \cdot \hat{T} \\ &= \rho \hat{N} \times \left(\frac{d^2\hat{T}}{ds^2} \right) \cdot \hat{T} \\ &= \rho^2 \frac{d\hat{T}}{ds} \times \left(\frac{d^2\hat{T}}{ds^2} \right) \cdot \hat{T}\end{aligned}$$

y finalmente

$$\frac{1}{\sigma} = \rho^2 \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \times \left(\frac{d^3 \vec{r}}{ds^3} \right) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (10.11)$$

■ Para $\vec{r} = \vec{r}(t)$, puede obtenerse que la torsión es

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\rho^2}{v^6} \vec{a} \times \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \right) \cdot \vec{v} \quad (10.12)$$

Velocidad y aceleración

Ahora es trivial establecer que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s} \hat{T} = v \hat{T}.$$

Además

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s} \hat{T} + \dot{s} \frac{d\hat{T}}{dt} \\ &= \ddot{s} \hat{T} + \dot{s}^2 \frac{d\hat{T}}{ds} \\ &= \ddot{s} \hat{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{N} \\ &= \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{v^2}{\rho} \hat{N}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

10.3.1. Resumen

Para movimientos planos, será suficiente considerar

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{v},$$

y

$$\hat{N} = \pm \hat{k} \times \hat{T},$$

donde \hat{k} es perpendicular al plano del movimiento y el signo debe elegirse de modo que \hat{N} resulte hacia el centro de curvatura.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{v^2}{\rho} \hat{N},$$

donde el radio de curvatura puede calcularse si se conoce la trayectoria $y = y(x)$ de la forma

$$\rho = \frac{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}{|y''(x)|}.$$

10.4. Movimiento relativo

10.4.1. Movimiento general del sistema

En general para sistemas de referencia arbitrarios, admitiendo aceleraciones y rotaciones de ellos respecto a uno supuesto fijo, las relaciones entre velocidades y aceleraciones de partículas son más complicadas. En efecto si colocamos \vec{r}' en términos de sus coordenadas en el sistema móvil, tenemos

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}',$$

y además

$$\vec{v} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}',$$

es decir

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'.$$

Si usted recuerda que las derivadas de los vectores unitarios móviles se obtienen de acuerdo a

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}',$$

y similarmente para los otros. Al derivar dos veces puede obtenerse, con bastante trabajo, que

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}', \quad (10.14)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}', \quad (10.15)$$

siendo $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$. Debe observarse que la velocidad y aceleración relativas son las derivadas de los vectores posición y velocidad relativos manteniendo fijas las direcciones de los ejes móviles, lo cual en algunos textos se indica por

$$\vec{v}^{rel} = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial t}, \quad \vec{a}^{rel} = \frac{\partial \vec{v}^{rel}}{\partial t}.$$

Estas son las expresiones necesarias para realizar el estudio dinámico de los movimientos en sistemas de referencia que rotan. De hecho, nuestro propio sistema de referencia, la Tierra, tiene una rotación, respecto a su eje, prácticamente constante y afortunadamente no muy alta. Una vuelta por día.

10.4.2. Transformación de Lorentz

La transformación de Galileo de velocidades para sistemas que se trasladan uno respecto del otro

$$\vec{v} = \vec{v}'_{O'} + \vec{v}',$$

está en contradicción con un hecho experimental muy bien establecido. La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia de modo que ella no satisface esta última relación. La solución de esa inconsistencia obligó a abandonar la transformación de Galileo en el ámbito de velocidades cercanas a la velocidad de la luz. Fue Albert Einstein quien relativizando el concepto de tiempo, es decir el tiempo no es más un concepto absoluto, escribió las ecuaciones correctas de transformación de coordenadas y tiempos de acuerdo a

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - v_A t), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v_A x}{c^2}\right),\end{aligned}$$

siendo c la rapidez de la luz, considerando el movimiento del sistema móvil tiene lugar sólo en el eje x del sistema fijo. Además el valor de

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}},$$

es prácticamente uno si las velocidades no son muy altas, recobrándose en ese caso la transformación de Galileo. Este tema ha traído enormes consecuencias en el desarrollo de la física actual, materia que está lejos del alcance de este curso por lo cual no será profundizado más.

10.5. Operador ∇ .

En coordenadas cartesianas se define el operador ∇ mediante

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

10.5.1. Gradiente.

Si se opera sobre una función escalar $\phi(x, y, z)$, $\nabla\phi$ se denomina el gradiente y se representa por $\text{grad}(\phi)$, es decir

$$\text{grad}(\phi) = \nabla\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

El significado del gradiente sale de considerar, el cambio de la función ϕ al cambiar las coordenadas en cantidades infinitesimales dx, dy, dz . Resulta

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \\ &= \nabla\phi \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Esta última relación contiene todo el significado del gradiente. Es obvio que si el cambio de posición del punto ocurre sobre la superficie $\phi = \text{constante}$ entonces $d\phi = 0$ y luego $\nabla\phi \cdot d\vec{r} = 0$. Esto significa que $\nabla\phi$ es perpendicular a la superficie $\phi = \text{constante}$. Esto da cuenta de la dirección del gradiente. Por otro lado si el cambio de posición ocurre hacia donde ϕ aumenta, entonces $d\phi > 0$ y luego $\nabla\phi \cdot d\vec{r} > 0$, es decir $\nabla\phi$ tiene el mismo sentido que $d\vec{r}$. En otras palabras el gradiente apunta perpendicularmente a las superficies de valor constante y hacia donde aumenta ϕ . Respecto a la magnitud considere un cambio de posición perpendicular hacia donde ϕ aumenta. Sea $d\vec{r}_\perp$ ese cambio, entonces

$$\begin{aligned} d\phi &= \nabla\phi \cdot d\vec{r}_\perp \\ &= |\nabla\phi| |d\vec{r}_\perp|, \end{aligned}$$

luego

$$|\nabla\phi| = \frac{d\phi}{|d\vec{r}_\perp|}.$$

10.5.2. Divergencia.

Si se aplica ∇ mediante el producto escalar sobre una función o campo vectorial $\vec{A}(x, y, z)$ se obtiene

$$\text{div}(\vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

El significado de la divergencia se obtiene considerando un teorema, llamado teorema de la divergencia.

► TEOREMA 10.1

Si V es un volumen, rodeado por la superficie S y \hat{n} indica el vector unitario perpendicular a la superficie y hacia afuera del volumen entonces

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS.$$

Si se considera un volumen muy pequeño entonces podemos aproximar, y en el límite será un resultado exacto

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV \approx (\nabla \cdot \vec{A})V = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS,$$

luego

$$\nabla \cdot \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS.$$

La integral

$$\oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS$$

se denomina el flujo del campo vectorial hacia afuera de la superficie cerrada S , lo cual en la representación de líneas de un campo vectorial es igual al número de líneas que salen de la superficie cerrada. En otras palabras la divergencia es el valor límite, o sea el flujo que sale de un punto por unidad de volumen.

Ausencia de fuentes o sumideros.

Si las líneas del campo vectorial no nacen o terminan de puntos determinados del espacio entonces

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0.$$

10.5.3. Rotor de un campo vectorial.

Si se aplica ∇ mediante el producto vectorial sobre una función o campo vectorial $\vec{A}(x, y, z)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{A}) &= \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \hat{i} + \\ &\quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \\ &\quad \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \hat{k}. \end{aligned}$$

En este caso la interpretación del rotor se logra mediante un teorema, llamado teorema del rotor.

► **TEOREMA 10.2**

Si C es un contorno orientado cerrado que encierra una superficie y \hat{n} indica el vector unitario perpendicular a esa superficie y de acuerdo al sentido del contorno (regla de la mano derecha) entonces

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} dS.$$

Si se considera un contorno cerrado muy pequeño, que encierra una área muy pequeña S podemos aproximar

$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} dS \approx (\nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n})S = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

La integral

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

se denomina la circulación del campo vectorial alrededor del contorno cerrado. De este modo tenemos una interpretación de la componente del rotor perpendicular a una superficie infinitesimal mediante

$$\nabla \times \vec{A} \cdot \hat{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r},$$

donde S es perpendicular a \hat{n} . Por lo menos indiquemos en una figura dos posibles formas (a) y (b) que tiene el campo vectorial en el plano xy de modo que resulte rotor distinto de cero en la dirección z

10.5.4. Algunas propiedades.

► **TEOREMA 10.3**

Si $\nabla \times \vec{F} = 0$ entonces $\vec{F} = -\nabla\phi$.

► **TEOREMA 10.4**

Si $\nabla \times \vec{F} = 0$ entonces $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

► **TEOREMA 10.5**

Si $\vec{F} = -\nabla\phi$ entonces $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(\phi_2 - \phi_1)$.

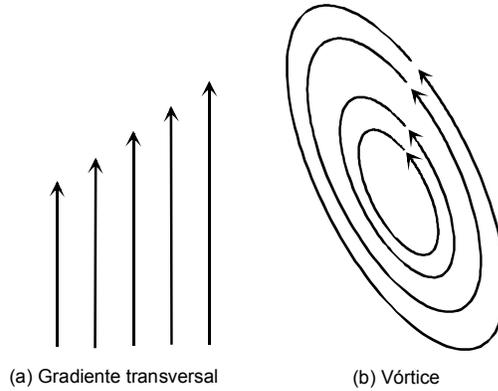


Figura 10.5: Significado de rotor no nulo.

10.5.5. El Laplaciano ∇^2 .

Este se define así

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi),$$

o sea es la divergencia del gradiente.

El caso en que $\nabla^2\phi = 0$, es importante. Esto es cuando las líneas del gradiente no tienen fuentes ni sumideros. Si el Laplaciano de una función escalar es cero en una región sea S la superficie cerrada que la rodea. Entonces en su interior

$$0 = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2},$$

o sea las segundas derivadas parciales en el interior no pueden tener el mismo signo, o sea no hay máximos ni mínimos de ϕ donde el Laplaciano es nulo. por lo tanto si ϕ constante en la superficie, entonces es constante en su interior.